Mathématiques en devenir

101. — Jacques Faraut. *Analyse sur les groupes de Lie. Une introduction*
102. — Patrice Tauvel. *Corps commutatifs et théorie de Galois*
103. — Jean Saint Raymond. *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*
104. — Clément de Seguins Pazzis. *Invitation aux formes quadratiques*
105. — Bruno Ingrao. *Coniques projectives, affines et métriques*
106. — Wolfgang Bertram. *Calcul différentiel topologique élémentaire*
107. — Henri Lombardi & Claude Quitté. *Algèbre commutative. Méthodes constructives. Modules projectifs de type fini*
108. — Frédéric Testard. *Analyse mathématique. La maîtrise de l'implicite*
109. — Grégory Berhuy. *Modules : théorie, pratique... et un peu d'arithmétique*
110. — Bernard Candelpergher. *Théorie des probabilités. Une introduction élémentaire*
111. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome premier*
112. — Gema-Maria Díaz-Toca, Henri Lombardi & Claude Quitté. *Modules sur les anneaux commutatifs*
113. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome second* – encores
114. — Alain Debreil. *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes*
115. — François Rouvière. *Initiation à la géométrie de Riemann*
116. — Nikolaï Nikolski. Matrices et opérateurs de Toeplitz
117. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. (Tome premier)*

Philippe Caldero et Jérôme Germoni

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries

Tome premier

Calvage & Mounet

Philippe Caldero est ancien élève de l'ÉNS de Saint-Cloud, agrégé de mathématiques et docteur. Il est maître de conférences à l'université Lyon 1 et ses travaux de recherche concernent la théorie des représentations.

Jérôme Germoni est ancien élève de l'ÉNS, agrégé de mathématiques et docteur. Maître de conférences à Lyon 1. Passionné de questions d'enseignement et de diffusion de la culture mathématique, il a dirigé l'Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) de Lyon.

germoni@math.univ-lyon1.fr
caldero@math.univ-lyon1.fr

Mathematics Subject Classification (2000) :

14-XX Algebraic geometry
- 14H-XX Curves
  - 14.20 Algebraic curves, surfaces and special varieties

51-XX Geometry
- 51F-XX Metric geometry
- 51N-XX Analytic and descriptive geometry
  - 51N10 Affine analytic geometry
  - 51N15 Projective analytic geometry
  - 51N20 Euclidean analytic geometry
  - 51N25 Analytic geometry with other transformation groups
  - 51N30 Geometry of classical groups
  - 51A05 General theory and projective geometries

ISBN 978-2-916352-61-9

9 782916 352619

∞ Imprimé sur papier permanent

À tous ceux qui nous ont fait découvrir les plaisirs mathématiques :
à nos parents, nos professeurs...
qui sont parfois un peu les mêmes...

Table des matières

Avant-propos

The first few pages warn that enduring creatures may lie dormant but are never truly dead. They may be recalled to active life through the incantations presented in this book.

Evil dead, Sam Raimi, 1981.

L'objectif des *Histoires Hédonistes* est de raconter l'univers en termes d'orbites — ou, disons, d'actions de groupes.

Partons d'un constat simple et, pourtant, relativement peu connu : un bon nombre de théorèmes classiques d'algèbre linéaire (base incomplète et dimension, rang, Jordan, Sylvester...) sont des théorèmes de classification ; de plus, ils s'interprètent souvent comme la description des orbites pour une action particulière d'un groupe sur un ensemble.

Aussi, l'idée centrale est l'omniprésence des groupes de transformations[1] en algèbre et en géométrie classique. Comme le note Yves André dans [1], Alexandre Grothendieck « n'hésite pas à parler de l'invention du zéro et de l'idée de groupe comme des deux plus grandes innovations mathématiques de tous les temps ».

> Il a fallu des millénaires avant que des choses aussi enfantines et omniprésentes que les groupes de symétries de certaines figures géométriques, les formes topologiques de certaines autres, le nombre zéro, les ensembles, trouvent admission dans le sanctuaire [des mathématiques] !
> Alexandre Grothendieck, *Récoltes et semailles.*

On peut expliquer l'omniprésence des groupes de par le fait qu'ils sont la formalisation de l'idée de *symétrie*, de *transformations* qui préservent un système.

[1] À peine une ligne de texte et déjà une redondance !

