Chapitre XII

Quelques problèmes

Nous avons rassemblé dans ce chapitre quelques problèmes généraux que nous avons jugés utile et intéressant d'examiner. Y figurent entre autres :

- ▷ l'étude du groupe $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$ et du treillis de ses sous-groupes distingués[1] ;
- ▷ la détermination des extensions de C_2 ou C_3 par le groupe simple $\mathfrak{A}_5$;
- ▷ l'étude du groupe spécial linéaire $SL_2(\mathbb{F}_3)$ et d'une de ses présentations par générateurs et relations ;
- ▷ l'étude du groupe spécial linéaire $SL_2(\mathbb{F}_5)$, où l'on établira l'existence d'un isomorphisme entre $PSL_2(\mathbb{F}_5)$ et $\mathfrak{A}_5$;
- ▷ l'étude du groupe $GL_3(\mathbb{F}_2)$, qui est simple d'ordre 168 ;
- ▷ le groupe $C_7 \rtimes C_3$, seul groupe non commutatif d'ordre 21, qui s'offrira à nous en huit exemplaires dans le groupe simple précédent ;
- ▷ et, enfin, l'étude des groupes $T_2(\mathbb{F}_q)$ des matrices inversibles triangulaires $2{\times}2$ sur le corps fini $\mathbb{F}_q$, et de leurs groupes d'automorphismes.

1. Le produit direct $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$

Ce groupe est le premier produit direct de deux groupes non commutatifs. Son action par conjugaison sur l'ensemble de ses sous-groupes s'avère riche et complexe à la fois, et la représentation graphique de son treillis reste malgré tout dans les limites raisonnables du dessin intelligible. Dans la suite de cette section, on désignera par G ce groupe, et l'on identifiera G avec le sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$ formé des permutations laissant stables et la partie $\{1,2,3\}$ de $\{1,2,3,4,5,6\}$ et son complémentaire $\{4,5,6\}$, ce qui rendra l'énumération de ses éléments plus aisée ; ainsi, l'élément $\big((1\,2\,3),(1\,2)\big)$ de $G = \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$ sera représenté par la permutation $(1\,2\,3)(4\,5)$ de $\mathfrak{S}_6$.

[1] Et l'examen, en particulier, du seul sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$ qui ne soit pas rectangle.

Exercice

1. [p. 459] i) Calculer l'exposant du groupe $G = \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$; le-comparer à celui de $\mathfrak{S}_6$.

ii) Peut-on engendrer le groupe G avec un ou deux seulement de ses éléments ?

iii) Montrer que le groupe G ne possède pas de sous-groupes distingués d'ordre 2, 4, 12 ou 16.

iv) Calculer le nombre de sous-groupes de G d'ordre 18.

v) Montrer que les sous-groupes d'ordre 12 de $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$ sont tous isomorphes à D_6.

vi) Montrer qu'aucun sous-groupe C_6 de G ne peut y être distingué.

vii) Déterminer les classes de conjugaison des éléments d'ordre 2. En déduire qu'il y a dans G seulement deux sous-groupes distingués isomorphes à $\mathfrak{S}_3$.

Indication.– Montrer que les éléments d'ordre 2 se répartissent en trois classes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ d'ordres respectifs 3, 3 et 9. On cherchera à cet effet les centralisateurs des différents éléments d'ordre 2. Un $\mathfrak{S}_3$ distingué ne peut contenir d'élément d'ordre 2 de la classe $\mathcal{C}_3$.

viii) Déterminer les dix sous-groupes distingués de G et en dresser le treillis. Constater que ce dernier ne peut être le treillis des sous-groupes d'un groupe donné.

ix) En comptant les éléments d'ordre 6, montrer que G possède six C_6, qui se répartissent en deux classes de conjugaison. Montrer en fait que deux C_6 sont conjugués si, et seulement si, leurs C_3 sont les mêmes ou, ce qui revient au même, si leurs C_2 sont conjugués.

x) Montrer qu'il existe à isomorphisme près deux produits semi-directs externes non triviaux $C_3^2 \rtimes C_2$. Vérifier que l'un d'eux est le sous-groupe $\mathfrak{S}_3 \times C_3$. Quel est l'autre ? En dresser le treillis, en déterminer une présentation et dessiner le graphe de Cayley correspondant.

xi) Montrer que le groupe G possède douze $\mathfrak{S}_3$ outre les deux qui sont distingués.

Indication.– Noter que nous avons six sous-groupes $\mathfrak{S}_3 \times C_2$ évidents dans G et que dans chacun d'eux, il y a toujours deux $\mathfrak{S}_3$ distincts.

Montrer que les $\mathfrak{S}_3$ de G qui ne sont contenus dans aucun D_6 sont tous conjugués.

xii) Esquisser alors le G-treillis du groupe G, sans y inclure les relations d'incidence. Comparer avec le treillis donné en D-2, page 656.

xiii) Déterminer une présentation de G avec deux générateurs et en donner le graphe de Cayley correspondant.

xiv) Peut-on engendrer G avec deux générateurs qui ne soient pas tous deux d'ordre 6 ?

Terminons en donnant en cadeau la table des caractères de $G = \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$. Les classes de conjugaison dans un produit direct s'obtiennent comme produits des classes de conjugaison de chacun des facteurs[2]. Aussi avons-nous neuf classes de conjugaison dans G puisque $\mathfrak{S}_3$ en possède 3. Quant à la table des caractères d'un produit, elle s'obtient comme le « produit tensoriel » des tables de caractères, comme on le voit ci-après.

