Orizzonti

101. — Michèle Audin *Souvenirs sur Sofia Kovalevskaya*

102. — Rémi Goblot *L'infini en mathématiques*

103. — Maurice Kleman *chronologie d'un physicien*

104. — Michel Garcia. *Mathématiques à travers les siècles (I). Géométrie et arithmétique de l'Antiquité à nos jours*

105. — Michel Garcia. *Mathématiques à travers les siècles (II). Essor des mathématiques du* XVII^{e} *au* XIX^{e} *siècle. Algèbre, analyse, topologie et probabilités*

106. — Marc Rogalski. *Les concepts de base de l'algèbre linéaire*

Marc Rogalski

Les concepts de base de l'algèbre linéaire

Pourquoi l'algèbre linéaire ?

Calvage & Mounet

Marc Rogalski est ancien élève de l'École normale supérieure, professeur mathématique honoraire de l'université de Lille, membre de l'Institut mathématique de Jussieu-Paris Rive Gauche (Sorbonne Université, Université de Paris Cité et CNRS), et membre du Laboratoire de Didactique André Revuz (de l'université de Paris Cité, de l'université Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, de l'université de Lille, de l'UNIROUEN).

marc.rogalski@imj-prg.fr

Mathematics Subject Classification (2020) :

15AXX Basic linear algebra
15A03, 15A04, 15A06, 15A09.

ISBN 978-2-916352-94-7

♾ Imprimé sur papier permanent

© Calvage & Mounet, Paris, 2022

À Philippe

En souvenir
de Gustave Choquet, Jacques Deny et Gabriel Mokobodzki

Table des matières

I. La géométrie cartésienne dans l'espace

1. Points et vecteurs, repères 1
2. Équations et paramétriques, droites et plans 5
3. Produits scalaires et vectoriels 10
4. Lieux géométriques : des exemples 15
5. Une méthode pour les lieux géométriques 18
6. Appendice.– Objets géométriques à Lille 26

II. Des exemples de problèmes appelant des équations linéaires

1. Circuits électriques 31
2. Des équations de systèmes de production économique 32
3. Des équations différentielles linéaires 33
4. Des équations fonctionnelles 33
5. Le problème de Cramer sur les courbes algébriques 34
6. Des problèmes d'interpolation polynomiale 35
7. Exercices 37
8. Commentaire final 38

III. La méthode de Gauss et les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

1. Systèmes d'équations linéaires : la méthode du pivot de Gauss . 39
2. Indépendance linéaire et rang 50
3. Description paramétrique des trois sous-espaces S, S_0 et R . . . 58
4. Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$? 60
5. Des méthodes pour résoudre des problèmes 68
6. Des problèmes aux concepts 77

IV. Interlude : un peu d'algèbre

1. Des lois de composition très diverses 79
2. Lois de groupes 80
3. Anneaux et corps commutatifs, polynômes 84

V. L'algèbre linéaire générale axiomatique
1. Structure de l'algèbre linéaire 93
2. Cinq exemples de référence 107
3. Indépendance, bases 113

VI. Applications linéaires et dimension finie : les matrices
1. Matrices en dimension finie, les espaces $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}(m,n,\mathbb{K})$ 129
2. Des méthodes pour trouver la matrice d'une application linéaire 132
3. Les théorèmes des rangs 135
4. Quand l'unicité implique l'existence en dimension finie 138
5. Des méthodes : comment trouver $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$? 140
6. Produit de matrices et composition d'applications linéaires . . . 142
7. Inverse d'une matrice carrée 146
8. Quelques exemples simples de valeurs et vecteurs propres 149

VII. Algèbre linéaire et interpolations
1. L'interpolation par polynômes de Hermite 155
2. Interpolation par fonctions splines 157

VIII. Annexe : dual et analyse
1. Dual d'un espace vectoriel de dimension finie 159
2. Hyperplans 163
3. Équations linéaires numériques et hyperplans 166
4. Les équations linéaires avec le concept d'orthogonalité 167
5. Point de vue matriciel sur les formes linéaires et la transposition 169
6. Dualité et espaces de fonctions de dimension finie 171

Bibliographie **177**
Index **179**

Avant-propos

Voici un nouveau livre d'algèbre linéaire. Les ouvrages sur ce sujet ne manquent pas. Alors, pourquoi avons-nous décidé d'en faire un de plus ? Trois raisons au moins nous ont motivé, sachant que ce livre est élémentaire, c'est-à-dire pour les étudiants de première année d'université.