Pourquoi les groupes ?

Observons les formules de changement de base en algèbre linéaire, pour un vecteur-colonne et une matrice carrée :

$$X = PX', \quad A = PA'P^{-1}.$$

On peut les interpréter de deux façons : soit comme deux objets différents reliés par une transformation, soit comme le même objet dans deux systèmes de coordonnées différents. Cette dualité des points de vue est très utile[2]. Mais, elle relève de la même situation : l'action d'un groupe (ici, le groupe linéaire) sur un ensemble (par multiplication à gauche sur les vecteurs-colonnes ou par conjugaison sur les matrices carrées).

La réduction des endomorphismes consiste, A étant donnée, à chercher P d'une part, et A' aussi simple que possible d'autre part, de sorte que la relation ci-dessus soit satisfaite. En passant de A à A', on conserve certaines choses : déterminant, trace, valeurs propres... et l'on en change d'autres : les espaces propres ou caractéristiques de A sont l'image de ceux de A' par P.

Cet exemple, au cœur du programme d'algèbre de licence, est représentatif, voire emblématique, de la présence des groupes dans les problèmes de classification qui motivent le mathématicien. Ici, on « regroupe » les endomorphismes d'un espace en endomorphismes semblables ; ainsi l'ensemble des endomorphismes est partitionné par une relation d'équivalence, elle-même régie par un groupe : le groupe linéaire, qui agit par conjugaison sur l'espace des endomorphismes. Dans chaque classe d'équivalence, appelée désormais *orbite*, on sélectionne un élément représentatif, que l'on choisit « aussi simple que possible » et que l'on appellera ici injustement *forme normale*.

Les mathématiques sont souvent affaire de classification, et classer, finalement, c'est partitionner et étiqueter. Un groupe sera vu et utilisé comme une « machine à partitionner » ; effectivement, si l'on comprend qu'une partition d'un ensemble n'est rien d'autre qu'une relation d'équivalence dans cet ensemble, on comprend alors aussi que la triade réflexif-symétrique-transitif puisse se traduire par cette autre, neutre-symétrique-associatif, qui définit la notion de groupe. L'étiquetage, de son côté, sera l'objet de la recherche d'invariants.

La notion de groupe liée à la classification et les invariants ne se rencontre pas qu'en algèbre. Pensons par exemple à une courbe paramétrée dans le plan, disons une application de classe $\mathscr{C}^1$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$. Avec un difféomorphisme $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, on peut reparamétrer l'arc

[2] Ah ? Pourquoi ?

décrit par γ en considérant : $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$. Mais les propriétés intéressantes, c'est-à-dire géométriques, sont celles qui sont invariantes par changement de paramétrage : points singuliers, longueur, rayon de courbure... Et cela constitue presque une définition de ce qu'est une propriété géométrique, à savoir : indépendance à l'égard du paramétrage.

Groupes, topologie et géométrie

Pour reprendre un aphorisme de Misha Gromov, « il n'y a pas de théorème (non trivial) portant sur tous les groupes » : la structure est trop large. Aussi est-on amené à ajouter des hypothèses pour spécifier la situation et l'enrichir de théorèmes.

On commence par ajouter de la topologie : c'est une structure intermédiaire entre le « ponctuel » et le « géométrique ». L'apport de la topologie est motivé par la démonstration de théorèmes classiques (Cayley-Hamilton, par exemple) par un calcul facile valable presque partout et un argument de densité. On se place donc, dès le chapitre II, dans le large cadre des actions continues de groupes topologiques.

Mais, ce n'est guère qu'une étape vers la géométrie — au sens, ici, de la géométrie différentielle. Les méthodes qu'elle permet sont surtout utilisées dans ce livre pour remplacer quelques calculs par des concepts. Mais elles ouvrent aussi la porte à un large champ d'étude : la théorie des groupes de Lie.

