François Rouvière

INITIATION À LA GÉOMÉTRIE DE RIEMANN

avec la collaboration d'Alain Debreil

Calvage & Mounet

François ROUVIÈRE est professeur honoraire à l'université de Nice-Sophia Antipolis. Ses thèmes de recherche portent sur l'analyse sur les groupes de Lie et les espaces symétriques, l'étude des opérateurs différentiels invariants et la géométrie intégrale, notamment la transformation de Radon. Ancien élève de l'École normale supérieure, il a été membre du jury de l'agrégation pendant plusieurs années, après avoir été lui-même major de ce concours, en 1967. Il est l'auteur du célèbre PGCD (Petit guide de calcul différentiel), qui en est, chez Cassini, à sa quatrième édition. Plus récemment, il a publié chez Springer (2014), Symmetric Spaces and the Kashiwara-Vergne Method.

frou@unice.fr

Mathematics Subject Classification (2010) :

53-XX Differential geometry
- 53-01 Instructional exposition (textbooks, tutorial papers, etc.)
- 53A-XX Classical differential geometry
  - 53A05 Surfaces in Euclidean space
- 53B-XX Local differential geometry
  - 53B20 Local Riemannian geometry

Mots-clefs : surface, variété, métrique riemannienne, géodésique, courbure.

ISBN 978-2-91-635249-7

9 782916 352497

♾ Imprimé sur papier permanent

pour Anne-Marie

Table des matières

Introduction

Préambule : un voyage imaginaire

Parti du pôle Nord A, je décide de rejoindre l'équateur et ses climats plus chaleureux. Pour cela, je vais marcher (ou nager) *tout droit* vers le sud, par exemple en direction de Libreville B approximativement située à la longitude 10°E sur l'équateur. Ce voyage de 10 000 km me fera passer non loin de Trondheim, Hambourg, Ulm, Tunis, toutes situées sensiblement à la longitude 10°E. Arrivé à Libreville, je décide de tourner à gauche à angle droit et de marcher (ou nager) *tout droit* vers l'est, sur une longueur de 10 000 km (soit le quart de l'équateur terrestre), ce qui me mène en C à la longitude 100°E sur l'équateur, du côté de Padang à Sumatra. De là, enfin, je retourne au pôle Nord, en marchant (ou nageant) *tout droit* vers le nord. Je rejoins ainsi le point A par un chemin orthogonal à celui emprunté au départ (Figure 0.1).

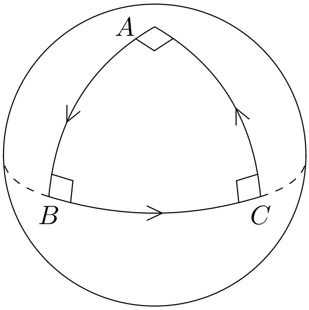

Figure 0.1 – *Un voyage imaginaire*

Ce périple de 30 000 km à la Jules Verne est, comme tous les voyages, riche d'enseignements : le triangle ABC ainsi dessiné sur la surface de la Terre n'est-il pas équilatéral et pourvu de trois angles droits, en violation flagrante du vieil adage « la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits » ?

Pour améliorer l'expérience (et accroître ma perplexité), je peux aussi tenter de transporter avec moi, tout au long de ce voyage, une flèche de *direction fixe* : fixe, c'est-à-dire faisant un angle constant avec mon droit chemin. Figurée en gras sur la Figure 0.2(a), cette flèche sera par exemple la direction de mon parcours de A vers B, puis devra lui rester perpendiculaire de B

vers C, pour être enfin opposée à mon chemin de C vers A. Bien que j'aie scrupuleusement observé ma consigne de *« transport parallèle »*, je constate que la flèche est, à mon retour en A, de direction orthogonale à celle de départ !