La première — et la plus importante sans doute — est le développement, à partir des années 1980, de *recherches didactiques* sur l'enseignement de l'algèbre linéaire à l'université. Chacun avec son approche particulière, de nombreux chercheurs, de diverses nationalités, ont constaté que l'algèbre linéaire est très mal comprise et apprise par les étudiants. Parmi les didacticiens français, citons [1], [2], [5], [6], [7] et [10], [18].

Non seulement l'algèbre linéaire est difficile pour les étudiants, mais elle suscite aussi des problèmes d'apprentissage avec bien des enseignants. Voici quelques points analysés par les chercheurs :

▷ la modélisation d'aspects de l'algèbre linéaire, d'une part, et le cours formalisé de celle-ci, d'autre part, présentent deux aspects en grande rupture ; d'une part, la modélisation est faite par les enseignants eux-mêmes plutôt que par les étudiants ; de l'autre, le travail interne de l'algèbre linéaire formelle ne renvoie pas directement aux problèmes d'autres mathématiques, souvent étudiées pour elles-mêmes ;

▷ les vraies raisons qui ont amené les mathématiciens à inventer l'algèbre linéaire ne sont jamais enseignées aux étudiants : la place des enseignants et celle des étudiants vis-à-vis de l'épistémologie de l'algèbre linéaire n'est pas du tout la même, et autant l'algèbre est « triviale » pour les enseignants, autant elle paraît difficile et abstraite pour les étudiants ;

▷ le problème du formalisme est d'emblée difficile pour les étudiants, et les cours des enseignants de l'algèbre linéaire sont souvent de type formalisateur, unificateur, généralisateur, alors même qu'aucune problématique ne les nourrit.

Nous avons voulu donc tirer parti des diverses raisons épistémologiques et didactiques qui, d'après les chercheurs, expliquent ce dysfonctionnement généralisé, en essayant d'y remédier par une organisation de l'enseignement prenant en compte divers ressorts didactiques dont nous pensons qu'ils peuvent aider fortement les étudiants.

La deuxième raison qui nous a incité à nous lancer dans l'aventure de la rédaction d'un nouvel ouvrage élémentaire est le constat que la plupart de ceux qui traitent de l'algèbre linéaire, malgré les grandes qualités qu'ils ont souvent, laissent parfois dans l'ombre des questions qui nous semblent essentielles à une bonne compréhension par les étudiants. Il s'agit de questions concernant la dualité, les méthodes de résolution de problèmes, et le concept de rang.

D'abord, et en ce qui concerne les sous-espaces (vectoriels ou affines) de $\mathbb{R}^n$, la dualité des points de vue entre équations paramétriques et équations cartésiennes est souvent peu claire, et peu reliée, d'une part à la notion de dual, de l'autre à l'articulation, essentielle dans les applications, entre « nombre de contraintes » et « nombre de degrés de liberté » d'un système. Notre ouvrage met donc un accent particulier sur cette question, à la fois en géométrie cartésienne dans l'espace, et en algèbre linéaire.

Un autre problème nous semble être l'absence de méthodes générales données aux étudiants pour résoudre, soit des problèmes d'algèbre linéaire, soit des problèmes d'autres domaines par modélisation dans l'algèbre linéaire. La présence de nombreux exercices ne remplace pas à notre avis, même si elle le motive, un corpus charpenté de méthodes organisées permettant de « rentrer dans les problèmes ». Ces méthodes permettent aux étudiants d'affronter des exercices plus difficiles, utilisant à fond les concepts mêmes de l'algèbre linéaire —et ainsi de mieux comprendre ceux-ci. Nous insistons donc dans cet ouvrage sur la présence de nombreuses et utiles méthodes en algèbre linéaire.

Enfin, la présentation fréquente de la notion de rang d'une famille de vecteurs, vue seulement comme la dimension du sous-espace qu'ils engendrent, cache à notre avis deux faits pas toujours clairs. D'une part, le rang d'une famille de vecteurs est un « invariant par combinaisons linéaires réversibles » ; de l'autre —et l'histoire est là pour le prouver— si le concept de rang est naturel pour des équations, car lié à l'ensemble des solutions et à sa propriété d'invariance, il est beaucoup plus arbitraire (pour les étudiants) dans le cas des vecteurs, objets assez abstraits puisque « définis » seulement par les axiomes qu'ils vérifient. Replacer la notion de rang (sous ses quatre points de vue : équations, vecteurs, applications linéaires, tableaux rectangulaires de nombres) au centre de questions du cours d'algèbre linéaire nous a donc paru nécessaire, et ce d'autant plus qu'il s'agit d'une notion difficile : il faut donc insister dessus plutôt que la repousser à la marge.