Sur un corps fini, la topologie n'a à peu près aucun intérêt. Mais le comptage tient lieu d'étude géométrique. Cette idée apparaît déjà dans les théorèmes de Sylow : comprendre un groupe fini, cela passe par le dénombrement de ses différents sous-groupes de Sylow, voir [20]. En fait, on voit transparaître la structure géométrique observée sur les corps des complexes ou des réels dans la formule-même du cardinal de certains objets (ensemble des matrices de rang donné, espaces projectifs, grassmanniennes, hyperboloïdes...). Pour en donner l'exemple le plus simple : la formule bien connue de la série géométrique

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + \cdots + 1$$

pourra s'interpréter sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de cardinal q de la façon suivante : l'ensemble des droites vectorielles d'un espace vectoriel E, *i.e.* l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$, est l'ensemble des orbites pour l'action libre du groupe multiplicatif $\mathbb{F}_q^\star$ sur $E \backslash \{0\}$, et il possède une décomposition en cellules. Propriété qui reste d'ailleurs valable sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Jamais cette petite formule connue des bacheliers n'aura autant parlé de géométrie et de topologie !

Invariance

Lorsqu'il y a plusieurs orbites, il s'agit de trouver des moyens simples de les séparer, de les identifier. C'est le rôle des *invariants.* Un invariant pour une action de groupe est une application définie sur l'ensemble sur lequel le groupe opère qui est constante sur chaque orbite. Un invariant peut être un nombre (rayon d'un cercle, rang d'une application linéaire, valeurs propres...) ou un objet quelconque (genre d'une conique affine réelle, « diagramme de Young » d'une matrice nilpotente comme en III-2.3.2, « type » d'une matrice rectangulaire comme dans IV-2.3.1).

Un invariant est dit invariant *complet* ou *total* si l'application qui le représente est injective : l'invariant prend deux valeurs différentes sur deux orbites distinctes. Par exemple, le rang est un invariant complet pour les formes quadratiques complexes modulo congruence, pas pour les formes quadratiques réelles (dans cette situation, le théorème de Sylvester permet de le voir et donne un invariant complet, la signature). En revanche, si le spectre définit bien un invariant pour les matrices carrées modulo conjugaison, il ne constitue pas un invariant complet, puisque deux matrices ayant même spectre ne sont pas forcément semblables.

Bien sûr, un invariant est d'autant plus intéressant qu'il est facile à calculer et proche d'être complet. La recherche d'invariants complets est essentiellement une formulation du problème de la *classification* (des objets sur lesquels le groupe agit, à transformation — dans le groupe — près).

On peut parfois inverser le point de vue : mettre en évidence un invariant dans une situation, c'est faire naître un concept. Ainsi, un angle, c'est ce que possèdent en commun deux couples (ou paires, si l'on préfère les angles géométriques) de demi-droites (ou droites, si l'on veut) *superposables*, c'est-à-dire dans la même orbite sous le groupe des similitudes (ou des isométries). L'ensemble des angles n'est autre que l'ensemble des orbites pour l'action du groupe des similitudes sur les couples de droites ; il devient particulièrement opérationnel lorsque l'on s'aperçoit que cet ensemble est en bijection avec $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, plus maniable.

Guide de la nouvelle édition

Le succès que nos histoires hédonistes ont connu auprès des agrégatifs et de leurs préparateurs nous a amenés à nous lancer dans une nouvelle édition. Bien entendu, cette décision a eu pour objet de corriger les erreurs[3] et les coquilles du premier volume, et ainsi, retrouver sommeil et sérénité. Mais l'intention était surtout de répondre aux demandes soutenues de nos lecteurs sympathiquement exprimées à travers les forums et les courriels.

[3] Erreurs qui, pour la plupart, se trouvaient déjà sur l'errata en ligne.

Nous avons donc orienté la seconde édition autour de la préparation à l'agrégation, en ajoutant les corrections de tous les exercices du Tome 1, tout en ayant encore plus présent en tête l'exercice de style que représente l'oral de l'agrégation (développements, discussion avec le jury), mais sans pour autant perdre une certaine hauteur de point de vue, et le plaisir qui l'accompagne, que les affres du concours auraient pu faire oublier.

L'ajout des corrections a eu pour effet de doubler le volume du tome. Nous avons donc décidé de ne mettre, dans un premier temps, que les six premiers chapitres du tome 1 de la première édition. Dans un deuxième temps, nous publierons une compilation des moments les plus utiles (et agréables !) à l'agrégation, extraits des six derniers chapitres du tome 1, ainsi que du tome 2, le tout, avec la correction des exercices de fin de chapitre.

