Im-et-Ker

101. — Bernard Randé & Franck Taïeb. *Les clefs pour l'X*

102. — Roger Mansuy & Bernard Randé. *Les clefs pour l'X (2)*

103. — Françoise Fontanez & Bernard Randé. *Les clefs pour les Mines*

105. — Roger Mansuy & Bernard Randé.*Les clefs pour la PSI et la PSI**

108. — Jean-Denis Eiden. *Le jardin d'Eiden. Une année de colles en MP**

109. — Maxime Zavidovique. *Un Max de Maths*

111. — Thierry Meyre. *Probabilités. Cours et exercices corrigés (1)*

112. — Les clefs pour l'écrit MP de mathématiques (session 2015). Bernard Randé, Alix Deleporte-Dumont, Quentin Guignard

113. — Quentin Guignard, Bernard Randé. *Les clefs pour l'oral MP de mathématiques, ENS-X (session 2015)*

114. — Les clefs pour l'écrit de mathématiques des concours 2016, filière MP. Clément de Seguins Pazzis

115. — Ismael Belghiti, Roger Mansuy et Jill-Jênn Vie. *Les clefs pour l'Info*

116. — Bernard Randé. *Les nouvelles clefs pour les Mines-CCP (tome I). Oral MP, 2015-16*

117. — Georges Skandalis. *Agrégation interne. Algèbre générale, algèbre linéaire et un peu de géométrie*

120. — Les clefs pour l'écrit de mathématiques et d'informatique. Filière PSI 2015-2016. L. Cozar, N. Jousse, B. Randé, L. Sartre

121. — Georges Skandalis. *Agrégation interne. Analyse*

122. — Thomas Blomme, Louise Gassot, Quentin Guignard, Bernard Randé. *Les clefs pour l'oral MP de mathématiques, ENS-X (2016-2017)*

123. — Éric Kouris. *Une année de colles en MPSI*

124. — Thierry Meyre. *Probabilités. Cours et exercices corrigés (2)*

125. — Philippe Caldero et Marie Peronnier. *Carnet de voyage en Algébrie*

126. — Bernard Randé. *Les clefs pour l'oral MP, mathématiques, ENS-X (session 2018)*

127. — Mohamed Amine Ben Boubaker. *L'indispensable en analyse pour les Spé. MP et MP* : Concours Mines-Centrale-X*

128. — Makrem Salhi. *Réussir l'agrégation*

129. — Salim Kobeissi & David Meneu. *Leçons pour le second oral de l'agrégation interne de mathématiques*

Salim Kobeissi David Meneu

Agrégation interne de mathématiques

Leçons d'analyse pour le second oral

Calvage & Mounet

Salim Kobeissi est professeur agrégé de mathématiques à l'université Grenoble Alpes. Membre du Jury de l'agrégation interne pendant plusieurs années et auteur de nombreux sujets de concours des Mines-Ponts, Centrale-Supelec et de l'École polytechnique, il intervient depuis une vingtaine d'années dans la préparation à l'agrégation interne à Grenoble.

salim.kobeissi@univ-grenoble-alpes.fr

David Meneu est professeur agrégé de mathématiques en classe préparatoire économique depuis treize ans ; membre de jurys de concours dans cette filière, il intervient dans la préparation à l'agrégation interne de sciences économiques et sociales (SES). Il enseigne actuellement au lycée Champollion, à Grenoble. Auteur de « Mathématiques pour la filière économique », aux PUG (2020).

meneudavid@yahoo.fr

ISBN 978-2-49-323009-6

9 782493 230096

∞ Imprimé sur papier permanent

À Tarek, Sarah et Ziad

À Romain Krust

Table des matières

Préface

« Comme on a tort de croire que l'intelligence ou les facultés d'analyse peuvent nous mettre à l'abri ! »

Isabelle Sorente

« C'est quand l'individu est sorti des mains des professeurs et libéré des examens et des concours, qu'il peut commencer son éducation intellectuelle. »

Réflexions sur la conduite de la vie, Alexis Carrel (1950)

Le présent livre est destiné en priorité, comme son nom l'indique, aux professeurs de mathématiques des lycées et collèges qui préparent le concours de l'agrégation interne ainsi qu'à leurs encadrants.

C'est pourtant et avant tout un livre de synthèse, qui balaye sous forme de problèmes une portion majeure du programme de la licence en analyse. Il sera évidemment utile aux candidats de l'agrégation externe et même utile à quelques taupins passionnés de ce qu'ils appellent le calcul infinitésimal et en avance sur leurs camarades en classes prépa. Les étudiants en faculté et leurs chargés de travaux dirigés y trouveront de quoi illustrer et éclaircir le cours magistral en amphi.

Le livre est constitué de vingt-cinq chapitres, consacrés chacun à un thème que résume bien le titre correspondant de la leçon d'oral du programme de l'agrégation interne. Un même chapitre réunit une collection de six à sept exercices, qui sont présentés avec leur correction détaillée. Ces exercices sont pertinents, rarement difficiles, et ont été choisis pour leur intérêt pédagogique et pour servir d'outil de travail en vue de la préparation de l'épreuve d'oral. La plupart de ces exercices ne peuvent être recyclés le jour lambda s'ils n'ont pas été travaillés auparavant avec soin. Quant aux exercices plus difficiles, on en compte au plus un par chapitre ; ils nécessitent un travail de dissection et de réflexion plus approfondi.

Un même résultat, comme un calcul d'intégrale ou une formule spécifique, peut faire l'objet à travers l'ouvrage de plusieurs exercices suivant la méthode employée. Cette richesse dans l'approche, propre à l'analyse, montre combien cette discipline a gagné à travers le temps en diversité et points de vue, depuis Euler à nos contemporains en passant par Cauchy, Liouville et Riemann.

Chaque chapitre se termine par un commentaire relativement sommaire sur chacun des exercices qui y figurent. Sa lecture est toute indiquée même avant d'avoir entamé vraiment la lecture du chapitre concerné.

Ce livre est issu d'une longue et riche expérience d'années d'enseignement à la préparation à l'agrégation interne de Grenoble, une autre basée sur l'expérience acquise devant les élèves des classes préparatoires et dans divers jurys de concours. Nos remerciements vont avant tout à nos élèves et étudiants qui nous ont toujours donné le plaisir du métier que nous exerçons. Nous ne pouvons manquer de remercier aussi la maison Calvage et Mounet, pour nous avoir encouragés à mener ce travail à son terme et pour la jolie mise en forme que lui ont réservée Alain Debreil et Rached Mneimné. Une pensée enfin à Ziad pour son aide récurrente.

Salim et David,
Grenoble, décembre 2022

Chapitre I

Exemples d'étude de la convergence de séries numériques

Exercice (1). Séries de Bertrand. Règle de Raabe-Duhamel

1. **Séries de Bertrand**
   Étudier suivant les valeurs des réels α et β, la nature de la série
   $$\sum_n \frac{1}{n^\alpha \big(\ln(n)\big)^\beta}.$$
2. **Règle de Raabe-Duhamel**
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle aux termes strictement positifs. On suppose qu'il existe un réel λ et une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tels que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est absolument convergente, et que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n.$$
   a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{\lambda}{n} + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right)$ converge absolument.
   b) En déduire qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $n^\lambda u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
   c) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!\times e^n}{n^n}$.
   d) Soit $a>0$; pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $u_n = \dfrac{n!\times n}{a(a+1)\times\cdots\times(a+n)}$.
   Montrer que la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a > 2$.