#	1	3	2	3	9	6	2	6	4
ordre	1	2	3	2	2	6	3	6	3
représ.	$(1,1)$	$(1,s)$	$(1,r)$	$(s,1)$	(s,s)	(s,r)	$(r,1)$	(r,s)	(r,r)
$\chi_1\chi_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_1\chi_2$	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1
$\chi_1\chi_3$	2	0	-1	2	0	-1	2	0	-1
$\chi_2\chi_1$	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1
$\chi_2\chi_2$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
$\chi_2\chi_3$	2	0	-1	-2	0	1	2	0	-1
$\chi_3\chi_1$	2	2	2	0	0	0	-1	-1	-1
$\chi_3\chi_2$	2	-2	2	0	0	0	-1	1	-1
$\chi_3\chi_3$	4	0	-2	0	0	0	-2	0	1

Table des caractères du groupe $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$

2. Les extensions de C_2 et C_3 par $\mathfrak{A}_5$

Nous établissons que les groupes $\mathfrak{S}_5$ et $\mathfrak{A}_5 \times C_2$ sont les seules extensions de C_2 par $\mathfrak{A}_5$. Nous montrons également que *le groupe* $\mathfrak{A}_5 \times C_3$ *est la seule extension de* C_3 *par* $\mathfrak{A}_5$. Le sous-groupe distingué $A = \mathfrak{A}_5$ fourni au départ, dans un tel groupe G, est unique de son ordre. En effet, si H est un sous-groupe de cardinal 60 qui en est distinct, le sous-groupe $AH = HA$ est égal à G et le sous-groupe intersection $H \cap A$ est alors d'ordre $\geqslant 30$ (resp. $\geqslant 20$) pour une extension de C_2 (resp. C_3) par $\mathfrak{A}_5$; or, un tel sous-groupe n'existe pas dans le groupe simple $\mathfrak{A}_5$ (cf. exercice I-11.4, page 40), et donc $H = A$.

[2] On notera que les centralisateurs des couples sont, visons-visu, les produits directs des centralisateurs des composantes respectives.

Exercices

1. [p. 470] On s'intéresse aux possibles groupes G figurant au milieu d'une suite exacte de la forme :

$$\{1\} \longrightarrow \mathfrak{A}_5 \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} C_2 \longrightarrow \{1\}.$$

On démontre dans un premier temps qu'une telle suite exacte est forcément scindable et l'on détermine dans un second temps tous les produits semi-directs $\mathfrak{A}_5 \rtimes C_2$ possibles, sachant que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_5) = \mathfrak{S}_5$.

On suppose pour commencer que la suite exacte ci-dessus n'est pas scindable, c'est-à-dire que les éléments d'ordre 2 de G sont tous contenus dans le sous-groupe $\mathfrak{A}_5$. Montrons que cela mène finalement à une contradiction.

i) Établir que les 2-Sylow du groupe G, lesquels sont d'ordre 8, sont tous modelés selon le seul groupe $C_4 \times C_2$.

ii) Montrer que chacun des quinze éléments d'ordre 2 du groupe G est le carré de quatre éléments d'ordre 4, n'appartenant pas au sous-groupe $\mathfrak{A}_5$. En déduire que le sous-ensemble $G \backslash \mathfrak{A}_5$ est entièrement formé d'éléments d'ordre 4.

iii) Retrouver ce fait plus directement en regardant les ordres des éléments de G qui ne sont pas dans $\mathfrak{A}_5$ et ceux de leurs images par π.
Indication.– Un élément qui n'est pas dans $\mathfrak{A}_5$ aurait encore son cube en dehors de $\mathfrak{A}_5$, et s'il est d'ordre 6 son cube serait d'ordre 2. Procéder de même pour d'éventuels éléments d'ordre 10.

iv) Montrer que cela est contradictoire avec la structure des normalisateurs dans G des 3-Sylow.

On détermine maintenant les produits semi-directs de $\mathfrak{A}_5$ avec C_2.

v) On suppose que $G = \mathfrak{A}_5 \times C_2$. Quel est le centre $Z(G)$? Combien G a-t-il d'éléments d'ordre 2 ? Conclure que $\mathfrak{A}_5$ admet dans G au moins un complément autre que le centre $Z(G)$.

vi) Sachant que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$, montrer qu'il y a, à isomorphisme près, au plus deux produits semi-directs $\mathfrak{A}_5 \rtimes C_2$ non directs.

vii) Montrer enfin que le groupe G est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$ ou à $\mathfrak{A}_5 \times C_2$.

2. [p. 471] On reprend le même exercice avec les groupes G, d'ordre 180, figurant dans une suite exacte de la forme

$$\{1\} \longrightarrow \mathfrak{A}_5 \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} C_3 \longrightarrow \{1\}.$$

i) Montrer qu'une telle suite exacte est nécessairement scindable.
Indication.– Considérer le normalisateur dans G d'un de ses 5-Sylow pour trouver un complément ($\simeq C_3$) de $\mathfrak{A}_5$ dans G.

ii) Conclure que $G \simeq \mathfrak{A}_5 \times C_3$.

3. Le groupe $SL_2(\mathbb{F}_3)$

Nous allons étudier le groupe spécial linéaire des matrices $2{\times}2$ à coefficients dans le corps $\mathbb{F}_3$, de déterminant égal à 1.

Exercices

1. [p. 471] Un calcul, maintenant familier, donne 48 pour cardinal de $GL_2(\mathbb{F}_3)$; il s'ensuit aisément que $|SL_2(\mathbb{F}_3)| = 24$.

i) Montrer que $SL_2(\mathbb{F}_3)$ possède $-\mathrm{I}_2$ pour seul élément d'ordre 2.

ii) On fait opérer le groupe $SL_2(\mathbb{F}_3)$ sur les quatre droites vectorielles du plan $\mathbb{F}_3^2$. Déterminer le noyau de l'action et établir ensuite que le groupe quotient $PSL_2(\mathbb{F}_3) = SL_2(\mathbb{F}_3)/\{\pm\mathrm{I}_2\}$ est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.

iii) En déduire que le sous-groupe de Klein se remonte en un sous-groupe distingué d'ordre 8, qui est le seul 2-Sylow de $SL_2(\mathbb{F}_3)$.

iv) Montrer que ce 2-Sylow est isomorphe au groupe des quaternions $\mathbb{H}_8$, à huit éléments, et qu'il est formé dans $SL_2(\mathbb{F}_3)$ des matrices de trace nulle auxquelles on ajoute les deux matrices scalaires $\pm\mathrm{I}_2$. (Le lecteur attentif aura relevé que la trace caractérise l'ordre des matrices de $SL_2(\mathbb{F}_3)$ distinctes de $\pm\mathrm{I}_2$: les matrices de trace $1 = -2$ sont celles d'ordre 6 et les matrices de trace $-1 = 2$ sont celles d'ordre 3.)

