Table des matières

Préface

1. Les quatre portes de Quadratic City xi
2. Plaidoyer en faveur de la dualité xv
3. Le poids du corps xvii
4. Espaces vectoriels euclidiens et formes quadratiques xviii
5. Algèbres de Clifford xix
6. La géométrie éternelle xx
7. La géométrie analytique xxiv
8. La figure xxv
9. Nommer pour aimer xxvii
10. Suggestions xxvii
11. En conclusion xxviii

Avant-propos sur les formes quadratiques

1. Une ou plusieurs portes d'entrée xxix
2. Qu'est-ce donc qu'une forme quadratique ? xxx
3. Quand Bourbaki s'en mêle xxxi
4. Linéariser pour gagner xxxii
5. La dernière porte, d'un pas primesautier xxxiii
6. En attendant la géométrie xxxiv

I. Formes quadratiques

1. Manipulations premières sur la relation de congruence 1
2. Formes quadratiques – First encounter 5
3. L'espace vectoriel $\mathcal{Q}(\mathrm{E})$ et l'action naturelle de $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$ 19
4. Divers objets associés à une forme quadratique 22
5. Orthogonalité par rapport à une forme quadratique 35
6. La réduction de Gauss 47
7. Les cas faciles 57
8. Réduction orthogonale simultanée 71
9. Deux nouveaux objets associés à une forme quadratique 72
10. Retour sur la classification 75
11. Les groupes de Witt et de Grothendieck-Witt 90
12. Appendice. Réduction dans un cadre euclidien 99

II. Systèmes de Coxeter
1. Sur la répartition de vecteurs dans l'espace 117
2. Utilisation des diagrammes de Dynkin 119
3. Classification des diagrammes de Dynkin 124

III. Miscellanées
1. Fibration au-dessus d'un corps fini 141
2. Extension du corps de base – Théorème de Springer 146

IV. Algèbres de Clifford
1. Introduction 151
2. Propriété universelle 153
3. Produit tensoriel-gradué d'algèbres $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées 156
4. Le calcul de la dimension 161
5. Exemple fondamental.– Les algèbres de quaternions 163
6. Autre exemple.– La dimension 3 167
7. Le cas de la dimension 4 171
8. Simplicité et centre de l'algèbre de Clifford 172
9. Algèbres de Clifford réelles 175
10. L'algèbre de Clifford d'un espace hyperbolique 179
11. Le coup du chapeau 181
12. Appendice. L'algèbre End(E) et ses modules simples 183

V. Géométrie affine et formes quadratiques
1. Espaces affines : une vision catégorique 189
2. Complétion projective d'un espace affine 197
3. Calcul analytique dans le plan affine $\mathcal{E}$ 200
4. Les homographies 203
5. L'inversion harmonique 205
6. Intersection d'un cône isotrope avec un sous-espace affine 208
7. Cône isotrope, orthogonalité, contact 211
8. Coniques à centre – Asymptotes 213
9. Exemples 214
10. Les vertus du stéthoscope différentiel 221
11. Retour aux auscultations traditionnelles 227
12. Coniques circonscrites 232
13. Compléments sur la polarité 237
14. Conique définie par cinq points 240
15. Le théorème de Pascal 245
16. Équation tangentielle d'une conique non dégénérée 248
17. Coniques et inversion harmonique 257
18. Théorème de Carnot 259
19. Diamètres conjugués 263
20. L'inversion isotomique 269

21. Polaire triangulaire 283
22. Faisceaux ponctuels de coniques 286
23. Compléments sur l'isotomie 324
24. Triangles autopolaires et triangles harpons 337
25. Huit points coconiques 347
26. Un sujet d'examen : l'isothymie 350

VI. Géométrie affine euclidienne et formes quadratiques
1. Calcul analytique dans le plan affine euclidien 355
2. Introduction aux foyers – Rédaction hâtive 368
3. Les foyers pour de bon 374
4. Directions principales et axes 395
5. Orthogonalité et hyperboles équilatères 399
6. L'inversion isogonale 412
7. Une hyperbole équilatère remarquable 420
8. Nouveaux objets, nouveaux noms 428
9. Inverses isotomiques du cercle circonscrit et de la droite d'Euler 431
10. L'inverse isogonal de l'ellipse de Steiner 433
11. Centres isodynamiques 439
12. Triangles autopolaires. Aspect euclidien 442
13. Triangles orthologiques 444
14. Quelques cogitations, avant d'aller plus loin 452
15. Complément sur les faisceaux (linéaires) de coniques 456
16. Retour aux axes de l'ellipse de Steiner. Récapitulation 473
17. Remarque culturelle de Géométrie différentielle 478
18. Excentricité minimale dans un faisceau 479
19. Assortiment avec une hyperbole équilatère 485
20. Examen 1873, université de Yolki-Palki 488
21. Un sujet d'examen : plans cycliques d'un autoadjoint 490

VII. Droites et coniques projectives ; le birapport
1. Compléments sur la droite projective 497
2. Polarité relative à une conique projective 504
3. Classification des homographies (cas réel) 505
4. Les coniques comme droites projectives 509
5. Paramétrages rationnels d'une conique 520
6. Homographies sur une conique 525
7. Un problème sur l'association harmonique 538
8. La circonscription harmonique 542
9. Résumé sur certaines propriétés de l'autopolarité 544

Appendice. Dimension des algèbres de Clifford

Bibliographie **549**
Index **551**

C'est à l'audace de leurs fautes de grammaire que l'on reconnaît les grands écrivains !

