MATHÉMATIQUES EN DEVENIR

Mathématiques en devenir

101. — Jacques Faraut. *Analyse sur les groupes de Lie – Une introduction.* Nouvelle édition revue et augmentée

102. — Patrice Tauvel. *Corps commutatifs et théorie de Galois.* Troisième édition revue et bonifiée

103. — Jean Saint Raymond. *Topologie, calcul diff. et variable complexe*

104. — Clément de Seguins Pazzis. *Invitation aux formes quadratiques*

105. — Bruno Ingrao. *Coniques projectives, affines et métriques*

106. — Wolfgang Bertram. *Calcul différentiel topologique élémentaire*

107. — Henri Lombardi & Claude Quitté. *Algèbre commutative. Méthodes constructives.* Nouvelle édition revue et augmentée

108. — Frédéric Testard. *Analyse mathématique. La maîtrise de l'implicite*

109. — Grégory Berhuy. *Modules : théorie, pratique... et un peu d'arithmétique.* Nouvelle édition

110. — Bernard Candelpergher. *Théorie des probabilités. Une introduction élémentaire (nouveau tirage bonifié)*

111. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome premier*

112. — Gema-Maria Díaz-Toca, Henri Lombardi & Claude Quitté. *Modules sur les anneaux commutatifs*

113. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome second,* encores

114. — Alain Debreil. *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes*

115. — François Rouvière. *Initiation à la géométrie de Riemann*

116. — Nikolaï Nikolski. *Matrices et opérateurs de Toeplitz*

117. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome premier* (nouveau tirage)

118. — Martine et Hervé Queffélec. *Analyse complexe et applications.* Nouveau tirage, bonifié et corrigé

119. — Alain Debreil, Jean-Denis Eiden, Rached Mneimné et Tuong-Huy NGuyen. *Formes quadratiques et géométrie*

120. — Christian Leruste. *Topologie algébrique – Une introduction, et au-delà*

121. — Grégory Berhuy. *Algèbre : le grand combat.* Nouvelle édition

122. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome second* (nouveau tirage)

123. — Charles-Michel Marle. *Géométrie symplectique et géométrie de Poisson*

124. — Pascal Boyer. *Petit compagnon des nombres et de leurs applications*

125 et 126. — Laurent Le Floch, Frédéric Testard. *Probabilités 1 et 2 – Le hasard* est *la nécessité.*

127. — David Chiron. *Chemins d'analyse (1) - Espace de Schwartz, distributions Tempérées et transformation de Fourier.*

128. — Gentiana Danila, Jean-Denis Eiden et Rached Mneimné. *Algèbre éclectique*

129. — Yves Coudène. *La géométrie élémentaire d'Euclide à aujourd'hui*

130. — Ibrahim Assem. *Introduction au langage catégorique*

131. — Ahmed Lesfari. *Courbes algébriques complexes et/ou Surfaces de Riemann compactes*, à paraître

Ibrahim Assem

Introduction au langage catégorique

Calvage & Mounet

Ibrahim Assem est professeur émérite à l'université de Sherbrooke, au Québec (Canada). Ses domaines de recherche de prédilection couvrent entre autres la théorie des représentations des algèbres associatives, les algèbres amassées, l'algèbre homologique et la théorie des catégories.

Ibrahim.Assem@USherbrooke.ca

Mathematics Subject Classification (2010) – Primary :

18XX Category Theory
16DXX Modules, bimodules and ideals

ISBN 978-2-916352-97-8

Imprimé sur papier permanent

Table des matières

Introduction

J'ai enseigné à plusieurs reprises à l'université de Sherbrooke un cours de deuxième cycle intitulé « Théorie des catégories ». Ce cours était suivi en très grande majorité par des étudiants débutant en maîtrise et entendant se spécialiser en algèbre, ou en topologie algébrique, mais pas en théorie des catégories.

Je me suis trouvé confronté à l'absence de manuel de cours — *a fortiori* en français — reflétant mes choix et ma façon d'aborder le sujet. J'ai décidé d'écrire mes propres notes de cours qui, modifiées et complétées, sont devenues ce livre.