2. [p. 472] On établit de même sans difficulté que le groupe $PGL_2(\mathbb{F}_3)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

i) Montrer que le 2-Sylow de $SL_2(\mathbb{F}_3)$ est distingué dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$.

ii) Montrer que le morphisme $f : GL_2(\mathbb{F}_3) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8)$ qui en résulte est surjectif. En déduire que $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

3. [p. 472] On se propose de dresser le treillis de $SL_2(\mathbb{F}_3)$.

i) Montrer que $SL_2(\mathbb{F}_3)$ admet quatre 3-Sylow.

ii) Montrer que le groupe $SL_2(\mathbb{F}_3)$ ne possède aucun $\mathfrak{S}_3$ ni aucun sous-groupe d'ordre 12.

iii) Montrer que $SL_2(\mathbb{F}_3)$ possède quatre C_6.

iv) Dessiner le G-treillis nivelé de $SL_2(\mathbb{F}_3)$, et constater que $SL_2(\mathbb{F}_3)$ est isomorphe au produit semi-direct interne $\mathbb{H}_8 \overset{i}{\rtimes} C_3$. Montrer plus précisément qu'il n'existe qu'un seul produit semi-direct externe non trivial de $\mathbb{H}_8$ par C_3.

4. [p. 473] Soit G le groupe défini comme suit par générateurs et relations :

$$G = \langle\, a, b \mid a^3 = b^3 = 1,\ bab = aba \,\rangle. \qquad (1)$$

Nous allons étudier ce groupe sans faire appel à aucun des résultats précédents. On démontrera alors qu'il est produit semi-direct interne de $\mathbb{H}_8$ par C_3 et l'on établira par ailleurs que $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8)$ *est isomorphe à* $\mathfrak{S}_4$, sans passer par $GL_2(\mathbb{F}_3)$. Ce groupe G sera donc isomorphe a posteriori au groupe $SL_2(\mathbb{F}_3)$! Fort de cela, nous chercherons deux générateurs A et B de ce dernier groupe qui vérifient les relations définissant G.

i) En supposant que a et b sont effectivement d'ordre 3, montrer que l'élément $\alpha = ab$ est d'ordre 6. On pose $H = \langle \alpha \rangle$; déterminer les classes *à droite* de H (on appliquera l'algorithme de Todd-Coxeter[3], suivant le sous-groupe H, correspondant à la présentation de G). En déduire que le groupe G est d'ordre 24 au plus.

ii) Construire le graphe de Cayley de G associé à la présentation (1).
Indication.– Utiliser que ab est d'ordre 6 pour disposer circulairement les douze éléments intervenant dans $(ab)^6$.

iii) Utiliser le graphe de Cayley ci-dessus pour déterminer l'ordre des vingt-quatre éléments de G. Constater que G n'admet qu'un seul sous-groupe d'ordre 2. Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 1, 2, 4, 8 ? En déduire le nombre et le type des 2-Sylow de G.

iv) Déterminer le nombre de 3-Sylow de G. Conclure que $G \simeq \mathbb{H}_8 \rtimes C_3$, unique produit semi-direct non trivial de $\mathbb{H}_8$ par C_3, et dessiner le treillis de ses sous-groupes. (On se reportera à l'exercice suivant où l'on propose une nouvelle façon de déterminer le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8)$.)

v) Donner deux matrices $A, B \in SL_2(\mathbb{F}_3)$ satisfaisant la présentation de G.

5. [p. 476] On se propose dans cet exercice de montrer, sans passer[4] par le groupe $GL_2(\mathbb{F}_3)$, que $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8) \simeq \mathfrak{S}_4$.

i) Montrer que le groupe $\mathbb{H}_8$ se définit par la présentation suivante :

$$\mathbb{H}_8 = \langle a, b \mid a^4 = b^4 = 1,\ b^2 = a^2,\ bab^{-1} = a^{-1} \rangle.$$

On dessinera à cet effet le graphe de Cayley de cette présentation.

ii) Soit $f : \mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8) \to \mathfrak{S}_3$ le morphisme résultant de l'action naturelle du groupe des automorphismes de $\mathbb{H}_8$ sur les trois sous-groupes C_4 de $\mathbb{H}_8$. Montrer que f est surjective.

iii) Montrer que $\ker f = \mathrm{Int}(\mathbb{H}_8)$. En déduire que $\mathrm{card}\big(\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8)\big) = 24$.

iv) Montrer qu'il n'y pas d'automorphisme de $\mathbb{H}_8$ d'ordre 6. En déduire alors, en invoquant l'exercice I-15.8, page 60, que $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8) \simeq \mathfrak{S}_4$.

---

[3]Le lecteur qui ignore cet algorithme le découvrira, avec ses applications, dans le corrigé du présent exercice.

[4]Comme dans l'exercice XII-3.2, page 329.

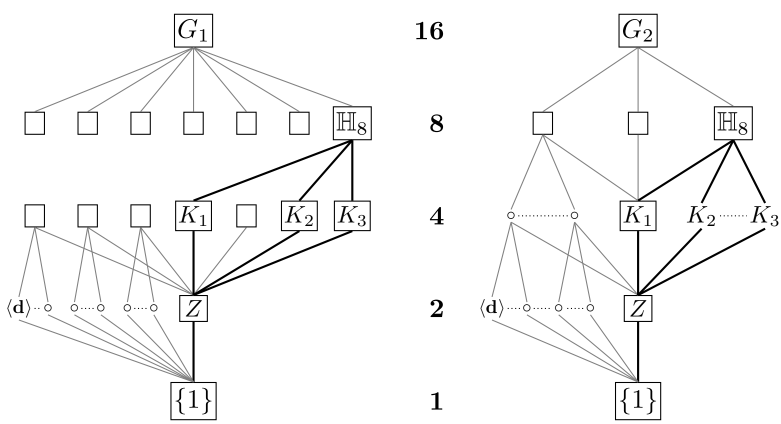
6. [p. 477] i) Montrer que si K_1 et K_2 sont deux sous-groupes conjugués de $\mathrm{Aut}(G)$, les produits semi-directs tautologiques $G \rtimes K_1$ et $G \rtimes K_2$ sont isomorphes.