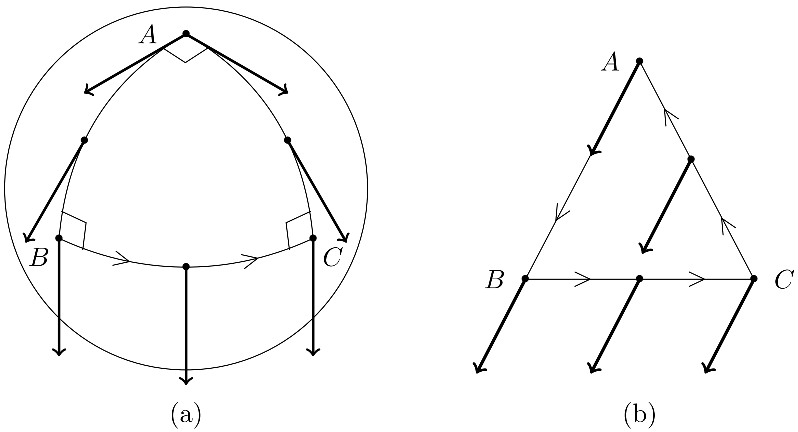

Figure 0.2 – *Transport parallèle d'une flèche, sur la sphère et dans le plan*

Ces propriétés, qui peuvent surprendre, révèlent que la géométrie sur la sphère n'est pas la géométrie euclidienne usuelle du plan. Dans ce dernier, la somme des angles d'un triangle est bien toujours égale à deux droits. De plus, le transport parallèle d'une flèche le long des côtés d'un triangle quelconque ABC, en maintenant constant l'angle de la flèche avec chacun des côtés successifs, la ramène exactement à sa position de départ, comme l'on s'en convainc sur la Figure 0.2(b).

Comprendre et approfondir de telles différences est le but de ce cours ; ainsi devient-on, au sens premier du terme, *géo-mètre* (mesureur de la Terre). Nous le ferons dans la première partie pour les surfaces (de dimension 2) de l'espace ambiant de dimension 3 : c'est la *géométrie de Gauss*, mise en place dans l'article fondamental de Carl Friedrich Gauss [25][26], *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (Recherches sur la théorie générale des surfaces courbes, 1827). Dans la seconde partie, nous aborderons la *géométrie de Riemann* proprement dite. Lancée par la dissertation inaugurale de Bernhard Riemann [28], *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Sur les hypothèses qui servent de base à la géométrie, 1854), elle généralise la précédente à une variété de dimension quelconque, sans référence à un espace ambiant.

Outils de la géométrie riemannienne

Revenons en dimension 2. Nous devons d'abord préciser la notion de *distance* sur une surface S. Pour deux points très voisins, c'est simplement leur distance dans l'espace ambiant, un espace affine euclidien de dimension 3 que nous identifierons, pour simplifier, à $\mathbb{R}^3$; c'est ainsi qu'une même règle graduée sert à mesurer la hauteur d'un objet, ou la distance de deux objets proches posés à la surface de la Terre. Le carré de cette « distance infinitésimale » est donné par une forme quadratique en les différences de coordonnées des deux points, traditionnellement notée ds^2 et appelée *métrique* ou *première forme quadratique fondamentale* de la surface ; elle s'obtient en restreignant à chaque plan tangent la forme quadratique qui donne le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$. Connaissant la métrique de S, on peut calculer, par intégration, la longueur d'une courbe quelconque tracée sur elle, et construire une mesure de surface qui permet de calculer l'aire d'une portion de S. La notion d'angle entre deux directions sur la surface se déduit du produit scalaire associé à sa métrique.

Que signifie alors marcher *tout droit* sur une surface ? La bonne réponse n'est pas si simple, même pour les bipèdes terriens que nous sommes : ce n'est pas, comme on pourrait croire, se fier à la boussole et aller toujours dans la direction du sud-est, par exemple[1]... Elle sera fournie par la notion de *dérivée covariante* le long d'une courbe tracée sur S d'un champ de vecteurs tangents à S : c'est la projection orthogonale sur le plan tangent à S de la dérivée usuelle du champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, autrement dit la seule composante de cette dérivée qui soit « visible » par les habitants de la surface. La courbe est alors considérée comme « droite » si le champ de ses vecteurs tangents a une dérivée covariante nulle. De manière générale, la dérivée covariante mesure la déviation par rapport à un cheminement « tout droit ».

Un autre point de vue est de définir la « ligne droite » comme *plus court chemin* d'un point à un autre sur la surface. On peut montrer, grâce au *calcul des variations*, que ce second point de vue est équivalent au premier, du moins localement[2]. Ainsi, se dégage de deux manières la notion de *géodésique*, qui est l'analogue pour les habitants de la surface de la ligne droite dans l'espace euclidien usuel. Pourtant, un observateur extérieur pourrait, à juste titre, considérer les géodésiques de S comme courbées ;

[1] Sur la sphère on s'approcherait alors du pôle Sud selon une courbe en spirale appelée *loxodromie* (exercice II-6, page 71). Marcher constamment vers l'est n'est pas non plus marcher tout droit, sauf sur l'équateur comme dans notre voyage imaginaire : pour s'en convaincre, on pensera à une marche vers l'est en partant à 100 mètres du pôle Nord. En revanche, aller vers le nord ou vers le sud est bien marcher tout droit.

