**Nikolaï Nikolski**

# Matrices et opérateurs de Toeplitz

**Calvage & Mounet**

Nikolaï NIKOLSKI a été pendant une quinzaine d'années professeur à l'Université de Saint-Petersbourg avant de rejoindre en 1991 l'Université de Bordeaux comme professeur, et d'y obtenir l'éméritat en 2011. Il est l'auteur de plusieurs monographies de recherche, parues chez Springer, American Math Society, « Nauka editors » (Moscou) et Belin (Paris). Il est Grand Prix de l'Académie des Sciences (Prix Ampère 2010) et a été "Distinguished Professor" des Universités d'Indiana (Bloomington), Beer-Sheva (Israël), Missouri-Columbia, Brown (Providence) et Caltech (Pasadena). Il a encadré près d'une trentaine de thèses, soutenues en mathématiques.

Nikolai.Nikolski@math.u-bordeaux1.fr

Mathematics Subject Classification (2010) :

47-02 Operator theory
47A53 Fredholm operators, index theories
47A57 Operator methods in interpolation, moment and extension problems
47A68 Factorization theory (including Wiener-Hopf and spectral factorizations)
47B35 Toeplitz operators, Hankel operators, Wiener-Hopf operators

42C10 Orthogonal functions and polynomials, general theory
42A50 Conjugate functions, conjugate series, singular integrals
42A82 Positive definite functions

15B05 Toeplitz, Cauchy, and related matrices

30-02 Functions of a complex variable
30H10 Hardy spaces

Mots-clefs.–
Espaces de Hardy, opérateurs de multiplication, opérateurs (matrices) de Toeplitz, opérateurs (matrices) de Hankel, spectre essentiel (de Fredholm), index topologique (de Cauchy), index analytique (de Noether), espaces BMO et V MO, fonctions (localement) sectorielles, factorisation de Wiener-Hopf, intégrales singulières, formule de Plemelj, déterminants de Toeplitz, asymptotique de Szegő, distribution asymptotique de Weyl, inversion par troncature, opérateurs de Toeplitz tronqués, algèbres de Sarason et de Krein.

ISBN 978-2-91-6352-47-3

9 782916 352473

∞ Imprimé sur papier permanent

Уничтожайте рукописи,
но сохраняйте то, что вы начертали сбоку,
от скуки, от неуменья, и как бы во сне.
Эти второстепенные и мимовольные создания вашей фантазии не пропадут в мире ...

"Le Timbre égyptien" (1928)

Ossip Mandelstam (1891-1938)

# Table des matières

**III. Théorie $H^2$ des opérateurs de Toeplitz**

**Annexe B. Rappels sur les espaces de Hilbert**



**Annexe C. Rappels sur les algèbres de Banach**



**Annexe D. Rappels sur les opérateurs linéaires**



**Annexe E. Opérateurs de Fredholm et indice de Noether**

*« Par ma foi ! ⟨...⟩ je dis de la prose*
*sans que j'en susse rien, et je vous suis*
*le plus obligé du monde de m'avoir appris cela. »*

Monsieur Jourdain (1670)

# Préface

Un peu comme le *Bourgeois gentilhomme* de Molière avec sa prose, nous parlons souvent le langage des matrices/opérateurs de Toeplitz et de Hankel sans nous en rendre compte ; mais cela ira mieux si nous le faisons en pleine connaissance de cause et de façon techniquement correcte.

L'*introduction aux opérateurs et matrices de Toeplitz* proposée dans ce livre concerne les transformations matricielles et intégrales qui sont définies par « un noyau » (une matrice ou une fonction à deux variables) à diagonales constantes. En particulier, une suite de nombres complexes $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définit une *matrice de Toeplitz*

$$T = \begin{pmatrix} c_0 & c_{-1} & c_{-2} & c_{-3} & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_0 & c_{-1} & c_{-2} & \ddots & \ddots \\ c_2 & c_1 & c_0 & c_{-1} & \ddots & \ddots \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

et *une matrice de Hankel*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} c_{-1} & c_{-2} & c_{-3} & c_{-4} & \cdots & \cdots \\ c_{-2} & c_{-3} & c_{-4} & c_{-5} & \iddots & \iddots \\ c_{-3} & c_{-4} & c_{-5} & c_{-6} & \iddots & \iddots \\ c_{-4} & c_{-5} & c_{-6} & c_{-7} & \iddots & \iddots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots \end{pmatrix}.$$