Contenu du livre

Le livre est divisé en chapitres suffisamment indépendants entre eux pour pouvoir être lus séparément, en tout cas après avoir digéré les notions, définitions et résultats du chapitre II, autour duquel le livre est articulé. Le niveau oscille entre celui de la licence 3 et du master 2 (agrégation), mais la plupart des chapitres possèdent leur annexe propre, où sont rappelées les notions de base (actions de groupes, algorithme de Gauss, outils topologiques, lemme des noyaux, décomposition de Dunford, formes quadratiques, théorème spectral...). Seules les définitions les plus élémentaires (groupe, sous-groupe, espace vectoriel, base, morphismes...) seront supposées connues.

Pour des raisons de clarté, chaque chapitre essaie, dans la mesure du possible, de se résumer à ce qui nous paraît essentiel dans la théorie. Toutefois, on pourra trouver des compléments et des développements possibles dans les annexes au chapitre.

Nous avons aussi ajouté un bon nombre d'exercices à chaque chapitre : des exercices classiques de type écrit-oral d'agrégation (interne-externe), des illustrations et exemples du cours, des compléments de cours, parfois quelques notions introductives d'outils de la recherche actuelle, mais aussi des développements possibles pour un oral d'agrégation, c'est-à-dire, un sujet à spectre suffisamment large et formaté autour d'une quinzaine de minutes d'exposition. La correction des exercices, qui constitue la nouveauté essentielle de cette édition, est rédigée de façon, on l'espère, limpide pour celui qui a digéré le chapitre correspondant.

Le chapitre I n'est là qu'à titre d'exemple heuristique. Il nous a paru important de démarrer sur un résultat bien connu — le théorème du rang, qui proclame que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang — pour mettre en place les premières balises d'une méthode générale qui sera appliquée tout au long de l'ouvrage. En fait, il s'agira moins de découvrir ce théorème que de s'initier à une vision (le point du vue des groupes) et à un vocabulaire adapté (celui des actions de groupes) qui servira par la suite. L'interprétation de ce théorème se fera donc à travers les actions de groupes (ici, l'action dite de Steinitz), l'invariant complet (ici, le rang), la « forme normale », les algorithmes liés au calcul de l'invariant (le fameux algorithme de Gauss[4]), et enfin, sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, l'étude des adhérences d'orbites qui amènent à la notion d'ordre de dégénérescence (ici, les rangs sont ordonnés par l'ordre des naturels).

Le chapitre II présente *l'idée essentielle* du livre. On y trouvera les clés (définitions, vocabulaire, résultats) de tout ce qui servira par la suite, et même, n'ayons pas peur de le dire, les clés de la plus grande partie du programme universitaire (premier et deuxième cycles) d'algèbre et de géométrie. Toutes les notions étudiées *in vivo* dans le chapitre précédent seront ici définies en bonne et due forme et des résultats généraux sur les actions topologiques seront établis. Le théorème d'homéomorphisme (en deux versions, dont l'une moins générale mais facile à établir) est le théorème central du chapitre. Il donne un cadre assez général et raisonnable qui fournit un lien entre l'étude des groupes et celle de la géométrie (au sens large !), et ainsi, motive l'étude des groupes topologiques. On trouvera en annexe II-E un tableau des actions topologiques (ou pas) les plus connues (ou pas), dont le but est de synthétiser les connaissances en « algèbre-géométrie » de l'étudiant à l'agrégation (voire plus), tout en suggérant la puissance du concept. Une colonne de ce tableau est particulièrement parlante : la colonne des invariants, qui montre que la plupart des notions du programme peuvent se réaliser comme invariants d'actions de groupes. Le groupe et la notion d'action apparaissent comme un outil pédagogique remarquable. On constatera aussi dans ce florilège un lien fort entre la transitivité de certaines actions et des théorèmes de type « base incomplète ».

De par la familiarité (supposée) du lecteur avec la diagonalisation, le chapitre III sur la réduction paraît être un bon début pour mettre en œuvre le programme annoncé. Le problème de la réduction se résume en la détermination d'un invariant total pour l'action de conjugaison du groupe linéaire sur les endomorphismes représentés par les matrices carrées. La stratégie consiste dans un premier temps à diviser le problème en une étude d'invariants totaux, d'une part, sur les matrices diagonalisables, d'autre part, sur les matrices nilpotentes. La première étude aboutit à la notion de spectre (dans un corps algébriquement clos), en faisant toutefois attention au fait que le spectre est vu comme la donnée de complexes (non nécessairement distincts) à permutation près, ce qui est sensiblement différent de la notion habituelle (mais plus naïve) d'« ensemble de valeurs propres »[5]. La seconde

[4] In Gauss we trust !