[2] On aurait pu aller aussi de Libreville à Sumatra en marchant tout droit *vers l'ouest* le long de l'équateur, mais ce trajet de 30 000 km n'était certes pas le plus court.

pour une sphère, ce sont les grands cercles. Il sera donc essentiel de distinguer, puis comparer, les points de vue *intrinsèque* (celui des êtres vivant sur la surface, qui ne connaissent que longueurs, angles ou aires mesurés au sol) et *extrinsèque* (où la surface est vue de l'extérieur).

En géométrie riemannienne générale, il n'y a plus d'espace ambiant ; seul est valable le point de vue intrinsèque. À partir d'un ds^2, ou *métrique riemannienne*, donné a priori, on pourra définir les notions de dérivée covariante et de géodésique.

Les diverses notions de courbure

Le chemin ABC de la Figure 0.1 est donc un triangle géodésique sur la sphère, d'angles aux sommets α, β, γ (des angles droits dans notre exemple) et la différence $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ est une manifestation de la courbure, c'est-à-dire du caractère non-euclidien de la géométrie sphérique. Plus généralement, la *courbure de Gauss* K au point A d'une surface peut se définir par

$$K = \lim \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{\sigma},$$

où σ est l'aire d'un petit triangle géodésique de sommet A, dont les longueurs des côtés tendent vers 0. Cette définition rend plausible l'égalité

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \iint K \, d\sigma,$$

où l'intégrale double est étendue à un triangle géodésique quelconque ABC, ce qui est un cas particulier remarquable de la *formule de Gauss-Bonnet.* Pour une sphère de rayon R on pourrait vérifier directement cette égalité par un calcul élémentaire[3], avec pour courbure K la constante $1/R^2$. Une des conséquences de la courbure de la sphère est l'impossibilité de faire une carte plane d'une portion du globe terrestre qui soit *isométrique*, i.e. où toutes les distances soient représentées en vraie grandeur (à un facteur constant près, l'échelle de la carte). On peut toutefois faire des cartes conformes (c'est-à-dire conservant les angles, donc la forme générale des pays), ou équivalentes (c'est-à-dire conservant les aires, à un facteur constant près), mais pas les deux à la fois.

D'autres définitions équivalentes de la courbure en A s'obtiennent en traçant sur la surface un petit cercle de centre A et de rayon r et en comparant, par arpentage autour de A, sa longueur à la longueur euclidienne $2\pi r$, ou son aire à πr^2, lorsque le rayon r tend vers 0. Toutes ces définitions, uniquement déduites de mesures effectuées sur la surface, sont *intrinsèques.*

[3]C'est la formule de Girard, dont on trouvera une preuve dans [6], p. 152.

Une approche *extrinsèque* de la courbure s'obtient en observant (de l'extérieur) que le plan tangent à la surface change de direction d'un point à un autre, c'est-à-dire en étudiant l'*application de Gauss* qui à chaque point de la surface fait correspondre un vecteur unitaire normal en ce point, fonction différentiable de ce point en un sens qui sera précisé. La courbure de Gauss peut alors se déduire de la différentielle de cette application ; de manière plus intuitive, la courbure en A est, en valeur absolue, donnée par

$$|K| = \lim \frac{\sigma'}{\sigma},$$

où σ est l'aire, tendant vers 0, d'un petit domaine autour du point A, et σ' l'aire du domaine correspondant décrit sur la sphère unité par les vecteurs normaux aux différents points de la surface (Figure 0.3). C'est la définition originelle de Gauss, directement inspirée de la courbure (extrinsèque) d'une courbe plane vue comme vitesse de rotation de sa tangente ou de sa normale.

