

« Que dites-vous ?... C'est inutile ?... Je le sais ! Mais on ne se bat pas dans l'espoir du succès ! Non ! non, c'est bien plus beau lorsque c'est inutile ! »

Cyrano de Bergerac

EDMOND ROSTAND

Chapitre V

Géométrie affine et formes quadratiques

Du fait qu'il n'est plus possible à notre époque de supposer familières les notions d'*espace affine* ou d'*espace projectif*, nous commencerons ce chapitre avec un petit nécessaire de première urgence ; la trousse complète est à trouver au chapitre VII.

1. Espaces affines : une vision catégorique

Le langage des catégories a pénétré tous les domaines des mathématiques. Il n'est ainsi que peu de sujets en Algèbre qui n'aient déjà adopté une reformulation par les catégories. C'est d'ailleurs ainsi que nous allons introduire les espaces affines¹. Cela étant dit, nous essaierons de nous contenter des notions les plus simples concernant les catégories, et nous renverrons le lecteur à d'autres ouvrages pour une lecture plus poussée.

Dans tout ce chapitre, nous nous limiterons à l'étude des formes quadratiques en dimension 3 au plus.

1.1. Rappel sur les catégories

Rappelons que la donnée d'une catégorie consiste à se donner une collection d'*objets* et, pour tout couple (X, Y) de tels objets d'un ensemble $\text{Hom}(X, Y)$, de *flèches*, notées $X \rightarrow Y$, le tout étant soumis aux conditions suivantes.

¹Outre que c'est à la mode, c'est efficace.

1. Pour un triplet d'objets (X, Y, Z) , la donnée de deux flèches

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \quad \text{et} \quad Y \xrightarrow{\psi} Z$$

donne lieu à une flèche $X \xrightarrow{\theta} Z$, notée par la *composition* $\theta = \psi \circ \varphi$.

2. La relation de composition est associative.
3. Pour tout objet X , il existe une flèche $X \rightarrow X$, appelée identité de X et notée id_X , telle que pour tout objet Y on ait $\varphi \circ id_X = \varphi$ pour toute flèche $X \xrightarrow{\varphi} Y$ et $id_X \circ \psi = \psi$ pour toute flèche $Y \xrightarrow{\psi} X$.

Commençons par donner quelques exemples de catégories².

1.2. Exemples

- La catégorie des ensembles **Ens** dont les objets sont les ensembles et les flèches les applications entre les ensembles.
- La catégorie des groupes **Gr** dont les objets sont les groupes et les flèches les homomorphismes de groupes.
- La catégorie $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^f$ des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps \mathbb{K} , dont les objets sont les espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{K} et dont les flèches sont les applications linéaires.
- La catégorie des espaces topologiques **Top** dont les objets sont les espaces topologiques et les flèches les application continues.
- Une catégorie importante est celle des ensembles pointés **Ens*** dont les objets sont les couples (X, x_0) , où X est un ensemble et x_0 un élément de cet ensemble, et dont les flèches sont les applications entre ensembles, envoyant un point de base sur l'autre.
- La catégorie des G -ensembles **G-Ens**, où G est un groupe, dont les objets sont les ensembles X munis d'une action (à gauche) par G , et dont les flèches sont les applications G -équivariantes³.
- La catégorie des R -modules **Mod $_R$** , où R désigne un anneau (unitaire), dont les objets sont les R -modules (à droite) et les flèches les applications R -linéaires.

1.3. La catégorie Véto et la catégorie des espaces affines

On se donne un corps \mathbb{K} , fixé une fois pour toutes. Nous définissons la catégorie **Véto** comme il suit.

²Bien que cela ne soit aucunement obligatoire, les exemples choisis sont, à l'exception du cinquième exemple, des catégories où les objets sont de braves ensembles et les flèches des applications particulières entre ces ensembles. Le lecteur débutant se contentera de ce qui lui parle dans la liste.

³On appelle ainsi une application $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ telle que $\varphi(g \cdot x_1) = g \cdot \varphi(x_1)$, quels que soient $g \in G$ et $x_1 \in X_1$.

