Grégory Berhuy

Modules : théorie, pratique... et un peu d'arithmétique !

Deuxième édition

Calvage & Mounet

Grégory Berhuy est professeur à l'Université Grenoble Alpes, à Grenoble. Ses domaines de recherche de prédilection couvrent entre autres l'étude des invariants des structures algébriques, et l'application de l'algèbre non commutative à la communication sans fil.
Il est l'auteur entre autres de « Algèbre : le grand combat », grand succès de librairie paru aussi chez Calvage & Mounet.

gregory.berhuy@univ-grenoble-alpes.fr

Mathematics Subject Classification (2010) – Primary :

13AXX General commutative ring theory
13CXX Theory of modules and ideals
13EXX Chain conditions, finiteness conditions
13FXX Arithmetic rings and other special rings
15A21 Canonical forms, reductions, classification
15A36 Matrices of integers
16DXX Modules, bimodules and ideals
16PXX Chain conditions, growth conditions, and other forms of finiteness
18XX Category theory. Homological algebra
19AXX Grothendieck groups and K_0

ISBN 978-2-91-635282-4

9 782916 352824

∞ Imprimé sur papier permanent

La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne.
La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi.

Albert Einstein

Préface

Cette seconde édition a largement bénéficié des conseils avisés des deux rapporteurs ayant lu attentivement la première version de cet ouvrage. Malheureusement, pour des contraintes de calendrier, l'auteur n'avait pas eu le temps de les implémenter. C'est maintenant chose faite. En particulier, le chapitre II a été grandement remanié, pour le rendre (nous l'espérons) plus pédagogique. À l'initiative de l'auteur, il s'est aussi enrichi de considérations sur les modules de présentation finie et sur les modules stablement libres. Dans le chapitre III, nous avons mis l'accent sur la localisation de modules en un élément et tenté d'expliquer pourquoi il est préférable de localiser en un nombre fini d'éléments engendrant l'anneau de base afin d'obtenir des informations globales, plutôt que de localiser en tous les idéaux premiers (ou maximaux). En particulier, nous avons introduit la notion de principal local-global au sens fort. Nous avons également supprimé le chapitre sur le lemme de Nakayama. Les démonstrations des versions locales et globales de ce lemme ont été laissées en exercices, tandis que les démonstrations des résultats utilisant ce lemme ont été récrites afin de s'en passer. Nous avons alors intégré la caractérisation locale des modules projectifs de type fini dans le chapitre III. La dernière modification substantielle a été l'ajout d'un chapitre sur les modules projectifs de type fini sur un anneau de polynômes. Nous n'avons en effet pas résisté à l'envie de proposer une démonstration du théorème de Quillen-Suslin, qui affirme qu'un tel module est libre. Un autre changement essentiel, bien que mineur comparé aux autres, est la modification de la notion d'élément de torsion, la nouvelle définition rendant les propriétés de la torsion bien plus naturelle. Enfin, cet ouvrage s'est enrichi d'une trentaine d'exercices supplémentaires.

Bien entendu, nous avons profité de la préparation de cette seconde édition pour corriger le maximum de coquilles. Hélas, étant donné la quantité de matériel ayant été ajouté, il est plus que probable que, si beaucoup d'entre elles ont disparu, d'autres sont apparues. L'auteur s'en excuse par avance, et espère néanmoins que cette nouvelle mouture sera lue avec autant de plaisir qu'il a eu à la préparer.

Table des matières

Avant-propos

Prérequis.– Le texte qui suit est une introduction à la théorie des modules sur un anneau. Il vise essentiellement à préparer un étudiant en algèbre à la lecture d'un cours d'algèbre commutative plus avancé ou d'une introduction à la géométrie algébrique. Aussi, nous ne prétendons pas à une grande originalité, ni à quelque exhaustivité que ce soit. On supposera que le lecteur est familier avec les notions de base de la théorie des groupes et des anneaux. Une connaissance des définitions de base de l'algèbre linéaire est également souhaitable. Cet ouvrage s'adresse ainsi essentiellement aux étudiants de M1.

Motivations.– Tout étudiant à qui l'on assénerait la théorie des modules (ou toute autre théorie) pour la première fois est en droit de se poser la question : pourquoi ? À quoi l'on pourrait répondre : parce que ! Néanmoins, cette réponse nous semblant un peu courte, nous allons essayer de motiver un tout petit peu les choses.

La théorie des modules sur un anneau a été développée par Noether, et a eu pour point de départ l'étude des représentations linéaires d'un groupe fini. Le lecteur qui connaît un peu de théorie des groupes sait pertinemment que pour étudier un groupe G, le faire agir sur un ensemble X est une très bonne idée, d'une part parce que l'étude des orbites, stabilisateurs et points fixes de cette action donne des renseignements précieux sur le groupe, mais aussi parce que cela permet souvent d'utiliser les outils issus de la géométrie. De plus, toute action $\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & g{\cdot}x \end{array}$ est équivalente à la donnée d'un morphisme de groupes $G \longrightarrow \mathfrak{S}(X)$ permettant ainsi d'étudier les propriétés de G en étudiant ce morphisme, voire même de représenter G comme un sous-groupe d'un groupe de permutations lorsque l'action est fidèle.