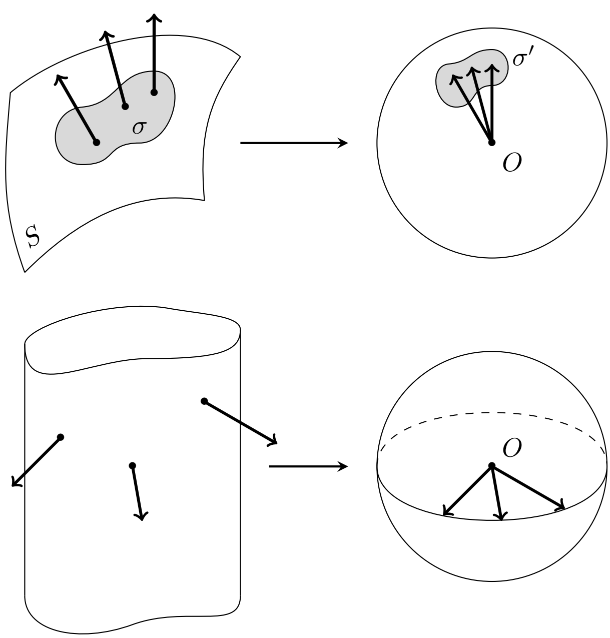

Figure 0.3 – *Application de Gauss d'une surface. Cas d'un cylindre*

On notera que, bien que paraissant « courbe » à première vue, un cylindre est à courbure nulle : l'image de son application de Gauss se réduit à un cercle, d'où $\sigma' = 0$ et $K = 0$. Ce résultat, qui peut surprendre, est lié à la possibilité de dérouler le cylindre sur un plan.

On peut encore préciser la signification géométrique extrinsèque de la courbure à l'aide de la *deuxième forme quadratique fondamentale* de la surface. Construite en utilisant la différentielle de l'application de Gauss, cette forme quadratique a pour valeurs propres les deux *courbures principales*, qui s'interprètent comme courbures de certaines sections de la surface par des plans normaux. La courbure de Gauss K est le produit des courbures principales.

Un des résultats majeurs de la première partie du cours sera l'équivalence de toutes ces définitions de la courbure d'une surface, une dizaine en tout. Cela montre notamment le caractère intrinsèque de la courbure définie à l'aide de l'application de Gauss, qui est calculable explicitement à l'aide des seuls coefficients du ds^2 de la surface. Ce résultat, a priori nullement évident, fut baptisé *Theorema Egregium* (le théorème remarquable) par Gauss lui-même.

Il n'y a pas de théorème analogue pour les courbes, faute d'une notion intrinsèque de courbure. On se convaincra facilement que des fourmis se déplaçant le long d'un brin d'herbe ne pourraient pas mettre en évidence son éventuelle courbure en effectuant seulement des mesures de longueurs sur ce brin. Rien ne distingue (localement au moins) la géométrie des fourmis de celle d'une ligne droite. C'est pourquoi notre étude de la courbure se situe d'abord en dimension 2 (surfaces). Elle s'étendra ensuite en dimension supérieure, mais au prix de nouvelles difficultés.

De Gauss à Riemann

L'extension de la géométrie de Gauss proposée par Riemann fait l'objet de la deuxième partie. Bien que les figures de cette partie esquissent encore des surfaces de l'espace $\mathbb{R}^3$, elles ne sont plus désormais que les illustrations schématiques d'une situation incontestablement plus abstraite : dimension quelconque, absence de référence à un espace ambiant.

Je me suis efforcé d'introduire, le plus brièvement possible, les notions indispensables pour aborder la géométrie de Riemann : variété différentiable, espace tangent, champ de vecteurs. On peut ensuite parler de métrique riemannienne et de sa connexion associée, puis de transport parallèle et de géodésiques. Il est déjà clair à ce stade que l'on dispose des mêmes outils géométriques que pour les surfaces, et que l'on n'a pas à souffrir de l'absence d'un espace ambiant où serait plongée la variété.

Comme pour les surfaces, la courbure peut être introduite de diverses manières. Nous donnons une présentation détaillée de deux d'entre elles, en essayant d'insister sur leurs motivations. La plus intuitive vient, ici encore, des surprises venues du transport parallèle d'un vecteur le long d'un circuit fermé : la courbure traduit le décalage entre sa position au départ et sa position à l'arrivée. Une autre approche, qui est celle de Riemann, est d'écrire la métrique dans un système de « coordonnées normales », aux propriétés géométriques remarquables (les géodésiques issues de l'origine y sont représentées par des droites). Un développement limité de cette métrique permet une comparaison directe, au voisinage de l'origine, entre la géométrie de la variété et la géométrie euclidienne. Elles coïncident jusqu'au premier ordre, mais les termes du second ordre ont une forme particulière, découverte par Riemann, où apparaissent des coefficients qui traduisent la courbure.

Quelle que soit la méthode employée, la notion de courbure est ici plus délicate qu'en dimension 2. À la fonction numérique K de Gauss pour les surfaces il faut substituer, en dimension supérieure à 2, le *tenseur de courbure de Riemann*, qui décrit la « courbure sectionnelle » dans chaque direction de plan de l'espace tangent.