Indication.– Montrer que ces deux produits semi-directs sont en fait conjugués dans l'holomorphe $\mathrm{Hol}(G)$ de G.

ii) On forme le produit semi-direct externe tautologique de $\mathbb{H}_8$ issu de l'un ou l'autre de ses neuf automorphismes d'ordre 2. Montrer que l'on obtient à isomorphisme près deux groupes G_1 et G_2 d'ordre 16 distincts, non isomorphes à $\mathbb{H}_8 \times C_2$ et que dans chacun d'eux il y a une seule copie de $\mathbb{H}_8$.

iii) Comment voit-on sans effort sur les treillis des groupes G_1 et G_2 donnés ci-après de quelle action relève l'un ou l'autre de ces deux groupes ?

Indication.– Les automorphismes d'ordre 2 de $\mathbb{H}_8$ se répartissent en deux classes de conjugaison. Un automorphisme d'ordre 2 ou bien laisse les trois C_4 de $\mathbb{H}_8$ invariants, ou bien en permute deux et laisse le troisième invariant. Une fois que l'on a identifié $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8)$ au groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$, les premiers automorphismes d'ordre 2 correspondent aux double-transpositions et les seconds correspondent aux transpositions. On voit que l'action par conjugaison des éléments d'ordre 2 de G_1 sur les sous-groupes K_1, K_2 et K_3 isomorphes à C_4 du premier treillis est triviale, car ces trois sous-groupes d'ordre 4 sont distingués dans G_1. Pour l'autre, l'un est laissé invariant[5] par l'élément d d'ordre 2, car il est distingué dans G_2, et les deux autres sont échangés sous l'action, car on disposerait dans le cas contraire d'un sous-groupe $\langle d\rangle K_2 = K_2\langle d\rangle$ d'ordre 8, qui serait le $\sup(\langle d\rangle, K_2)$, ce qui n'est pas.



iv) Détecter lequel de ces 2-groupes est le modèle des 2-Sylow de $GL_2(F_3)$.

[5] Il s'agit évidemment du sous-groupe appelé K_1.

7. [p. 478] Un groupe d'ordre 24 admet un ou quatre 3-Sylow. Sur les quinze groupes d'ordre 24, douze ont leur 3-Sylow distingué. Dans l'exercice qui suit, on s'emploiera à déterminer les trois groupes d'ordre 24 restants, qui ont donc quatre 3-Sylow. Nous verrons qu'il s'agit du groupe $SL_2(\mathbb{F}_3)$, que l'on a étudié plus haut, mais évidemment aussi des groupes $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_4 \times C_2$. Cet exercice aurait pu trouver sa place bien plus tôt, mais l'on a choisi de le placer par simple convenance après l'étude qui vient d'être faite du groupe $SL_2(\mathbb{F}_3)$.

Soit G un groupe d'ordre 24 admettant quatre 3-Sylow. Soit $f : G \to \mathfrak{S}_4$ le morphisme résultant de l'action de G par conjugaison sur ses 3-Sylow.

i) Montrer que $Z(G) \subset \ker f$ et que le cardinal de $\ker f$ divise l'entier 6.
ii) Montrer que le cardinal de $\ker f$ ne peut valoir ni 3 ni 6.

Il est évident que si $\mathrm{card}(\ker f) = 1$, alors $G \simeq \mathfrak{S}_4$, on pourra en consulter le treillis en B-8, page 559. On supposera désormais que ce cardinal vaut 2.

iii) Montrer alors que $\ker f = Z(G)$ et que $G/Z(G) \simeq \mathfrak{A}_4$.
iv) En déduire que G admet un unique 2-Sylow, que l'on notera H. Montrer que H est isomorphe au groupe $\mathbb{H}_8$ ou au groupe C_2^3.
Indication.– Remonter dans G le sous-groupe de Klein de $\mathfrak{A}_4$, ainsi que la classe de conjugaison de ses trois sous-groupe d'ordre 2.
v) Montrer que si $H \simeq \mathbb{H}_8$, alors G est isomorphe à $SL_2(\mathbb{F}_3)$.
vi) On suppose à partir de maintenant que $H \simeq C_2^3$. En faisant opérer G sur les sept sous-groupes C_2^2 de H, montrer que l'un d'eux au moins est distingué dans G, sous-groupe que l'on notera K.
vii) Montrer que G/K est isomorphe à C_6. En déduire que G a un sous-groupe A d'ordre 12, qui contient forcément les quatre 3-Sylow de G. En déduire que $A \simeq \mathfrak{A}_4$.
viii) Conclure que G est isomorphe à $\mathfrak{A}_4 \times C_2$.

4. Le groupe $SL_2(\mathbb{F}_5)$

Restons avec les sous-groupes des groupes linéaires en nous intéressant au groupe $GL_2(\mathbb{F}_5)$, et plus spécialement à son sous-groupe $SL_2(\mathbb{F}_5)$ des matrices de déterminant 1. On montrera entre autres que $PSL_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_5$, et est donc un groupe simple[6].

L'approche proposée ici consiste à accorder une attention particulière au sous-groupe des matrices monomiales de $GL_2(\mathbb{F}_5)$, lequel offre un représentant privilégié des 2-Sylow de ce groupe. Rappelons qu'une matrice de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ est *monomiale* si tous les coefficients d'une même ligne et d'une même colonne sont nuls à l'exception d'un seul (cf. V-5, page 180).

[6] Le mathématicien pressé pensera les choses autrement, en invoquant le fait que tous les groupes $PSL_2(\mathbb{F}_q)$, à l'exception de $SL_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$ et $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$, sont simples. Comme $PSL_2(\mathbb{F}_5)$ est de cardinal 60, il est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_5$.