Un opérateur (une application) ayant une matrice de Toeplitz (respectivement, de Hankel) par rapport à une base s'appelle *opérateur de Toeplitz* (respectivement, *de Hankel*). Des causes très profondes (dans les deux sens du terme : profondément cachées sous la surface des faits mathématiques, et profondes par leur puissance) font que ces transformations jouent un rôle exceptionnel dans les mathématiques d'aujourd'hui. L'ensemble des problèmes et la base des techniques liées à ces transformations ont été conçus par des géants des mathématiques comme B. Riemann, D. Hilbert, N. Wiener, G. Birkhoff ou O. Toeplitz.

Ce livre est une introduction à un domaine très dynamique de l'analyse moderne, qui est basé sur les techniques des espaces de Hardy. Pour la rendre suffisante en soi, nous donnons un résumé très complet sur les espaces de ce type (*annexe* F), sans oublier de ré-expliquer les faits principaux de la théorie de Hardy, chaque fois, directement avant leur utilisation. Une présentation complète des espaces de Hardy, la plus proche par son style du présent ouvrage, peut être trouvée dans *Espaces de Hardy* (Éditions Belin, 2012) du même auteur. Le livre actuel, comme le précédent, correspond à un cours du niveau de master 2 donné (à plusieurs reprises) à l'Université de Bordeaux dans les années 1991-2011. De nombreux exercices résolus montrent les techniques développées mises en action et élargissent la portée de la théorie.

L'aspect un peu caché de ce texte est le suivant. Le livre est consacré aux opérateurs intégraux et matriciels à noyaux (ou matrices) dépendants de la différence des arguments — ce qui semble être, au premier coup d'œil, un sujet assez particulier. Mais un deuxième coup d'œil fait découvrir qu'une grande partie des résultats classiques de l'analyse et de ses applications dépendent directement de ces opérateurs dits de Toeplitz et de leur opérateurs « frères », ceux de Hankel, qui sont si étroitement associés à ceux de Toeplitz qu'ils sont parfois appellés ensemble « opérateurs/matrices de Ha-plitz »... Dans cette partie de l'analyse se trouvent les problèmes de filtrage de Wiener et ceux de la physique statistique des gaz, les divers problèmes de moments, les propriétés ergodiques des processus aléatoires, les interpolations complexes, etc. Le but de ce livre est de présenter la diversité des techniques toepliziennes/hankeliennes et de tirer des conséquences de « l'inexplicable efficacité » des opérateurs de Toeplitz (et de Hankel).

Les *prérequis* sont les cours standard d'analyse fonctionnelle (ou des espaces de Hilbert/Banach) complétés par quelques éléments d'analyse complexe et une certaine connaissance des espaces de Hardy. Les résumés et rappels de tous ces enseignements de base (ainsi que certaines notations) sont réunis dans les *annexes* en fin du livre.

Plus précisément, les *annexes* A à D fixent les définitions et notations de l'analyse de base (niveau Licence), tandis que l'*annexe* E propose une présentation courte, mais complète (les démonstrations incluses) d'une théorie moins populaire de l'analyse fonctionnelle — celle des opérateurs dits « de

Fredholm ». L'*annexe* F est un résumé de la théorie des espaces de Hardy ; le manuel du même auteur sur ce sujet, *Espaces de Hardy* (déjà mentionné), est cité dans le présent livre comme [Hardy].

Dans le texte, il y a aussi un grand nombre de renseignements historiques — sur les sujets développés, leurs créateurs et diverses circonstances. On peut espérer que ces encadrés aideront à mieux apprécier les méthodes mathématiques présentées et leur efficacité, ainsi que la dramaturgie de (la vie en) mathématique.

Chaque chapitre contient des exercices résolus (ils sont cent cinquante-cinq au total) de différents niveaux, allant — pour utiliser une métaphore violonistique de I. Glazman et Yu. Lyubich [GLy1969] — des exercices sur les cordes à vide jusqu'à des pièces virtuoses avec harmoniques doubles. En particulier, la série d'exercices de chaque chapitre (sauf chapitre I) s'ouvre par des *Exercices de base* accessibles au niveau de master et/ou préparation à l'agrégation.