Une fois les outils en main, leur utilisation offre un très large éventail de possibilités (voir par exemple le vaste panorama présenté par Berger [30]). J'ai choisi d'insister ici sur les variétés riemanniennes qui vérifient de bonnes hypothèses d'homogénéité et d'isotropie : espaces euclidiens, sphériques ou hyperboliques, ces variétés sont à courbure constante. Elles disposent d'un important groupe d'isométries qui facilite bien des raisonnements ou des calculs. En cette année du centenaire de la relativité générale d'Albert Einstein (1915), j'ai souhaité donner enfin un bref aperçu de l'utilisation de ces variétés en cosmologie, pour proposer un modèle théorique de l'évolution de l'univers, considéré dans son ensemble.

Pour qui, pourquoi ce livre ?

De nombreux ouvrages de grande qualité traitent de géométrie riemannienne ; quelques-uns d'entre eux sont cités dans la bibliographie. À quoi bon un bouquin de plus ?

D'une part, la littérature en langue française m'a paru assez peu fournie sur le sujet. D'autre part, j'ai l'espoir qu'il peut être utile de proposer une *approche progressive* du sujet en partant du cas des surfaces, où le support de la vision géométrique (avec de nombreuses figures) aide à apprivoiser la notion de métrique et celles, plus délicates, de dérivée covariante, géodésique, courbure. Les motivations apparaissent ainsi plus clairement lors du passage à la dimension n et à ses définitions inévitablement plus abstraites.

Ce livre s'adresse aux étudiants du *master de mathématiques* (quatrième année d'université française) et au-delà, ainsi qu'à tous ceux qui souhaitent s'initier à la géométrie de Riemann en vue de l'étude ultérieure d'ouvrages plus avancés, soit vers des développements mathématiques récents, soit vers l'utilisation en physique (relativité générale notamment). Le présent texte est issu de mes notes d'un cours de troisième cycle (master 2) sur les surfaces, donné en 2001 et 2002 à l'Université de Nice. C'est Rached Mneimné qui m'a incité à les récrire et à les développer ; je tiens à l'assurer de ma profonde reconnaissance pour son amical encouragement, sa longue patience et ses fructueux conseils.

Les **prérequis** se limitent à une bonne familiarité avec le calcul différentiel à plusieurs variables (changements de variables, théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites), ainsi qu'à quelques notions sur la topologie générale (compact, connexe,...) et les équations différentielles (théorème général d'existence et unicité des solutions). On pourra réviser ces thèmes dans les livres cités au début de la bibliographie. Aucune connaissance préalable n'est requise sur les sous-variétés ni sur les variétés : les notions utiles seront introduites ici. Les formes différentielles, outil précieux de la géométrie riemannienne vue par la méthode du « repère mobile », ne font ici l'objet que d'une introduction minimaliste, en complément au chapitre III, dans l'espoir de faire découvrir rapidement leur apport à la géométrie des surfaces. Dans le même esprit, je n'ai pas jugé utile de développer dans cet ouvrage d'introduction une théorie générale des tenseurs. Il nous suffira de considérer le « tenseur de courbure » d'une variété riemannienne comme une application linéaire entre champs de vecteurs, ou comme une forme quadrilinéaire sur l'espace tangent.

Un choix d'**exercices** est proposé à la fin de chaque chapitre. On ne saurait trop recommander de s'y essayer pour s'assurer d'une bonne compréhension du cours. On trouvera dans le dernier chapitre le corrigé détaillé de chacun d'eux. L'ouvrage en compte plus d'une cinquantaine de difficulté variable. Un astérisque * signale quelques énoncés plus difficiles.

Les parties 1 et 2 sont largement indépendantes. On peut donc, si on le souhaite, aborder directement la partie consacrée aux variétés riemanniennes.

Je me suis inspiré, pour la rédaction de ce livre, de plusieurs des ouvrages cités dans la bibliographie, ainsi que des belles notes de cours de Lars Hörmander (*Riemannian Geometry*, Université de Lund, 1990) et d'Olivier Biquard (*Introduction to Differential Geometry*, Université Paris VI, 2008).

Il ne suffit pas d'écrire un texte, encore faut-il savoir le transformer en un bel objet-livre, clairement présenté et agréable à feuilleter. Il est certain que, sans la précieuse collaboration et la compétence d'Alain Debreil, le manuscrit serait resté à l'état d'esquisse, privé de figures que j'aurais été