[5] Certains auteurs en font la distinction en parlant de *spectre* et de *spectre complet*.

étude aboutit à la notion de diagramme de Young comme invariant, et les formes de Jordan y font office de formes normales. C'est la décomposition de Dunford qui va permettre de fournir une réponse au problème global (sur les endomorphismes) à partir des deux solutions partielles (à partir des endomorphismes diagonalisables et nilpotents). La compréhension des adhérences d'orbites se fait aussi en deux temps : le cas diagonalisable ne fournit que des orbites fermées, lesquelles ne posent donc aucun problème ; en revanche, le cas nilpotent débouche sur l'ordre de Chevalley pour lequel le choix des diagrammes de Young est particulièrement pertinent. Nous déduisons des deux sous-cas une synthèse pour un invariant total dans le cadre de la réduction des matrices complexes ; disons un premier horizon pour l'algèbre linéaire de licence[6]. Nous donnons ensuite une version plus approfondie, valable sur tous les corps, avec les bien nommés « invariants de similitude ». On en profitera pour parler des notions de semi-simplicité, qui généralise la diagonalisabilité. La notion de commutant, liée aux stabilisateurs d'orbites, sera étudiée dans le tome 2.

Le chapitre IV qui suit part d'un problème omniprésent en algèbre linéaire : celui de la résolution des systèmes linéaires. La méthode dite du pivot de Gauss s'interprète alors comme une étude de formes normales pour l'action du groupe linéaire (encore lui) par multiplication à gauche sur l'espace des matrices. Ici, la recherche d'un invariant aboutit à la notion de noyau et, de façon plus concrète et combinatoire, à la notion de matrice échelonnée réduite. Une version duale débouche sur la notion d'image et de matrice co-échelonnée. On interprète également ces formes normales (échelonnées et co-échelonnées réduites), respectivement, comme la recherche d'une équation paramétrique d'un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ et de son équation cartésienne ; ces équations étant déterminées de façon unique (et algorithmique s'il vous plaît !) pour un sous-espace fixé. La dualité cartésienne-paramétrique[7] peut alors être décrite par une combinatoire simple. On a ensuite besoin de comprendre l'espace topologique dans lequel ces invariants évoluent, et l'on étudie alors la grassmannienne ; noyaux et images sont des sous-espaces, et il devient maintenant naturel d'étudier leur ensemble comme espace topologique. On présente l'outil permettant de trivialiser localement sa topologie : la décomposition en cellules.

Le chapitre V traite encore de classification. Il s'agit là de la classification des formes bilinéaires et plus précisément des formes bilinéaires symétriques, qui permettent d'étudier les formes quadratiques, en caractéristique différente de 2. Encore une fois, on se ramène à l'étude de l'action du groupe

[6] Un second horizon est donné par l'étude des représentations de carquois, que l'on expose dans [7].

[7] Qui s'apparente à la dualité tragique-comique dans le combat ordinaire de la vie, mais nous ne développerons pas ce point de vue.

linéaire, mais cette fois-ci par congruence sur les matrices symétriques. On se rend compte que l'invariant total dépend drastiquement du corps de base choisi. On se contentera de fournir de tels invariants pour les corps $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{F}_q$. On retrouve alors des invariants, comme le rang, la signature, et le discriminant, ce dernier généralisant le discriminant bien connu en degré 2, que tout étudiant aura rencontré au lycée. Une fois les orbites classées, on s'intéresse à leurs stabilisateurs, qui vont fournir les derniers « groupes classiques » que l'on reverra au chapitre suivant : les groupes orthogonaux. Nous en profiterons pour étudier leur action naturelle sur l'espace vectoriel ambiant. On verra qu'il n'y a pas de « théorème de base incomplète » adapté au contexte (sauf si le groupe orthogonal est associé à un produit scalaire euclidien), et que la transitivité des actions dépend d'un théorème plus crochu : le théorème de Witt. De par leur ubiquité, les applications de la classification des formes quadratiques sont innombrables, surtout dans le cadre de l'oral de l'agrégation, où des connaissances de type transverse sont attendues. Nous nous concentrerons en particulier sur les coniques, la réciprocité quadratique (en annexe), et les formes de Hankel (en exercice).