Exercices

1. [p. 480] Considérons, dans $GL_2(\mathbb{F}_5)$, le sous-groupe $\mathfrak{M}$ des matrices monomiales de déterminant 1.

i) Dénombrer le nombre d'éléments de $GL_2(\mathbb{F}_5)$, celui de $G = SL_2(\mathbb{F}_5)$ et, enfin, celui de $\mathfrak{M}$. Lister les éléments de $\mathfrak{M}$, et en calculer le carré. En déduire le type d'isomorphie du sous-groupe $\mathfrak{M}$, et conclure que G n'a qu'un seul sous-groupe d'ordre 2, en l'occurrence son centre.

ii) Examinons les matrices d'ordre 4. Montrer qu'elles sont toutes semblables à la matrice diagonale $D = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ dans $GL_2(\mathbb{F}_5)$, mais également aussi dans G. Déterminer l'ordre du centralisateur $Z_G(D)$. En déduire qu'il y a trente matrices d'ordre 4 dans G.

On examine ci-après les 2-Sylow, en montrant en particulier que $n_2(G)=5$.

iii) Combien le groupe G peut-il avoir de 2-Sylow ? Montrer que le normalisateur $N_G(\mathfrak{M})$ est d'ordre 24 —on pourra montrer qu'il contient $\mathfrak{M}$ et une matrice d'ordre 3 que l'on choisira en consultant en D-1, page 648, le treillis de $G = SL_2(\mathbb{F}_5)$—, et donc que G admet cinq 2-Sylow.

iv) Faire agir G par conjugaison sur l'ensemble de ses 2-Sylow. En déduire un morphisme $f : G \to \mathfrak{S}_5$, et en déterminer le noyau. Conclure à la simplicité du groupe $PSL_2(\mathbb{F}_5)$ $(= G/Z(G) \simeq \mathfrak{A}_5)$.

Continuons l'étude du groupe $SL_2(\mathbb{F}_5)$, en déterminant les classes de conjugaison de ses éléments. Pour cela, et pour apprendre à lire dans un treillis nivelé, nous allons déterminer ces classes à partir du treillis des sous-groupes de $SL_2(\mathbb{F}_5)$, situé en D-1, page 648, et considéré comme acquis.

2. [p. 482] i) Montrer que les éléments d'ordre 3 de $G = SL_2(\mathbb{F}_5)$ forment une seule classe de conjugaison, et qu'il en est de même des éléments d'ordre 6.

ii) Montrer que les éléments d'ordre 5 de G forment deux classes de conjugaison, et qu'il en est de même pour les éléments d'ordre 10.

iii) Déterminer les classes de conjugaison des éléments d'ordre 1, 2 et 4. Y a-t-il d'autres ordres possibles que ceux rencontrés ?

5. Le groupe $GL_3(\mathbb{F}_2)$

Dans les sept exercices qui suivent, on va étudier le groupe $GL_3(\mathbb{F}_2)$ groupe linéaire des matrices 3×3 inversibles à coefficients dans $\mathbb{F}_2$, le corps à deux éléments. On va dégager certaines de ses propriétés ; en particulier, on va montrer que $GL_3(\mathbb{F}_2)$ *est un groupe simple.* C'est, par ordre croissant, le deuxième groupe simple après le célèbre $\mathfrak{A}_5$ d'ordre 60, dont nous avions montré la simplicité dans l'exercice I-8.4. Remarquons qu'à cause du corps de base à deux éléments, l'application déterminant est triviale sur $GL_n(\mathbb{F}_2)$, et l'ensemble des matrices scalaires est réduit à l'élément neutre. Nous avons donc pour tout $n \geqslant 2$: $GL_n(\mathbb{F}_2) = SL_n(\mathbb{F}_2) = PGL_n(\mathbb{F}_2) = PSL_n(\mathbb{F}_2)$. On montre (voir par exemple [1], AII, p.208, ex.14) que les groupes $PSL_n(\mathbb{F}_q)$ sont tous simples, à l'exception de $PSL_2(\mathbb{F}_2)$, qui est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$, et de $PSL_2(\mathbb{F}_3)$, isomorphe à $\mathfrak{A}_4$. Dans le cas présent, $GL_3(\mathbb{F}_2) = PSL_3(\mathbb{F}_2)$ est bien un groupe simple. Ici, nous allons montrer directement que $GL_3(\mathbb{F}_2)$ est simple, en appliquant la même méthode que celle utilisée pour $\mathfrak{A}_5$ dans l'exercice cité ci-dessus.

Exercices

1. [p. 484] Revenons à l'étude de $GL_3(\mathbb{F}_2)$. Commençons par quelques dénombrements.

i) Calculer l'ordre de $G = GL_3(\mathbb{F}_2)$.

ii) Indiquer combien G peut contenir de 3-Sylow.

iii) Construire une matrice A d'ordre 3 de G ; en déterminer les polynômes caractéristique χ_A et minimal μ_A. En déduire que A est une matrice cyclique[7]. Calculer son commutant et son centralisateur $Z_G(A)$. Conclure que G admet cinquante-six éléments d'ordre 3, tous conjugués. Comparer au résultat obtenu en ii) pour les 3-Sylow de G.

iv) Supposons maintenant qu'il existe dans G une matrice A d'ordre 4. Déterminer quels seraient les polynômes caractéristique χ_A et minimal μ_A. En déduire que A serait cyclique. Montrer qu'il existe bien une matrice d'ordre 4 dans G (on pourra en exhiber une, par exemple une matrice compagnon). Calculer son commutant et son centralisateur. Conclure que G admet quarante-deux éléments d'ordre 4, tous conjugués.

2. [p. 485] Intéressons-nous maintenant aux éléments d'ordre 7 du groupe linéaire $G = GL_3(\mathbb{F}_2)$.

i) Soit $A \in G$ une matrice d'ordre 7. Déterminer son polynôme minimal μ_A et son polynôme caractéristique χ_A.

ii) Exhiber deux matrices A et B d'ordre 7 dans G telles que $AB \neq BA$, et donc telles que $\langle A \rangle \neq \langle B \rangle$ (penser aux matrices compagnons).

iii) Montrer que G admet huit 7-Sylow et donc quarante-huit éléments d'ordre 7.

