

Im-et-Ker

101. — Bernard Randé & Franck Taïeb. *Les clefs pour l'X*
102. — Roger Mansuy & Bernard Randé. *Les clefs pour l'X (2)*
103. — Françoise Fontanez & Bernard Randé. *Les clefs pour les Mines*
105. — Roger Mansuy & Bernard Randé. *Les clefs pour la PSI et la PSI**
108. — Jean-Denis Eiden. *Le jardin d'Eiden. Une année de colles en MP**
109. — Maxime Zavidovique. *Un Max de Maths*
111. — Thierry Meyre. *Probabilités. Cours et exercices corrigés (1)*
112. — Les clefs pour l'écrit MP de mathématiques (session 2015). Bernard Randé, Alix Deleporte-Dumont, Quentin Guignard
113. — Quentin Guignard, Bernard Randé. *Les clefs pour l'oral MP de mathématiques, ENS-X (session 2015)*
114. — Les clefs pour l'écrit de mathématiques des concours 2016, filière MP. Clément de Seguin Pazzis
115. — Ismael Belghiti, Roger Mansuy et Jill-Jënn Vie. *Les clefs pour l'Info*
116. — Bernard Randé. *Les nouvelles clefs pour les Mines-CCP (tome I). Oral MP, 2015-16*
117. — Georges Skandalis. *Agrégation interne. Algèbre générale, algèbre linéaire et un peu de géométrie*
120. — Les clefs pour l'écrit de mathématiques et d'informatique. Filière PSI 2015-2016. L. Cozar, N. Jousse, B. Randé, L. Sartre
121. — Georges Skandalis. *Agrégation interne. Analyse*
122. — Thomas Blomme, Louise Gassot, Quentin Guignard, Bernard Randé. *Les clefs pour l'oral MP de mathématiques, ENS-X (2016-2017)*
123. — Éric Kouris. *Une année de colles en MPSI*
124. — Thierry Meyre. *Probabilités. Cours et exercices corrigés (2)*
125. — Philippe Caldero et Marie Peronnier. *Carnet de voyage en Algérie*
126. — Bernard Randé. *Les clefs pour l'oral MP, mathématiques, ENS-X (session 2018)*
127. — Mohamed Amine Ben Boubaker. *L'indispensable en analyse pour les Spé. MP et MP* : Concours Mines-Centrale-X*
128. — Makrem Salhi. *Réussir l'agrégation*
129. — Salim Kobeissi & David Meneu. *Leçons pour le second oral de l'agrégation interne de mathématiques*

Salim Kobeissi David Meneu

Agrégation interne de mathématiques

Leçons d'analyse pour le second oral



Calvage & Mounet



SALIM KOBEISSI est professeur agrégé de mathématiques à l'université Grenoble Alpes. Membre du Jury de l'agrégation interne pendant plusieurs années et auteur de nombreux sujets de concours des Mines-Ponts, Centrale-Supelec et de l'École polytechnique, il intervient depuis une vingtaine d'années dans la préparation à l'agrégation interne à Grenoble.

salim.kobeissi@univ-grenoble-alpes.fr

DAVID MENEU est professeur agrégé de mathématiques en classe préparatoire économique depuis treize ans ; membre de jurys de concours dans cette filière, il intervient dans la préparation à l'agrégation interne de sciences économiques et sociales (SES). Il enseigne actuellement au lycée Champollion, à Grenoble. Auteur de « Mathématiques pour la filière économique », aux PUG (2020).

meneudavid@yahoo.fr

∞ Imprimé sur papier permanent

© Calvage & Mounet, Paris, 2023

ISBN 978-2-49-323009-6



9 782493 230096

À Tarek, Sarah et Ziad

À Romain Krust

Table des matières

I. Exemples d'étude de la convergence de séries numériques	
Leçon 404	3
II. Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique	
Leçon 405	25
III. Exemples d'utilisation des polynômes en analyse	
Leçon 409	45
IV. Comparaison, sur des exemples, de divers modes de convergence	
Leçon 410	71
V. Exemples d'étude de fonctions définies par une série	
Leçon 411	93
VI. Exemples de développement d'une fonction en série entière	
Leçon 412	121
VII. Exemples d'applications des séries entières	
Leçon 413	139
VIII. Exemples de séries de Fourier et de leurs applications	
Leçon 414	161
IX. Exemples d'applications du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis	
Leçon 415	179
X. Exemples d'utilisation de développements limités de fonctions d'une ou plusieurs variables	
Leçon 418	197