J'ai aimé enseigner ce cours, peu de domaines des mathématiques ont autant de liens avec les autres que ce que l'on appelle la théorie des catégories. Je me trouvais naturellement amené à parler de ce qui se passait dans plusieurs branches des mathématiques. La théorie des catégories avait dès l'origine pour ambition de fournir un langage conceptuel et unificateur utilisable dans toutes les branches des mathématiques. Mais elle n'est pas qu'une métamathématique : depuis son introduction, ses applications se sont multipliées en algèbre, topologie, géométrie, d'autres branches des mathématiques, et aussi en informatique. Puisqu'elle étudie des généralisations naturelles de catégories apparaissant dans ces branches, elle fournit aussi de nouveaux éclairages, et partant, de nouveaux problèmes de recherche. Résoudre ceux-ci peut conduire à des résultats de haute volée, applicables dans des cadres insoupçonnés jusque-là. Néanmoins, pour beaucoup d'étudiants, la nouveauté du langage catégorique comme celle de la façon de penser constituent des difficultés. Ce livre est issu en grande partie de mes tentatives pour les surmonter.

J'ai essayé de donner au lecteur une base solide en théorie des catégories, tout en développant son aptitude à « penser catégoriquement », c'est-à-dire à privilégier l'étude des applications entre objets mathématiques et comment passer d'un objet (ou d'un domaine) à un autre. Mon expérience est, qu'avec cette façon de penser, l'étudiant acquiert une nouvelle vision de son propre domaine, qu'il peut utiliser avec profit dans ce qu'il décide de faire par la suite (fût-ce des catégories !). Dans ce but, j'ai essayé d'introduire termes et résultats catégoriques en les illustrant continuellement à l'aide d'exemples provenant de la topologie ou de l'algèbre, linéaire ou générale, voire d'autres branches des mathématiques. Je n'ai pas non plus hésité à présenter quelques applications, pour autant qu'elles ne me forçaient pas à trop m'éloigner du sujet.

Ce livre est conçu pour être utilisé comme manuel pour un cours d'un semestre à l'intention des étudiants débutant en maîtrise. Cette contrainte a entraîné beaucoup d'omissions, notamment les monades, les catégories monoïdales ou les extensions de Kan. Le choix du matériel présenté est une conséquence tant de mon expérience d'enseignement que de mon itinéraire mathématique. Le contenu n'est en rien original, et a paru sous diverses formes dans d'autres volumes. C'est un plaisir pour moi de reconnaître ma dette envers les textes que je cite dans ma bibliographie, et envers tant d'autres.

Comme l'apprentissage d'un nouveau langage doit suivre et non précéder l'acquisition des concepts et résultats que ce langage est censé exprimer, j'ai supposé que le lecteur avait des connaissances solides de premier cycle, celles qui sont usuelles pour étudiants débutant en maîtrise.

Ce livre a commencé comme un projet conjoint avec mon collègue Juan Carlos Bustamante, que malheureusement ses nombreuses occupations ne lui ont pas permis de mener à bien. Je tiens à le remercier pour son aide, les nombreuses discussions au sujet du livre ainsi que ses commentaires sur les premiers chapitres. Je remercie Guillaume Douville, qui a relu avec attention une première version du manuscrit, et Jean-Philippe Morin qui s'est acquitté avec compétence et efficacité de la mise en page. Je remercie Rached Mneimné d'avoir accepté mon texte dans la collection « Mathématiques en devenir », et lui ainsi qu'Alain Debreil pour leur aide lors de la préparation du manuscrit pour l'impression. Enfin, merci à tous mes étudiants grâce à qui j'ai eu envie d'écrire ce livre.

Chapitre I

Notion de catégorie

1. Introduction

Les notions catégoriques sont relativement récentes en mathématiques puisque l'on fait remonter leur introduction à l'article fondateur de Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane, *General Theory of Natural Equivalences*, paru en 1945.

Une catégorie peut être vue comme un contexte mathématique : on considère certains types d'objets mathématiques ainsi que celles des applications entre ceux-ci qui sont pertinentes au problème étudié. Ainsi, on peut considérer la classe de tous les ensembles et les applications entre eux, celle des groupes avec les homomorphismes de groupes, ou celle des espaces topologiques avec les fonctions continues, etc. Une fois ceci fait, la théorie des catégories permet de passer d'un contexte à un autre. Ainsi, une idée de base de la topologie algébrique est de transformer un problème portant sur des espaces topologiques en un problème portant sur des objets algébriques (comme des groupes ou des modules). Cela permet de ramener l'étude d'un problème topologique, considéré comme difficile, à un problème algébrique plus simple, dont on interprétera la solution en termes topologiques. Par exemple, on associe à un espace topologique ses groupes d'homotopie, ou d'homologie. La même construction permet d'associer à une application continue entre espaces topologiques un homomorphisme entre les groupes correspondants, et cette association respecte la composition des applications et les applications identités. Il faut aussi qu'à des espaces topologiques homéomorphes correspondent des groupes isomorphes, ce qui fait de ces derniers des invariants topologiques. Il est important de remarquer que cette construction est aveugle aux éléments : à un élément donné