---

[7]Une matrice est dite cyclique si son polynôme minimal est égal à son polynôme caractéristique. Cela équivaut à dire qu'il existe $V \in \mathbb{F}_2^3$ tel que (V, AV, A^2V) est une base de $\mathbb{F}_2^3$, dans laquelle la matrice de l'endomorphisme défini par A est la matrice compagnon de son polynôme caractéristique. La matrice A est donc semblable à une matrice compagnon. C'est encore équivalent à dire que son commutant $\big($l'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{F}_2)$ qui commutent avec $A\big)$ est l'algèbre des polynômes en A, c'est-à-dire $\mathbb{F}_2[A]$ et que son centralisateur $Z_{GL_3(\mathbb{F}_2)}(A)$ est exactement $\mathbb{F}_2[A]^\times$, l'ensemble des matrices inversibles de son commutant. Voir par exemple [15], chap. 6, page 59.

3. [p. 486] Dans cet exercice, nous allons montrer que $GL_3(\mathbb{F}_2)$ *est un groupe simple*. On utilisera les dénombrements obtenus dans les exercices précédents. Rappelons-les : quarante-huit éléments d'ordre 7, cinquante-six d'ordre 3 et quarante-deux d'ordre 4.

i) Si G est un groupe fini et H un sous-groupe distingué, montrer que tout élément x d'ordre premier avec $[G : H]$ est dans H.

ii) Appliquer la question précédente pour montrer que $G = GL_3(\mathbb{F}_2)$ ne peut pas admettre de sous-groupe strict distingué non trivial, sauf peut-être d'ordre 4 ou d'ordre 2.

iii) Montrer que $GL_3(\mathbb{F}_2)$ ne peut pas admettre de sous-groupe distingué d'ordre 2 (qui serait alors central), ou d'ordre 4 (le quotient serait d'ordre $42 = 7\times3\times2$ et admettrait un sous-groupe de Sylow distingué non trivial, voir l'exercice III-11.1, page 124).

4. [p. 487] Dans cet exercice, on poursuit l'étude du groupe simple $GL_3(\mathbb{F}_2)$ en s'interrogeant sur l'existence de sous-groupes de grandes tailles et sur l'injection possible de $GL_3(\mathbb{F}_2)$ dans des groupes de permutations.

i) Montrer que $G = GL_3(\mathbb{F}_2)$ ne peut avoir de sous-groupe d'ordre strictement supérieur à 24 (pour un sous-groupe H donné, on considérera l'action de $GL_3(\mathbb{F}_2)$ sur les classes à gauche de H).

ii) Pour cette question, on admet que $GL_3(\mathbb{F}_2)$ possède un sous-groupe d'ordre 24. Montrer que $GL_3(\mathbb{F}_2)$ s'injecte dans $\mathfrak{A}_7$ parmi une classe de conjugaison de quinze sous-groupes. En revanche, montrer que $GL_3(\mathbb{F}_2)$ ne s'injecte ni dans $\mathfrak{S}_6$ ni dans $\mathfrak{A}_6$.

5. [p. 487] Dans cet exercice, on va poursuivre l'étude du groupe $GL_3(\mathbb{F}_2)$, en montrant qu'il admet deux classes de conjugaison distinctes de sept sous-groupes isomorphes à $\mathfrak{S}_4$.

i) Faisons agir $G = GL_3(\mathbb{F}_2)$ de manière naturelle sur les sept plans de l'espace vectoriel $\mathbb{F}_2^3$. Déterminer l'orbite et le stabilisateur S du plan xOy (c'est-à-dire des points dont la troisième coordonnée est nulle).

ii) Montrer que S agit transitivement sur l'ensemble $\mathcal{P}$ formé des quatre points n'appartenant pas au plan stabilisé par S. Montrer que le morphisme induit $f : S \to \mathfrak{S}_4$ est injectif. En déduire que $S \simeq \mathfrak{S}_4$.

iii) Considérons maintenant l'action naturelle de $GL_3(\mathbb{F}_2)$ sur les sept vecteurs non nuls de $\mathbb{F}_2^3$. Déterminer l'orbite et le stabilisateur R de $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$. Montrer que la transposition des matrices de $GL_3(\mathbb{F}_2)$ est une bijection entre les stabilisateurs R et S (défini en i). En déduire que $R \simeq \mathfrak{S}_4$.

iv) Montrer que S (défini en i) ne peut pas être le stabilisateur d'un vecteur non nul de $\mathbb{F}_2^3$. En déduire que S et R sont dans deux classes de conjugaison distinctes et de sept éléments chacune.

6. [p. 489] Dans cet exercice, on va caractériser les 2-Sylow de $G = GL_3(\mathbb{F}_2)$ et montrer qu'ils sont isomorphes à D_4 ; on montrera ensuite qu'il n'y a pas d'autre classe de conjugaison de sous-groupes d'ordre 24 que les deux exhibées dans l'exercice précédent (XII-5.5, page 335), où l'on avait d'ailleurs montré que ces sous-groupes d'ordre 24 étaient isomorphes à $\mathfrak{S}_4$.

i) Considérons le sous-groupe $T = T_3(\mathbb{F}_2)$, des matrices triangulaires supérieures de G. Quel est son ordre ? En déduire que T est un 2-Sylow de G. En se souvenant que G contient des sous-groupes isomorphes à $\mathfrak{S}_4$, déterminer la classe d'isomorphie des 2-Sylow de G ainsi que leur nombre.

ii) Montrer que G admet vingt-et-un éléments d'ordre 2, tous conjugués.

iii) Dessiner et justifier le treillis nivelé par éléments du sous-groupe T des matrices triangulaires supérieures.

iv) Dans le 2-Sylow des matrices triangulaires supérieures T, les deux sous-groupes V_1 et V_2 isomorphes à C_2^2 ne sont pas conjugués dans T. Montrer que V_1 et V_2 ne sont pas non plus conjugués dans G, ce qui revient à montrer que l'on ne peut pas trouver de matrice $M \in GL_3(\mathbb{F}_2)$, telle que $V_2 = MV_1M^{-1}$. En déduire qu'il y a dans G, exactement deux classes de conjugaison de sous-groupes isomorphes à C_2^2.

v) Montrer que dans G il y a exactement deux classes de conjugaison de sous-groupes d'ordre 24, ainsi que deux classes de conjugaison de sous-groupes isomorphes à $\mathfrak{A}_4$ (on pourra utiliser le résultat de l'exercice I-15.8, page 60, montrant qu'un groupe d'ordre 24 n'ayant pas d'élément d'ordre 6 est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$).