- les objets sont les couples (V, τ) , où V est un espace vectoriel sur notre corps \mathbb{K} et $\tau : V \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire *non nulle* ;
- les flèches $(V, \tau) \xrightarrow{f} (V', \tau')$, appelées aussi *Véto-morphismes*, sont données par les applications linéaires $f : V \rightarrow V'$ telles que ${}^t f(\tau') = \tau$, soit encore $\tau' \circ f = \tau$.

Autrement dit, $f : V \rightarrow V'$ est une application linéaire telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\quad f \quad} & V' \\
 \searrow \tau & & \downarrow \tau' \\
 & & \mathbb{K}
 \end{array}$$

1.4. Exercice. Étant donné un Véto-endomorphisme $f : (V, \tau) \rightarrow (V, \tau)$, montrer que l'endomorphisme $f : V \rightarrow V$ laisse stables les deux sous-ensembles $E := \{v \in V, \tau(v) = 0\}$ et $\mathcal{E} := \{v \in V, \tau(v) = 1\}$. On note \vec{f} l'endomorphisme f_E induit par f sur le sous-espace vectoriel E de V . Montrer que si f et g sont deux Véto-endomorphismes, on a $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.

Maintenant, introduisons la catégorie des espaces affines sur \mathbb{K} de dimension finie, notée $\mathbf{Aff}_{\mathbb{K}}$, dont les objets sont les espaces affines, que nous définissons sans tarder.

1.5. Définition. Un espace affine est la donnée d'un couple (\mathcal{E}, E) , où E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie et \mathcal{E} est un ensemble muni d'une action simplement transitive du groupe additif sous-jacent à E .

On appelle les éléments de E des vecteurs et les éléments de \mathcal{E} des points.

1.6. Remarques

- Un vecteur \vec{v} de E sera donc pensé comme définissant une transformation $\Gamma_{\vec{v}}$ sur \mathcal{E} , appelée translation de vecteur \vec{v} . Comme l'action est supposée simplement transitive, on a (par définition même) les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_e &= id_{\mathcal{E}}, & \Gamma_{\vec{v}_1} \circ \Gamma_{\vec{v}_2} &= \Gamma_{\vec{v}_1 + \vec{v}_2} \\
 \forall A, B \in \mathcal{E}, \exists! \vec{v} \mid & \Gamma_{\vec{v}}(A) = B.
 \end{aligned}$$

On note alors $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

- On peut se demander où intervient la structure d'espace vectoriel. Un instant de réflexion nous fait nous rendre compte que le groupe sous-jacent à un espace vectoriel de dimension finie porte en lui l'empreinte puissante de l'espace vectoriel ambiant. Ainsi, si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ est un corps fini, et si l'on note n la dimension sur \mathbb{K} , alors on a forcément⁴ l'isomorphisme de groupes

$$(E, +) \simeq \mathbb{F}_p^n = \underbrace{\mathbb{F}_p \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}_p}_{n \text{ fois}}.$$

- Notons aussi que si le corps \mathbb{K} est de caractéristique nulle, le groupe additif sous-jacent à un \mathbb{K} -espace vectoriel E est en particulier divisible : l'équation $n\vec{x} = \vec{v}$, où l'entier n est supposé non nul, admet toujours une solution, à savoir $\vec{x} = \frac{1}{n} \cdot \vec{v}$. Cette propriété vitale nous permettra de parler du milieu d'un segment, et plus généralement de barycentres !

Il nous faut désormais définir les flèches entre espaces affines, ce qui n'est pas aussi naturel que dans les précédents exemples. Le secret réside en vérité dans l'invention des barycentres, notion fondamentalement propre aux espaces affines. Nous définirons dès lors les flèches comme les applications entre espaces \mathcal{E} et \mathcal{E}' qui *conservent les barycentres*⁵.