Nous voyons apparaître dans ce qui précède la troisième raison qui nous a motivé : l'enseignement classique de l'algèbre linéaire est à l'opposé total de son développement historique ; il est coupé de toute problématique et de tout objectif. C'est à l'issue seulement de l'enseignement que les étudiants — s'ils en ont surmonté le caractère abstrait et apparemment gratuit — pourront voir, si le temps d'enseignement le permet, la grande utilité de l'algèbre linéaire dans les mathématiques pures comme appliquées. Même si certains ouvrages présentent de nombreuses applications de l'algèbre linéaire, celles-ci apparaissent peu intégrées à la théorie, et *jamais comme des motivations qui peuvent en expliquer les concepts.*

Ce sont principalement ces trois raisons qui nous ont poussé à écrire ce livre, qui veut ainsi se focaliser sur les rapports qui existent entre les concepts de l'algèbre linéaire, les raisons et les objectifs qui ont amené à leur introduction (des « **raisons d'être** »), et les méthodes de résolution de problèmes qu'ils permettent : *motivations, problématiques et utilité plutôt qu'apparente gratuité dans la présentation.* Autrement dit, nous nous proposons de demander « pourquoi ? » avant de dire « comment ? », c'est-à-dire de poser les problèmes avant d'exposer les concepts permettant de les résoudre : *pas de réponses (axiomatiques, par exemple) sans questions* (voir par exemple [14] et [22]). C'est là une rupture volontaire avec un mode d'exposition des mathématiques en vigueur depuis trop longtemps en France dans l'enseignement supérieur (inspiré, bien sûr, de l'approche des manuels de Bourbaki, qui néanmoins ne s'intéressait pas à l'enseignement). Je pense, comme aussi des enseignants de mathématiques et des didacticiens des mathématiques, que cette motivation persistante des enseignements abstraits proposés aux étudiants est source d'importantes difficultés. Certes, les mathématiques sont essentielles à la constitution et aux recherches des mathématiques des axiomatiques (dès Euclide !) ; mais elles n'ont pas, pour bien des étudiants, les problématiques qui éclairent ces axiomatiques ; ces axiomatiques n'apparaissent donc pas vraiment, pour les étudiants, que des *aboutissements*, ce qu'elles sont vraiment.

Nous mettrons donc en évidence une série de problématiques. Certaines concernent des développements internes à l'algèbre linéaire (indépendance linéaire et rang apparaîtront ainsi comme des outils nécessaires à l'étude de problèmes concernant les équations linéaires numériques et leurs solutions). D'autres concernent l'utilité de l'algèbre linéaire dans la solution de problèmes variés de divers domaines des mathématiques pures ou appliquées, ou dans la solution de problèmes venant d'autres disciplines. Nous justifierons ainsi en particulier le rôle important attribué à la résolution de systèmes d'équations linéaires numériques.

Nous mettrons de plus en valeur l'usage de la modélisation par l'équation linéaire générale $T(x) = y$ (où $T : E \to F$ est une application linéaire),

sur l'importance du choix de bases adaptées à certains types de problèmes, et sur les nombreuses applications du théorème assurant que l'unicité des solutions de certaines équations assure leur existence (en particulier dans les problèmes d'interpolation).

Pour un certain nombre de questions de modélisation, en particulier en analyse et en analyse fonctionnelle, nous n'exclurons pas les espaces vectoriels de dimension infinie : ce sont ces questions qui justifient le plus le rôle universel joué aujourd'hui par l'algèbre linéaire dans l'ensemble des mathématiques et de ses applications. Et c'est en fait ce rôle de la dimension infinie en analyse fonctionnelle qui a donné droit de cité aux axiomes des espaces vectoriels, plus de quarante ans après leur introduction. Nous nous permettrons ainsi de travailler sur des problèmes d'analyse qui feront référence à certaines connaissances enseignées en « calculus ».

Enfin, nous développerons tout un ensemble organisé de *méthodes de résolution de problèmes internes à l'algèbre linéaire ou d'applications de celle-ci*. Rappelons que des méthodes ne sont pas des algorithmes de résolution (même si elles peuvent en utiliser, comme la méthode de Gauss), mais *des manières rationnelles de se poser des questions pour aborder un problème dans un domaine particulier* : classification des types de problèmes, des outils disponibles, des points de vue possibles, des différents cadres ou registres dans lesquels on peut travailler, etc. Ces questions peuvent alors déboucher sur une organisation de l'activité de résolution plus efficace : questions pertinentes, buts, sous-buts, moyens de contrôle, conscience des choix faits, reprises... L'objectif général est de pouvoir travailler sur des problèmes plus difficiles que les seules applications immédiates des théorèmes ou des algorithmes, et ainsi d'accéder à une compréhension plus profonde des concepts essentiels de l'algèbre linéaire. Pour approfondir les questions de méthodes, voir [19], [26].