Un cas particulièrement intéressant est celui d'une action *linéaire* sur un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps k, c'est-à-dire lorsque l'action est compatible avec la structure d'espace vectoriel. Autrement dit, une action linéaire de G sur V est une action vérifiant

$$g{\cdot}(\lambda v + \mu v') = \lambda(g{\cdot}v) + \mu(g{\cdot}v') \text{ pour tous } v, v' \in V \text{ et tous } \lambda, \mu \in k.$$

On vérifie alors que se donner une telle action linéaire revient à se donner une représentation linéaire de G dans V, c'est-à-dire un morphisme de groupes $G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$.

Afin d'expliquer le lien avec les modules, introduisons brièvement une notation. Si G est un groupe fini, noté multiplicativement, et si k est un corps, on note $k[G]$ l'ensemble des combinaisons linéaires formelles des éléments de G, c'est-à-dire

$$k[G] = \Big\{ \sum_{g \in G} \lambda_g g \mid \lambda_g \in k \Big\},$$

que l'on munit de l'addition et de l'unique loi produit distributive sur $k[G]$ qui étend la loi de groupe. On vérifie alors que $k[G]$ est un anneau, muni d'une structure de k-espace vectoriel pour laquelle la loi produit de l'anneau $k[G]$ est k-bilinéaire. C'est donc une k-algèbre associative unitaire au sens de la définition V-1.1. Le lecteur trouvera une définition moins informelle de $k[G]$ dans l'exercice II-14. On montre alors facilement que se donner une action k-linéaire de G sur V revient à se donner un morphisme d'algèbres $k[G] \longrightarrow \mathrm{End}_k(V)$ (comparer avec la remarque I-1.2) ou encore une structure de $k[G]$-module sur V qui étend la loi externe du k-espace vectoriel V.

On obtient alors un dictionnaire entre la théorie des $k[G]$-modules et la théorie des représentations. L'étude systématique des $k[G]$-modules simples (voir la définition I-2.1) est particulièrement importante, puisque ceux-ci correspondent aux représentations irréductibles. Le lecteur avide d'en savoir plus à ce sujet pourra consulter par exemple [1], [5] ou [25]. La théorie des modules permet aussi à Wedderburn de démontrer que toute k-algèbre associative unitaire de dimension finie sur k, de centre k, et n'ayant pas d'idéaux bilatères non triviaux, est isomorphe à une algèbre de matrices sur un anneau à division (i.e. un corps gauche). Pour une démonstration de ce fait, le lecteur se référera par exemple à [1], [6], [16], [18] ou aux exercices du chapitre V.

Comme nous le verrons dans le chapitre VII, la théorie des modules sur un anneau principal permet d'obtenir à peu de frais la structure des groupes abéliens de type fini, ainsi qu'une classification complète des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie en termes de certains polynômes se calculant de manière algorithmique. Comme application de cette théorie, on peut également (entre autres) résoudre des systèmes d'équations linéaires à coefficients entiers, démontrer des résultats sur le commutant et le bicommutant d'un endomorphisme (cf. exercices VII-9 et VII-10), et aussi retrouver la décomposition de Jordan aisément avec en prime une méthode de calcul systématique.

Enfin, la théorie des modules se révèle indispensable en géométrie algébrique et en algèbre homologique.