Henry de Montherlant

Préface

1. Les quatre portes de Quadratic City

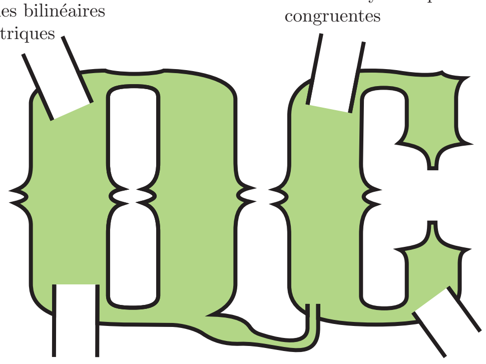
Les formes quadratiques ressortissent à ce que l'on appelle l'algèbre bilinéaire. C'est un chapitre sensiblement plus difficile que l'algèbre linéaire de base. Si l'algèbre linéaire représente en un certain sens le degré 1 des mathématiques, l'étude des formes quadratiques se situerait (avec d'autres sujets) au niveau 2 et l'algèbre bilinéaire générale au niveau 3. L'étude des formes quadratiques est un chapitre important des mathématiques, sur lequel on connaît beaucoup de choses, mais où tout est loin d'avoir été dit. Si l'on comparait ce territoire à celui d'une grande ville, on pourrait dire que l'on en a une maîtrise horizontale, mais pas pleinement verticale. Autrement dit, on en connaît les boulevards, les rues et peut-être même les ruelles, mais on est loin d'avoir investi ses gratte-ciel ou ses hauts monuments, et nombre d'iceux sont d'ailleurs comme disent nos amis d'Outre-Manche "*in the making*".

La première partie de ce livre présente un quadrillage raisonnable de cette ville, en étudie quelques quartiers pittoresques, en explore surtout les principales portes d'accès et explique comment ces accès sont reliés les uns aux autres. Elle néglige délibérément toute la partie arithmétique (aussi bien classique que moderne) de la théorie. Elle n'effleure que très très timidement les développements algébriques sophistiqués qui ont abouti à la formulation et la solution des conjectures de Milnor par Voevodsky et Morel. La deuxième partie est une promenade géométrique que peu de gens ont explorée ou suivie, en dehors du groupe irréductible des amoureux de la géométrie classique, perdus dans Paris ou la Province (et en particulier la Belgique et la Suisse), acculés à défendre la Géométrie à l'ancienne coûte que coûte dans les arrière-coulisses des préparations au CAPES et à l'Agrégation et surtout sur math.net autour des intervenants dissimulés sous les fameux pseudos j_j, JLT, pappus, poulbot, black et ses différents avatars, zephir, Bruno, Rescassol, Bouzar, Soland et quelques autres…

Cette deuxième partie est (tout comme la première) quelque peu inédite dans sa sensibilité et son propos. On y voit la portée géométrique de l'axiomatisation de la géométrie et l'usage en force des formes quadratiques pour étudier ces courbes et surfaces du second degré que sont les coniques et les quadriques[1].

1.1. Introduction aux formes quadratiques

Pour parler schématiquement, il existe essentiellement quatre portes d'accès aux formes quadratiques, et l'étudiant devrait non seulement se familiariser avec ses différentes entrées mais savoir aussi passer facilement d'une entrée à une autre. La porte d'entrée la plus commune et qu'adopte la plupart des auteurs est à notre sens la moins intéressante. Elle consiste à présenter les formes quadratiques à travers l'étude des formes bilinéaires symétriques. Les différentes notions de base sont offertes sans grands commentaires, et lorsque l'on vient vers ce territoire après avoir acquis une certaine expertise de l'algèbre linéaire, ce qui est d'ailleurs le cas dans l'ordre des choses, on a l'impression d'arriver dans un territoire exotique, et quelque peu déroutant. Nous citerons à cet effet et juste à titre d'exemple les vocables de non-dégénérescence, et d'isotropie, qui contrastent en apparence avec les notions de noyau, de rang pour les applications linéaires.



La deuxième porte d'entrée, qui correspond un peu à l'ordre historique, est celle de l'étude des fonctions polynomiales homogènes de degré 2 en plusieurs variables.

[1]Peu de place est accordée en fait aux quadriques dans ce livre, mais le lecteur imaginatif saura dans bien des cas porter en dimension supérieure nombre de résultats ici proposés, en dimension 2, pour les coniques.