Bien sûr, une telle approche de l'algèbre linéaire ne peut fonctionner sans aborder de front les modes de fonctionnement des mathématiques qui y sont en jeu : ressorts historiques, problématiques, articulations entre les concepts, raisons motivées de tel ou tel choix, pratiques des mathématiciens ; choix des problèmes, objectifs généraux, changements de cadres de travail, de registres de représentations des concepts, points de vue différents sur les objets et les démarches mathématiques, détours théoriques motivés... Tous ces aspects constitueront donc des éléments importants de ce cours, que nous regrouperons sous le nom de *meta*, pour « métamathématique », accompagnement décisif de ce qui est seulement habituellement dénommé « mathématique » : définitions formelles, théorèmes, propositions, démonstrations, etc.

En conclusion, nous émettons un souhait, et faisons un constat. D'une part, nous espérons que cette présentation du cœur de l'algèbre linéaire

apparaîtra aux lecteurs comme plus naturelle, plus problématisée, qu'elle leur fera comprendre en quoi l'algèbre linéaire est une réponse à toute une série de *problèmes* intéressants. En bref, nous espérons que *son caractère « abstrait », donc axiomatique et général, deviendra, pour les lecteurs, plus « concret » car nécessaire pour ses objectifs.* De l'autre, nous pensons que ce livre devrait constituer un complément en partie alternatif aux manuels classiques, et non les remplacer. D'ailleurs, il se centre volontairement sur les concepts de base, et est ainsi limité dans son ampleur : bien des compléments seront donc à chercher dans les ouvrages existants (et les ouvrages plus avancés apporteront avec profit d'autres « points de vue » sur l'algèbre linéaire). Inversement, nous pensons que notre présentation de l'algèbre linéaire permettra de relire avec profit les manuels classiques, en éclairant d'une autre approche leurs contenus, par exemple [3], [11], [12], [13], [16], [17], [24], ou [27].

Paris, mars 2022

Contenu du livre

Ce manuel propose huit chapitres, dont le chapitre VIII n'est en fait qu'une annexe, que le lecteur pourra passer s'il le souhaite.

Le premier chapitre a pour but de **rappeler quelques éléments du lycée**. Nous résumons les notions de l'enseignement secondaire : vecteurs dans la géométrie affine, repères et coordonnées (affines ou orthonormés), plans et droites, projections, barycentres, produits scalaires et vectoriels. Nous montrons comment les équations et/ou paramètres des droites et plans introduisent au chapitre III des équations linéaires, méthodes de Gauss et sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Enfin, nous évoquerons les notions de *lieux géométriques* : à la fois une *méthodologie* permet aux lecteurs des résolutions de problèmes un peu difficiles, et en même temps une façon essentielle de **l'articulations entre équations et paramétrages**.

Le chapitre II est un peu particulier : il s'agit de montrer comment de **nombreux problèmes**, intervenant dans des questions mathématiques et des disciplines non mathématiques (voir [25]), permettent de mettre en valeur le fait que ces problèmes exigent la notion *de combinaisons linéaires et d'équations linéaires*, et ces problèmes seront peut-être des **raisons d'être** de l'algèbre linéaire, introduite aux chapitres III et V.

Le chapitre III est centré sur les équations linéaires (dont le chapitre II a souligné tout l'intérêt). L'introduction de la notion d'inconnue permettra de situer l'idée de vecteurs et de sous-espaces vectoriels. On développera clairement la méthode de Gauss, essentielle pour résoudre les équations linéaires. **Les problèmes et les questions sur les équations linéaires introduisent alors la notion d'indépendance linéaire**. Cet appel nécessaire pour cette notion l'amène aussi pour les vecteurs eux-mêmes, et **la notion de rang** va dénouer tous les problèmes des équations linéaires : sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, présentations par systèmes d'équations linéaires ou par paramétrages linéaires (avec la notion simple de dualité), Enfin, nous mettrons en valeur **des méthodes spécifiques** aidant les lecteurs pour tous les problèmes de géométrie linéaire en dimension finie.

Remarquons que ce chapitre, seulement sur les équations générales sur $\mathbb{R}^n$, ne concernera pas les applications linéaires ici : la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est trop particulière, et cela perturberait trop à ce moment les étudiants concernant les applications (d'ailleurs non inutiles pour les équations linéaires).