7. [p. 492] Dans cet exercice, nous allons montrer que $G = GL_3(\mathbb{F}_2)$ est engendré par deux éléments, l'un quelconque d'ordre 7 et l'autre quelconque d'ordre 2. Pour conclure sur une présentation correspondante, nous en tracerons le graphe de Cayley.

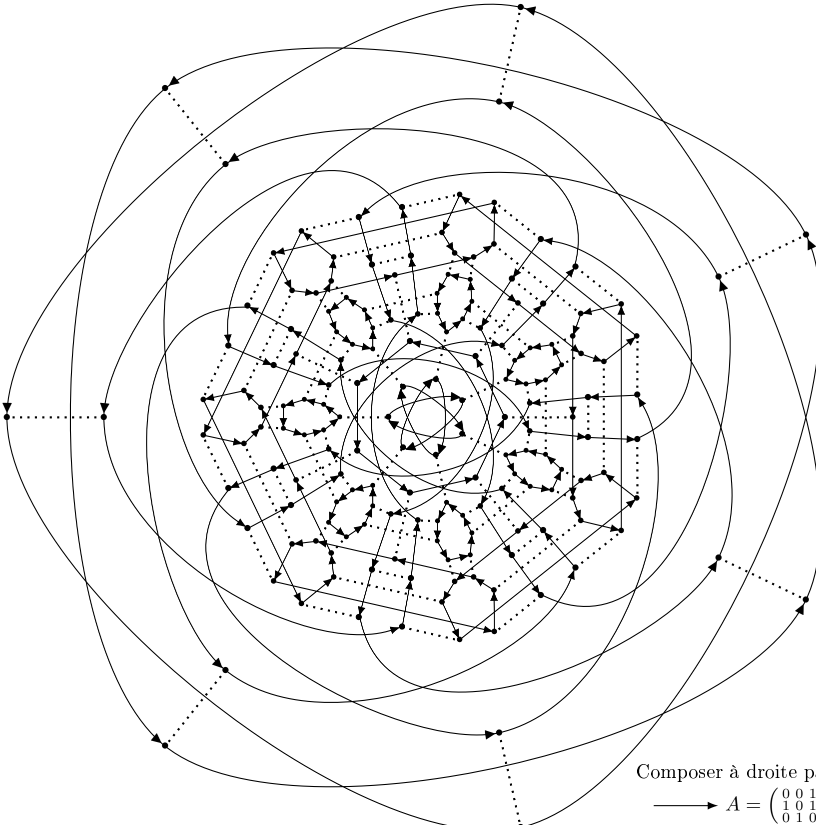
i) Montrer que G n'a pas de sous-groupe d'ordre 14. En déduire que deux éléments quelconques d'ordres respectifs 7 et 2 engendrent G.

Choisissons par exemple $A = \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 1&0&1\\ 0&1&0 \end{pmatrix}$ d'ordre 7, matrice compagnon du polynôme X^3+X+1, puis $B = \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ matrice de transposition des deux premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{F}_2^3$, donc d'ordre 2, et bien sûr I_3 la matrice identité.

ii) Montrer que les ordres de AB et de A^2B sont respectivement 4 et 3. Cela fait quatre relations entre les générateurs A et B :

$$(1)\ A^7 = \mathrm{I}_3, \quad (2)\ B^2 = \mathrm{I}_3, \quad (3)\ (AB)^4 = \mathrm{I}_3, \quad (4)\ (A^2B)^3 = \mathrm{I}_3.$$

Montrer que les relations obtenues par les ordres de A^iB, $3 \leqslant i < 7$ sont conséquences des quatre relations ci-dessus.



Composer à droite par

$\longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\cdots\cdots\cdots B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Graphe de Cayley de $GL_3(\mathbb{F}_2)$

$\left\langle\, A, B \mid A^7 = \mathrm{I}_3,\ B^2 = \mathrm{I}_3,\ (AB)^4 = \mathrm{I}_3,\ (A^2B)^3 = \mathrm{I}_3 \,\right\rangle$

On a donc un groupe de présentation :

$$\mathcal{G} = \left\langle\, a, b \mid a^7 = 1,\ b^2 = 1,\ (ab)^4 = 1,\ (a^2b)^3 = 1 \,\right\rangle.$$

Les relations entre les générateurs a, b du groupe $\mathcal{G}$ sont satisfaites par les matrices A et B de G : comme cela nous est familier depuis un moment[8], il existe donc un morphisme $f : \mathcal{G} \to G$ tel que $f(a) = A$ et $f(b) = B$. Comme A et B engendrent G, f est surjectif. On est donc sûr que le groupe $GL_3(\mathbb{F}_2)$ est le quotient $\mathcal{G}/\ker f$. Pour se convaincre que f est un isomorphisme, on peut dessiner le graphe de Cayley de cette présentation (voir le graphe ci-dessus[9]) et constater que le graphe a bien cent soixante-huit nœuds, montrant que f est bijectif, autrement dit $\mathcal{G} \xrightarrow[\simeq]{f} GL_3(\mathbb{F}_2)$.

[8] C'est toujours la proposition III-10.4, page 120.

[9] On remarque que de chaque nœud part une flèche simple et y arrive une autre pour le générateur A, ainsi qu'un lien pointillé pour le générateur B d'ordre 2. D'autre part, si de chaque nœud on déroule une quelconque des quatre relations, on construit un chemin qui revient au point de départ.

Remarque. Tout ce que nous venons de montrer dans les exercices précédents se voit et se retrouve, bien entendu, sur le treillis des sous-groupes de $G = GL_3(\mathbb{F}_2)$, situés en D-1, page 650.