Chaque chapitre se termine par un paragraphe *Notes et remarques* qui discute l'historique des sujets abordés, certains résultats récents et (parfois) des questions ouvertes ; cette discussion est destinée surtout au lecteur (lectrice) plus expérimenté(e) ; pour une appéciation de ce genre de texte, sous une forme poétique, voir, par exemple, une maxime-vignette, page viii, due à Ossip Mandelstam, le plus grand poète russe du XX$^{e}$ siècle.

Le *chapitre I* joue le rôle d'une introduction détaillée, mais informelle —une description des sources d'inspiration de la (future) théorie, les composantes principales de son état actuel, ainsi qu'un panorama des applications et l'historique de son évolution au XX$^{e}$ siècle.

Le *chapitre II* établit les contours de base de la théorie des opérateurs Hankel/Toeplitz sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Le *chapitre III* est consacré à la théorie spectrale des opérateurs de Toeplitz.

Le *chapitre IV* explique l'équivalence unitaire de la théorie sur $\mathbb{T}$ et de la théorie classique des équations de Wiener-Hopf sur $\mathbb{R}$, ainsi que le problème de Riemann-Hilbert.

Le *chapitre V* traite des propriétés des matrices finies de Toeplitz (l'inversion, liens avec les moments trigonométriques, l'approximation des matrices de Toeplitz infinies, les distributions asymptotiques des spectres).

Le lecteur (la lectrice) va rapidement se rendre compte que ce manuel ne contient qu'une introduction assez élémentaire aux matrices et opérateurs de Toeplitz basée sur la théorie des espaces de Hardy. On peut donc le regarder comme un livre de première connaissance (un « élément primaire »). Néanmoins, en principe, un(e) étudiant(e) arrivant à la fin de ce livre est capable de commencer un projet de recherche autonome (l'auteur en a eu l'expérience positivement avec nombre d'étudiants). Pour une entreprise comme la recherche, vous aurez besoin de l'aide des experts — vous la trouverez dans les dizaines de monographies existantes consacrées aux matrices/opérateurs de Toeplitz, aux espaces de Hardy et à « l'analyse dure » qui s'est développée autour d'eux. Quelques-unes parmi ce flot de littérature sont commentées dans les paragraphes *Notes et remarques*. Bon courage !

## Remerciements

La rédaction finale de ce livre était partiellement soutenue par le projet de recherche de l'Université de St. Pétersbourg « Espaces de fonctions analytiques et intégrales singulières », RSF grant 14-41-00010.

Je suis grandement reconnaissant à Éric Charpentier, mon ami et collègue de l'Université de Bordeaux, qui — comme avec mon précédent livre (*Espaces de Hardy* chez Belin, 2012 [Hardy]) — a sacrifié beaucoup de son temps pour une relecture attentive et efficace de l'intégralité du texte. Sans son aide précieuse et généreuse, le livre ne serait jamais arrivé à son terme.

Je remercie chaleureusement Albrecht Böttcher, le grand expert du domaine de Toeplitz, qui a pris la peine de lire le manuscrit et dont les commentaires profonds et nourrissants m'ont aidé à polir le texte. Je suis aussi obligé à plusieurs de mes collègues pour des consultations ponctuelles sur le sujet du livre, et particulièrement, à Anton Baranov de St. Pétersbourg pour ses remarques et suggestions concernant la rédaction.

J'adresse mes remerciements amicaux à Gilles Godefroy (Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris VI) qui, à un moment délicat du projet, a fait sortir la publication de l'impasse où elle se trouvait par un concours de circonstances en me recommandant à l'éditeur *Calvage & Mounet*. Je tiens aussi, bien sûr, à remercier chaleureusement ledit éditeur (en particulier, Alain Debreil et Rached Mneimné) pour le travail soigneux et hautement qualifié dont a bénéficié le présent ouvrage, ainsi que pour l'atmosphère amicale dans laquelle nous avons à cette occasion collaboré.

Et finalement, mais avant tout, je pense à ma famille nombreuse — Pascale, Laure, Ivan, Jeanne et Alekseï — qui a stoïquement supporté mes isolations prolongées devant le texte et m'a encouragé dans mes moments de doute.

Élancourt,
novembre 2016