Le chapitre VI a pour but de développer des outils permettant d'étudier les groupes classiques pour eux-mêmes, selon le principe du « reculer pour mieux sauter ». On y introduit le théorème de décomposition polaire qui peut être vu comme une généralisation de la fameuse décomposition polaire sur $\mathbb{C}$, mais aussi comme un théorème de séparation topologique. Utiliser la décomposition polaire sur un groupe, c'est diviser son étude topologique en deux études plus simples, celle d'un sous-groupe compact maximal et celle d'un espace topologique homéomorphe à un espace vectoriel. Nous donnerons en développement et en exercices plusieurs études de groupes utilisant cette décomposition. L'étude de l'exponentielle trouvera tout à fait sa place dans ce chapitre.

Ajouts à la seconde édition

Voici, chapitre par chapitre les principaux compléments propres à la nouvelle édition (outre la correction des exercices, bien entendu).

Chapitre I.–

On a renforcé la partie sur les propriétés générales des actions de groupes. En particulier, on passe plus de temps sur le principe de conjugaison et le principe de translation, en donnant des exemples les illustrant. Nous avons ajouté l'étude comparative entre les orbites pour l'action d'un groupe et pour l'action induite d'un sous-groupe.

Chapitre II.–

On a trouvé bon d'ajouter un paragraphe faisant le point sur la géométrie affine. Pour cela, on présente plusieurs réalisations du groupe affine (comme produit semi-direct, comme sous-groupe du groupe linéaire, comme sous-groupe du groupe projectif), en lien avec des réalisations de l'espace affine sur lequel il agit. Nous avons également ajouté des informations sur la connexité, en particulier, sur les composantes connexes dans le cadre, d'une part, des espaces topologiques, d'autre part, des groupes topologiques.

Chapitre III.–

Il aurait été dommage de ne pas présenter les stabilisateurs de matrices représentant les orbites nilpotentes. Voilà qui est fait ! Nous avons également précisé la façon dont l'étude des orbites nilpotentes, jointe au lemme des noyaux, permettait de maîtriser la réduction des endomorphismes sur $\mathbb{C}$. Il était important de faire une pause sur ce sommet (local) de l'algèbre linéaire, afin de contempler le panorama.

Chapitre IV.–

Il s'agit ici d'un chapitre moins connu des étudiants, même s'il suit la trame très classique des chapitres précédents : « action de groupe-classification des orbites-forme normale-topologie des adhérences », et pour une action bien naturelle : l'action du groupe linéaire à gauche, ou à droite, sur l'espace des matrices. Les méthodes sont élémentaires (essentiellement basées sur le pivot de Gauss), mais inévitablement techniques. Le chapitre a été un peu remanié, on y a ajouté quelques exemples pour rendre les choses un peu plus digestes. Il nous a paru intéressant de présenter la dualité équation paramétrique/équation cartésienne des sous-espaces sous l'éclairage des actions de groupes.

Chapitre V.–

Le chapitre a été un peu remanié afin de mettre en exergue la « diagonalisation » des formes bilinéaires symétriques comme point de départ de toutes les classifications sur les divers corps de base. Les coniques sont présentées en deux temps ; dans un premier temps, on expose l'étude classique sur $\mathbb{R}$ (classification affine et classification euclidienne), puis, dans un second temps, on donne les moyens d'obtenir, sur un corps quelconque, la classification des coniques à partir de celle des formes quadratiques.

Nous avons aussi un peu plus insisté sur les formes hermitiennes et leurs spécificités. En particulier, nous avons placé un addendum sur les formes polaires et sur les produits scalaires. Il nous a semblé bon de faire le point sur le théorème de Sylvester et ses conséquences. Enfin, par souci de complétude, la formule de la réciprocité quadratique s'est vue augmentée de ses lois complémentaires.

Chapitre VI.–

Ce chapitre n'a pas été sensiblement amendé. Nous avons tout de même ajouté une jolie méthode de Newton adaptée au calcul de la décomposition polaire, faisant écho à celle, introduite en annexe du chapitre III, fournissant un algorithme efficace pour calculer la décomposition de Dunford.