- ▷ *Le centralisateur d'un élément d'ordre 3.* Soit x un élément d'ordre 3, il engendre le 3-Sylow $\langle x \rangle \simeq C_3$. Sur le treillis, on voit que le nœud $\langle x \rangle$ est contenu dans cinq sous-groupes de G (autant que d'arêtes montantes à partir du nœud $\langle x \rangle$). Il y a deux flèches allant vers des sous-groupes isomorphes à $C_7 \rtimes_u C_3$, d'ordre 21, deux autres vers des sous-groupes isomorphes à $\mathfrak{A}_4$, d'ordre 12, et une dernière vers un sous-groupe isomorphe à D_3, d'ordre 6. Ces trois types de groupes ont tous un centre trivial, donc aucun de ces groupes ne peut être contenu dans le centralisateur $Z_G(x)$, qui est donc $\langle x \rangle$ lui-même.
- ▷ *Le centralisateur d'un élément d'ordre 4.* On repère facilement les éléments d'ordre 4, car ils engendrent des sous-groupes isomorphes à C_4. Soit y l'un d'eux. On constate que du nœud $\langle y \rangle$ ne part qu'une seule flèche montant vers un sous-groupe isomorphe à D_4, dans lequel $\langle y \rangle$ est distingué, mais pas central. Ici encore, le centralisateur $Z_G(y)$ est donc le sous-groupe $\langle y \rangle$ lui-même. L'élément y appartient donc à une classe de conjugaison d'éléments dont le cardinal est de $168/4 = 42$ éléments. En revanche, le normalisateur $N_G(\langle y \rangle)$ contient le 2-sous-groupe de Sylow, isomorphe à D_4 et contenant $\langle y \rangle$. De ce nœud D_4 partent deux flèches montantes allant vers deux sous-groupes isomorphes à $\mathfrak{S}_4$, dans lequel un sous-groupe cyclique d'ordre 4 n'est pas distingué. Ainsi, le normalisateur $N_G(\langle y \rangle)$ est donc exactement le 2-sous-groupe de Sylow contenant $\langle y \rangle$. La classe de conjugaison du sous-groupe $\langle y \rangle$ est alors de cardinal $168/8 = 21$.
- ▷ *le centralisateur d'un élément d'ordre 7 et le normalisateur d'un 7-Sylow.* Depuis un 7-Sylow, qui est isomorphe à C_7, ne monte qu'une seule flèche vers un sous-groupe isomorphe à $C_7 \rtimes_u C_3$, dont le centre est trivial. Le centralisateur d'un élément d'ordre 7 est donc le 7-Sylow qu'il engendre. Chaque classe de conjugaison a donc $168/7 = 24$ éléments. Comme il y a quarante-huit éléments d'ordre 7, on retrouve les deux classes de conjugaison déterminées en XII-5.2, page 334. En revanche, le 7-Sylow, isomorphe à C_7, est distingué dans $C_7 \rtimes_u C_3$ et de ce sous-groupe part une seule flèche vers le groupe G en entier. Comme le 7-Sylow n'est pas distingué, G ne peut être son normalisateur. Ainsi, le sous-groupe $C_7 \rtimes_u C_3$ est le normalisateur du 7-Sylow. On retrouve bien une classe de conjugaison de $168/21 = 8$ sous-groupes d'ordre 7.
- ▷ *le cartouche D-1, page 650,(en bas à droite du treillis).* Toutes ces informations sont consignées dans le cartouche, dont le contenu est expliqué en B-1, page 499. La première ligne concerne les éléments du groupe ; leur nombre : 168, puis le nombre de classes de conjugaison : 6 qui sont

donc, comme on vient de le voir, une classe pour le neutre, une classe pour les éléments d'ordre 2, une pour les éléments d'ordre 3, une pour les éléments d'ordre 4 et enfin deux pour les éléments d'ordre 7, soit six classes au total.

▷ *Le groupe $GL_3(\mathbb{F}_2)$ est un groupe simple.* Le fait que sur le treillis les seuls nœuds encadrés sont le groupe G lui-même et le trivial indique, avec notre convention graphique, que le groupe est simple.

▷ *Le groupe G n'a pas de sous-groupe d'ordre > 24, et admet deux classes de conjugaison de sous-groupes d'ordre 24, isomorphes à $\mathfrak{S}_4$.*
La simple lecture du treillis confirme ces affirmations.

▷ *Les 2-Sylow sont isomorphes à D_4 et chacun est le centralisateur d'un élément d'ordre 2.* Ici encore, on repère facilement les sous-groupes d'ordre 8, qui sont donc les 2-Sylow de G. Ils sont isomorphes à D_4, qui admet un élément central d'ordre 2. Chaque 2-Sylow est donc contenu dans le centralisateur de son élément central. Enfin, de chaque 2-Sylow montent deux flèches vers des sous-groupes isomorphes à $\mathfrak{S}_4$, dont le centre est trivial. Ils ne peuvent donc être les centralisateurs d'aucun de leurs éléments. Comme chaque élément d'ordre 2 est le carré d'un élément d'ordre 4 (chacun est le sous-groupe d'ordre 2 d'un sous-groupe C_4), il est dans le centre du 2-Sylow contenant ce C_4. Ce qui montre que le centralisateur de tout élément d'ordre 2 est le 2-Sylow contenant le sous-groupe C_4 dont il est le carré. Il y a donc une classe de conjugaison de $168/8 = 21$ éléments d'ordre 2. Comme dans G, il n'y a que vingt-et-un éléments d'ordre 2, ceux-ci sont tous dans la même classe.

Le treillis des sous-groupes de G contient ainsi, d'une manière condensée, parfois touffue, un grand nombre de propriétés du groupe.

6. Le groupe $C_7 \rtimes_u C_3$, seul groupe non abélien d'ordre 21

Dans cet exercice, on va montrer que $C_7 \rtimes_u C_3$, premier groupe non commutatif d'ordre impair, se réalise dans le groupe linéaire $GL_3(\mathbb{F}_2)$, et y apparaît comme le normalisateur de l'un quelconque des 7-Sylow de $GL_3(\mathbb{F}_2)$. L'exercice précédent (XII-5.4, page 335) a montré que $GL_3(\mathbb{F}_2)$ admet tous ses sous-groupes stricts d'ordre $\leqslant 24$) nous permettra alors de conclure que le plus petit groupe de permutations (paires ou impaires) dans lequel $C_7 \rtimes_u C_3$ se réalise est le groupe alterné $\mathfrak{A}_7$.