Le chapitre IV est une sorte d'interlude : nous présentons *les éléments d'algèbre* nécessaires à l'algèbre linéaire générale. À partir de **nombreux problèmes et exercices**, nous introduisons les **axiomes** des concepts : lois de composition, groupes, anneaux, corps, polynômes, permutations. Notons que **c'est alors seulement ici que nous apparaissons l'axiomatique**, avec si possible des exemples et problèmes concrets qui motivent les axiomes. Pour plus d'algèbre, voir par exemple [15] et [27].

Le chapitre V est consacré à l'algèbre linéaire générale. La première section est traditionnelle : axiomes et espaces vectoriels, combinaisons linéaires, applications linéaires, etc, mais avec **les raisons d'être des idées nécessaires de l'axiomatique**. La deuxième section met tout de suite en avance comment **des modélisations de problèmes** sont essentielles dans l'algèbre linéaire. La dernière section expose les bases de l'algèbre linéaire : indépendance, rangs, bases et générateurs, morphismes, etc.

Le chapitre VI est entièrement consacré aux espaces de dimension finie, et nous y montrons comment les bases de vecteurs permettent d'utiliser **les matrices des applications linéaires**. L'essentiel de ce chapitre est centré sur le théorème qui illustre comment un morphisme entre deux espaces de même dimension est surjectif s'il est injectif : **l'unicité de problèmes à résoudre est bien plus facile que leur existence**. Nous en montrons bien des exemples.

Dans le chapitre VII, nous présentons l'essentiel d'une illustration du chapitre précédent, par un cas particulier : nous montrons des exemples d'interpolation, dont l'existence est problématisée au chapitre II (voir [25]). Remarquons que certaines interpolations étaient déjà en cours du chapitre V : interpolations de Lagrange et de Gregory-Newton. Nous explicitons dans ce chapitre VII l'interpolation d'Hermite, et l'interpolation des splines cubiques. Bien sûr, ces problèmes exigent de l'analyse élémentaire de première université, que l'on trouvera dans de nombreux manuels, par exemple les cours [3], [4].

Enfin, le chapitre VIII est une annexe sur la notion de forme linéaire et d'espace dual. La notion d'hyperplan retrouve alors la géométrie et les équations linéaires. La structure des bases canoniques permet un nouveau point de vue sur l'idée d'orthogonalité. Nous proposons pour terminer un exemple d'analyse un peu plus difficile (équations différentielles linéaires, voir [3]) qui montre que des problèmes linéaires en dimension infinie peuvent être traités dans des espaces de fonctions de dimension finie. Mais cette annexe est une illustration de la section 6 un peu plus difficile, que les lecteurs peuvent passer au début. Ceux-ci, en deuxième année d'université, pourront reprendre avec profit les questions de ce chapitre.

Remerciements

Je remercie vivement les enseignants de l'université de Lille 1 avec lesquels, de 1984 à 1996, nous avons mis en place un enseignement expérimental de première année, dont est en grande partie issu ce cours d'algèbre linéaire. Il s'agit selon les années de M.-C. Ayats, G. Chen, E. Cousquer, M.-J. Delval, M.-C. Gaultier de Kermoal, Y. Hantout, N. Roussignol, C. Sacré, K. Sou, F. Zedek. C'est à Carlos Sacré que l'équipe a dû en particulier, outre les tracés de dessins soignés, l'élaboration d'un logiciel de visualisation de la méthode du pivot de Gauss, qui nous a permis l'organisation de travaux pratiques pour les étudiants (mais qui, pour des raisons techniques, ne figurent pas dans ce cours).

Un grand merci aussi à J.-L. Dorier, A. Robert et J. Robinet pour leur rôle essentiel dans les travaux de didactique français sur l'enseignement de l'algèbre linéaire en France, qui ont inspiré bien des aspects de ce livre, en même temps que l'enseignement donné à Lille leur a servi, parmi d'autres, de terrain expérimental. Pour les travaux de ces trois auteurs, et pour des auteurs anglo-saxons, voir [6].

Enfin, je remercie les enseignants des départements de didactique des universités de Sao Paulo, qui m'ont donné l'occasion d'exposer des travaux didactiques sur l'algèbre linéaire, et avec qui j'ai eu de nombreux échanges. C'est auprès d'eux que j'ai pu commencer à travailler ce manuel : Tania Campos (de l'Université Pontificale de São Paulo, puis de l'Universidade Bandeirante de São Paulo), Marlène Alves Diaz et Luis G. X. Barros (tous deux de l'Universidade Bandeirante de São Paulo), voir [1] et [2].

Merci, enfin, aux éditions Calvage & Mounet pour l'accueil et l'attention toute particulière qu'ils ont réservés à cet ouvrage.