XI. Exemples de calcul exact et de calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue	
Leçon 421	215
XII. Exemples d'étude d'intégrales impropres	
Leçon 422	233
XIII. Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone	
Leçon 423	261
XIV. Exemples d'étude de fonction définie par une intégrale	
Leçon 427	283
XV. Exemples d'étude et de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles scalaires	
Leçon 428	303
XVI. Exemples d'étude et de résolution de systèmes différentiels linéaires	
Leçon 429	327
XVII. Exemples de recherche d'extrema d'une fonction numérique d'une ou plusieurs variables réelles	
Leçon 431	347
XVIII. Exemples d'utilisation de changements de variable en analyse	
Leçon 434	371
XIX. Exemples d'applications de l'intégration par parties	
Leçon 436	389
XX. Exercices faisant intervenir des variables aléatoires	
Leçon 437	409
XXI. Exemples d'étude d'applications linéaires continues et de leur norme	
Leçon 439	433
XXII. Exemples d'équations différentielles non linéaires	
Leçon 449	461
XXIII. Exemples d'applications du théorème des fonctions implicites	
Leçon 452	481

XXIV. Exemples d'applications de la notion de compacité	
Leçon 454	503
XXV. Exemples d'étude qualitative d'équations différentielles ou de systèmes différentiels	
Leçon 455	519
Index	541

Préface

« Comme on a tort de croire que l'intelligence ou les facultés d'analyse peuvent nous mettre à l'abri ! »

Isabelle Sorente

« C'est quand l'individu est sorti des mains des professeurs et libéré des examens et des concours, qu'il peut commencer son éducation intellectuelle. »

Réflexions sur la conduite de la vie, Alexis Carrel (1950)

Le présent livre est destiné en priorité, comme son nom l'indique, aux professeurs de mathématiques des lycées et collèges qui préparent le concours de l'agrégation interne ainsi qu'à leurs encadrants.

C'est pourtant et avant tout un livre de synthèse, qui balaye sous forme de problèmes une portion majeure du programme de la licence en analyse. Il sera évidemment utile aux candidats de l'agrégation externe et même utile à quelques taupins passionnés de ce qu'ils appellent le calcul infinitésimal et en avance sur leurs camarades en classes prépa. Les étudiants en faculté et leurs chargés de travaux dirigés y trouveront de quoi illustrer et éclaircir le cours magistral en amphi.

Le livre est constitué de vingt-cinq chapitres, consacrés chacun à un thème que résume bien le titre correspondant de la leçon d'oral du programme de l'agrégation interne. Un même chapitre réunit une collection de six à sept exercices, qui sont présentés avec leur correction détaillée. Ces exercices sont pertinents, rarement difficiles, et ont été choisis pour leur intérêt pédagogique et pour servir d'outil de travail en vue de la préparation de l'épreuve d'oral. La plupart de ces exercices ne peuvent être recyclés le jour lambda s'ils n'ont pas été travaillés auparavant avec soin. Quant aux exercices plus difficiles, on en compte au plus un par chapitre ; ils nécessitent un travail de dissection et de réflexion plus approfondi.

Un même résultat, comme un calcul d'intégrale ou une formule spécifique, peut faire l'objet à travers l'ouvrage de plusieurs exercices suivant la méthode employée. Cette richesse dans l'approche, propre à l'analyse, montre combien cette discipline a gagné à travers le temps en diversité et points de vue, depuis Euler à nos contemporains en passant par Cauchy, Liouville et Riemann.

Chaque chapitre se termine par un commentaire relativement sommaire sur chacun des exercices qui y figurent. Sa lecture est toute indiquée même avant d'avoir entamé vraiment la lecture du chapitre concerné.

Ce livre est issu d'une longue et riche expérience d'années d'enseignement à la préparation à l'agrégation interne de Grenoble, une autre basée sur l'expérience acquise devant les élèves des classes préparatoires et dans divers jurys de concours. Nos remerciements vont avant tout à nos élèves et étudiants qui nous ont toujours donné le plaisir du métier que nous exerçons. Nous ne pouvons manquer de remercier aussi la maison Calvage et Mounet, pour nous avoir encouragés à mener ce travail à son terme et pour la jolie mise en forme que lui ont réservée Alain Debreil et Rached Mneimné. Une pensée enfin à Ziad pour son aide récurrente.

Salim et David,
Grenoble, décembre 2022

Chapitre I

Exemples d'étude de la convergence de séries numériques

Exercice (1). Séries de Bertrand. Règle de Raabe-Duhamel

1. Séries de Bertrand

Étudier suivant les valeurs des réels α et β , la nature de la série

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}.$$

2. Règle de Raabe-Duhamel

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle aux termes strictement positifs. On suppose qu'il existe un réel λ et une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tels que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est absolument convergente, et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n.$$

- Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{\lambda}{n} + \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \right)$ converge absolument.
- En déduire qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $n^\lambda u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.
- En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n! \times e^n}{n^n}$.
- Soit $a > 0$; pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{n! \times n}{a(a+1) \times \cdots \times (a+n)}$.
Montrer que la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a > 2$.