Références de base

Ce livre a été écrit sous l'influence majeure de Daniel Perrin, Michèle Audin et Rached Mneimné, et en particulier de leurs ouvrages [20], [2], [17] et [18], dont la lecture est plus que chaudement recommandée. Qu'ils nous pardonnent de nous abriter derrière eux. Les deux auteurs ont été fortement influencés par la magistrale présentation de la géométrie dans l'esprit du programme d'Erlangen que l'on trouve dans la première annexe de [14].

L'expérience de l'enseignement en université a été une autre source d'inspiration. C'est durant la période des mouvements universitaires de 2008-2009 contre la loi LRU que les étudiants de master de l'université Lyon 1 ont eu l'idée de se réunir sur un forum internet pour travailler en s'entraidant, épaulés également par les enseignants-chercheurs, dans une ambiance sympathique et parfois bien nocturne. Ce forum a été un outil majeur, qui nous a permis de constater et d'archiver les points du programme d'agrégation qui posaient problèmes aux étudiants. Un premier polycopié est né de cette expérience, et ce dernier n'a cessé de s'enrichir d'année en année grâce aux remarques des agrégatifs qui l'utilisaient.

Remerciements

Nous remercions vivement Serge Parmentier et Kenji Iohara, qui nous ont fourni un grand nombre d'exercices ; mention spéciale à Johann Colombano-Rut, dont les notes de cours en LaTeX avec de belles illustrations ont fourni une première version de ce qui est devenu ce livre ; à Florent Hours pour son investissement considérable dans le forum des étudiants. Nous remercions également nos prédécesseurs : les professeurs qui ont enseigné le cours de « Groupes et géométrie » durant les années précédentes : Claude Roger, Gilbert Hector, et notre regretté collègue Fokko Du Cloux. Nous tenons à remercier les étudiants qui, soit par des questions insistantes et bien fondées, soit par leurs remarques avisées, voire une lecture minutieuse, ont permis d'améliorer le livre : Benjamin Bertrand, Jérémy Legendre, François Viard, Hélène Mariette, Maxime Moine (du Haut-Bugey), Teddy Mignot, Julie Carlier, Jill-Jênn Vie, Marie Péronnier, et les autres. Un grand merci à Bruno Calado pour sa relecture des premiers chapitres et leurs annexes, il a su fureter dans les arcanes des preuves topologiques et a découvert des erreurs inavouables. Merci aussi à Amaury Thuillier, pour ses conversations, corrections et suggestions utiles, à Stéphane Lamy, pour des remarques pertinentes, et enfin à Michel Cretin, préparateur à l'agrégation de Lyon 1, pour son intérêt dans notre projet. Merci, enfin, à Alberto Arabia et aux éditions Calvage & Mounet pour l'accueil et l'attention toute particulière qu'ils ont réservés à cet ouvrage.

Signalisation

Nous avons placé ça et là des signalisations qu'il est bon de savoir décoder. Voici une liste non exhaustive.

Danger classique.

Attention à rester dans le cadre des hypothèses. Une généralisation abusive pourrait être fatale.

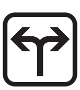
On dit qu'un sentiment de honte est vite passé, mais c'était avant Youtube. Évitez les peaux de banane !

Concept délicat, à manipuler avec précaution si l'on ne veut pas se retrouver au fond du ravin.

Concept plus métaphysique, qui peut engendrer des désordres existentiels.

Pourquoi ne pas faire une petite pause et admirer le paysage ?

Résultat de bon niveau, qui peut s'exposer avec brio lors d'un oral de concours.



Alternative.

Résultat bien sympathique, mais dont la preuve nous passera au-dessus de la tête. Pour ceux qui aiment prendre de l'altitude.

Avertissement.– Les questions que vous trouverez dans ce livre peuvent être parfois des questions sincères, c'est-à-dire des questions dont nous ne connaissons pas la réponse. Merci aux lecteurs d'en tenir compte dans leurs mails : envoyez-nous vos réponses, s'il vous plaît ! Dans le même ordre d'idée, les notations et les concepts pourront subir, ici et là, quelques fluctuations un peu erratiques. Qu'on le pardonne aux auteurs en se rappelant la phrase d'Oscar Wilde : *Consistency is the last refuge of the unimaginative.*