Contenu.– Ce livre est constitué de dix chapitres et trois appendices. Le chapitre I expose les notions de base nécessaires à la compréhension des chapitres suivants : module sur un anneau, sous-modules, sous-module engendré par une partie, module quotient, module cyclique, applications linéaires et suites exactes. On démontre au passage un grand classique d'algèbre homologique, à savoir le lemme du serpent (cf. théorème I-5.16). Le chapitre II introduit quelques familles de modules extrêmement importantes : les modules libres, les modules projectifs, les modules stablement libres, les modules de présentation finie et les modules noethériens. L'accent est mis particulièrement sur l'étude des modules libres, qui sont les modules possédant une base (c'est-à-dire une famille qui soit à la fois libre et génératrice). Il nous a paru important d'insister sur le fait que beaucoup de résultats de base en algèbre linéaire ne sont plus valables lorsque l'on remplace le corps de base par un anneau (existence d'une base, existence de la dimension, complétion de familles libres en une base, etc.). Aussi, le lecteur trouvera de nombreux contre-exemples dans ce chapitre illustrant ce phénomène. À cette occasion, nous faisons une brève étude des anneaux dimensionnants. Le chapitre III s'intéresse à la notion de localisation d'un module et d'un anneau, notion qui s'avérera fort utile pour étudier plus en détail les modules projectifs. Nous donnerons alors une caractérisation locale des modules projectifs de type fini. Au passage, nous définirons le rang d'un module sur un anneau intègre. Le chapitre IV est consacré à l'étude du produit tensoriel de modules et à la notion d'extension des scalaires. Le chapitre V introduit la notion d'algèbre sur un anneau commutatif, ainsi que la notion d'algèbre graduée. On s'intéresse également aux produits tensoriels de telles algèbres. On verra au passage comment exhiber des algèbres données par générateurs et relations. Dans le chapitre VI, nous construisons l'algèbre extérieure et des puissances extérieures d'un module. Comme application, nous donnerons une définition conceptuelle du déterminant d'un endomorphisme, et nous donnerons une interprétation des égalités $C\,{}^t\mathrm{Com}(C) = {}^t\mathrm{Com}(C)\,C = \det(C)I_n$ en termes d'algèbre extérieure. Le chapitre VII élucide la structure des modules de type fini sur un anneau principal. Nous insisterons particulièrement sur l'aspect algorithmique de cette théorie. Nous donnerons ensuite des applications à la théorie des groupes (structure des groupes abéliens de type fini, générateurs du groupe linéaire et du groupe spécial linéaire d'un anneau principal), à l'algèbre linéaire (invariants de similitudes, décomposition de Frobenius), ainsi qu'à la résolution des systèmes linéaires à coefficients dans un anneau principal. Le point culminant de cet ouvrage est certainement atteint avec les deux chapitres suivants. Le chapitre VIII propose l'étude de la structure des modules de type fini sur les anneaux de Dedekind. Au passage, nous démontrerons l'existence et l'unicité de la décomposition d'un idéal non nul en produits d'idéaux premiers dans un anneau de Dedekind, et nous introduirons le groupe des classes d'idéaux d'un tel anneau. À titre d'exemple, nous définirons l'anneau des entiers d'une extension de degré fini du corps des rationnels. Signalons à toute fin utile que le calcul du groupe des classes d'un anneau d'entiers est un domaine de recherche toujours d'actualité. Quant au chapitre IX, il est consacré aux modules projectifs sur un anneau de polynômes en plusieurs indéterminées. Ces deux chapitres sont donc plutôt d'un niveau M2, mais fournissent de magnifiques applications de tous les résultats démontrés dans les chapitres précédents, dont il aurait été dommage de se priver.

Nous finirons ce texte en introduisant brièvement, dans le chapitre X, le groupe de Grothendieck d'un anneau A, noté $K_0(A)$, et qui permet de résumer de manière agréablement concise les divers résultats démontrés concernant les modules projectifs. Là encore, la compréhension du groupe $K_0(A)$ fait l'objet de recherches actives. Le premier appendice porte sur quelques propriétés des ensembles infinis et le lemme de Zorn, tandis que dans le second, nous redémontrons brièvement certaines propriétés des extensions séparables. Enfin, dans le troisième appendice, à vocation culturelle, nous introduisons la notion de catégorie et de foncteur, ainsi que des considérations générales sur le problème universel posé par un foncteur, celles-ci apportant selon nous un point de vue éclairant sur l'unicité des diverses structures introduites dans cet ouvrage, telles que le produit tensoriel ou le localisé d'un module, par exemple.

Remerciements.– Je tiens à exprimer ma gratitude à quelques personnes, sans qui cet ouvrage n'aurait pas été ce qu'il est. Tout d'abord, merci à Christophe Chalons, qui m'a fait savoir que les éditions Calvage & Mounet s'intéressaient à un texte d'algèbre original. Ce livre n'aurait jamais existé sans lui. Ensuite, je tiens à remercier Rached Mneimné pour avoir accepté de publier ce livre, et pour son travail éditorial de qualité. Merci également à mon armée de relecteurs. Ceux-ci sont trop nombreux pour être cités ici, mais je tenais à ce qu'ils sachent combien j'ai apprécié le fait qu'ils aient bien voulu consacrer un peu de leur temps à relire en détail quelques chapitres, et ce malgré leur emploi du temps surchargé. Néanmoins, je serais totalement injuste et ingrat si je n'attribuais pas la médaille du relecteur de l'année à Vincent Beck pour avoir relu attentivement ce texte dans son intégralité. Son regard critique et acéré, ses remarques constructives et ses suggestions pertinentes ont sans nul doute permis d'améliorer la qualité de cet ouvrage. Je lui suis également infiniment reconnaissant pour avoir gentiment pallié mes incompétences LaTeXiennes plus d'une fois. Pour tout cela, qu'il soit mille fois remercié. Enfin, merci aux deux rapporteurs anonymes, dont les commentaires constructifs m'ont permis de récrire certains chapitres de manière plus pédagogique, et de simplifier grandement certaines démonstrations dans cette seconde édition.