

Table des matières

I. Définitions et rappels

1. Groupes	1
2. Sous-groupes	3
3. Sous-groupes particuliers	5
4. Morphisme de groupes	6
5. Ordre d'un groupe, d'un sous-groupe et d'un élément	9
6. Relation d'équivalence modulo un sous-groupe	11
7. Quotient par un sous-groupe	13
8. Usage du quotient	19
9. Le produit direct	23
10. Le groupe des automorphismes	27
11. Actions de groupes	32
12. Isométries du plan affine euclidien et triangles équilatéraux	42
13. Compléments sur les morphismes de groupes	50
14. Groupes abéliens de type fini	53
15. Les théorèmes de Sylow	55

II. Treillis des sous-groupes

1. Treillis et treillis nivelé	63
2. Treillis des sous-groupes d'un groupe	67
3. Images directe et réciproque des sous-groupes par un morphisme	69
4. Autres propriétés des fonctions images directe et réciproque	74
5. Le théorème du treillis-quotient	76
6. Interprétation en termes de treillis	77
7. Le premier théorème d'isomorphisme	78
8. Le deuxième théorème d'isomorphisme	80
9. Le troisième théorème d'isomorphisme	82
10. Le théorème de Zassenhaus ou lemme du papillon	84
11. Exemple d'isomorphisme de treillis nivelés	85
12. G -treillis nivelés des sous-groupes de G	87
13. Les p -sous-groupes de Sylow	89

14. Le lemme de Frattini	93
15. La correspondance de Galois	94
16. Autres applications entre treillis	96

III. Exemples de treillis de sous-groupes

1. Un exemple simple : le groupe cyclique d'ordre p	99
2. Le groupe cyclique d'ordre p^2	101
3. Le groupe cyclique d'ordre p^m	102
4. Les sous-groupes maximaux	105
5. Le groupe cyclique C_n	107
6. L'espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbb{F}_p	109
7. Les groupes abéliens finis	111
8. Le groupe diédral D_3	112
9. Autres groupes non commutatifs d'ordre 6	115
10. Générateurs et relations, présentation	117
11. Les groupes d'ordre pq , avec $p < q$ premiers	122
12. Que déduire du treillis nivelé d'un groupe?	125

IV. Graphes de Cayley

1. Les graphes de Cayley	135
2. Le groupe cyclique C_n	140
3. Le groupe diédral D_3	140
4. Ajout d'une relation	142
5. Graphe de Cayley d'un produit direct	143
6. Les groupes diédraux D_n et D_∞	144
7. Le groupe des quaternions	147
8. Les groupes de permutations	148
9. Les groupes de Coxeter	152
10. Le groupe \mathfrak{S}_4 comme groupe de Coxeter	155
11. Une autre présentation de Coxeter de \mathfrak{S}_4	158

V. Produits directs et semi-directs

1. Produits de sous-groupes	161
2. Compléments d'un sous-groupe distingué	164
3. Scindages et compléments	166
4. Produit semi-direct externe	167
5. Produits semi-directs internes vus comme semi-directs externes	175
6. Le produit en couronne	177
7. Treillis des sous-groupes d'un produit semi-direct interne	181
8. Produit direct interne	184
9. Sous-groupes rectangles	187
10. Produit cartésien de treillis	189
11. Relations de distinction	190

VI. Le produit semi-direct amalgamé	
1. Produit semi-direct amalgamé	193
2. Exemples de produits semi-directs amalgamés	197
3. Extension de groupes	204
4. Générateurs et relations	207
VII. Groupes résolubles et nilpotents	
1. Groupes résolubles	213
2. Les suites de Jordan-Hölder	218
3. Groupes nilpotents	224
4. Tableau panoramique	236
VIII. Le Frattini $\Phi(G)$ de G	
1. Définitions et premières propriétés	240
2. Cas des groupes nilpotents	241
IX. Treillis des groupes commutatifs finis	
1. La notion de dual d'un groupe abélien fini	253
2. Un groupe abélien fini et son dual ont même cardinal	256
3. Orthogonalité dans le dual	257
4. Exemples de calcul de l'orthogonal	262
5. Les sous-groupes orthogonaux à eux-mêmes	263
X. Procédés de construction de groupes	
1. L'ensemble $\text{Hom}(G, H)$	266
2. Associativité à droite du produit semi-direct	273
3. Isomorphisme entre produits semi-directs	275
4. Exemple de construction de produits semi-directs	285
XI. Promenade au pays des treillis	
1. Premiers pas	291
2. Quelques exercices classiques pour démarrer	294
3. Quelques groupes particuliers	296
4. Les groupes d'ordre p^3	303
5. Quand un p -groupe possède un unique sous-groupe d'ordre p	307
6. Quand tous les sous-groupes sont distingués	314
7. Le G -treillis nivelé n'est pas équivalent au groupe	319

XII. Quelques problèmes

1. Le produit direct $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$	325
2. Les extensions de C_2 et C_3 par \mathfrak{A}_5	327
3. Le groupe $SL_2(\mathbb{F}_3)$	329
4. Le groupe $SL_2(\mathbb{F}_5)$	332
5. Le groupe $GL_3(\mathbb{F}_2)$	333
6. Le groupe $C_7 \rtimes_u C_3$, seul groupe non abélien d'ordre 21	339
7. Groupes de matrices triangulaires	340

Annexe A. Solutions

Exercices du chapitre I	347
Exercices du chapitre II	376
Exercices du chapitre III	378
Exercices du chapitre IV	387
Exercices du chapitre V	393
Exercices du chapitre VI	407
Exercices du chapitre VII	412
Exercices du chapitre VIII	421
Exercices du chapitre IX	429
Exercices du chapitre X	432
Exercices du chapitre XI	443
Exercices du chapitre XII	459

Annexe B. Groupes d'ordre 1 à 31

1. Légende	499
2. Ordres de 1 à 7	503
3. Ordre 8	506
4. Ordres de 9 à 11	509
5. Ordres de 12 à 15	511
6. Ordre 16	518
7. Ordres de 17 à 23	532
8. Ordre 24	545
9. Ordres 25 à 31	560

Annexe C. Groupes d'ordre 32

1. Groupes d'ordre 32, commutatifs	577
2. Groupes d'ordre 32 à deux générateurs, non commutatifs	584
3. Groupes d'ordre 32 à trois générateurs, non commutatifs	601
4. Groupes d'ordre 32 à quatre générateurs, non commutatifs	623