Une fois que l'on a défini une telle application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$, on lui associe une application linéaire, appelée *la flèche de f* ,

$$\begin{aligned} \vec{f} : E &\rightarrow E' \\ \vec{v} &\mapsto \vec{w}, \end{aligned}$$

où \vec{w} est donné par $\vec{w} = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ lorsque $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

On retrouve en fait la relation qui exprime que pour tout point $M \in \mathcal{E}$ et tout vecteur $\vec{v} \in E$:

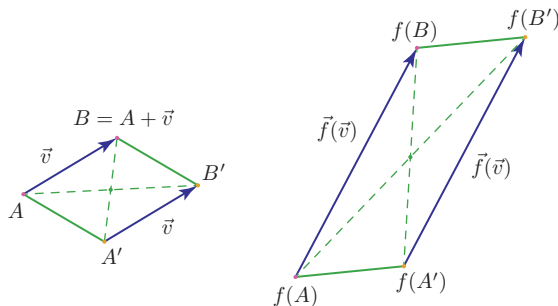
$$f(M + \vec{v}) = f(M) + \vec{f}(\vec{v}).$$

Nous invitons vivement le lecteur à vérifier, en se reportant à la figure qui suit, que la condition que l'application f conserve les barycentres fait en sorte que cette définition donnant \vec{f} ne dépend pas, comme il se doit, des

⁴Il existe pourtant beaucoup de structures de groupes abéliens à p^n éléments, et de façon précise il y a $p(n)$ classes d'isomorphie de groupes abéliens de cardinal p^n , où $p(n)$ désigne le nombre de partitions de l'entier n . On trouvera une démonstration relativement concise de cela au dernier exercice de [Mn-97].

⁵La notion de barycentre est une notion familière, quoique non triviale. Nous en supposerons le lecteur préalablement bien informé.

points A et B choisis dans l'espace affine \mathcal{E} :



On peut dès lors écrire la suite exacte fondamentale de la géométrie affine :

$$(E, +) \simeq (T(\mathcal{E}), \circ) \hookrightarrow GA(\mathcal{E}) \xrightarrow{\twoheadrightarrow} GL(E),$$

où le groupe $GA(\mathcal{E})$ figurant au milieu de cette suite courte est le groupe affine (formé des transformations affines, c'est-à-dire des bijections affines de l'espace \mathcal{E} dans lui-même), où $T(\mathcal{E})$ désigne le sous-groupe (distingué⁶), des translations dans \mathcal{E} , et où l'épimorphisme à droite est l'*homomorphisme flèche*, donné par

$$\begin{array}{ccc} GA(\mathcal{E}) & \twoheadrightarrow & GL(E) \\ f & \mapsto & \vec{f}. \end{array}$$

1.7. Foncteurs et isomorphisme de catégories

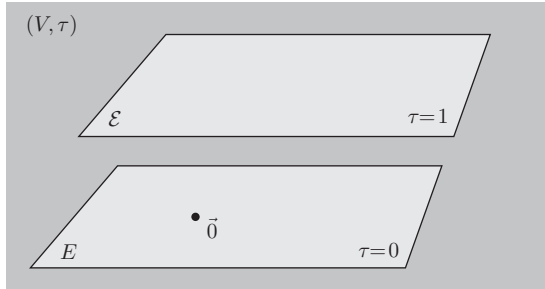
Nous avons mis en relief ces deux catégories, car, comme on le verra sous peu, il s'agit essentiellement de la même chose (dans le sens où, à un objet de **Véto**, on fera correspondre un objet de **Aff_ℝ**, et inversement). Il va falloir donc manipuler des « applications » d'une catégorie dans une autre, en l'occurrence des *foncteurs*.

1.8. Définition. Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories. Un foncteur F de \mathcal{C} dans \mathcal{D} est la donnée pour tout objet X de \mathcal{C} d'un objet $F(X)$ de \mathcal{D} et pour toute flèche $X \xrightarrow{\phi} Y$ d'une flèche $F(X) \xrightarrow{F(\phi)} F(Y)$. On suppose en outre la préservation des identités et la compatibilité avec la composition des flèches dans \mathcal{C} et \mathcal{D} .

• Décrivons maintenant comment l'on passe de façon fonctorielle d'un objet (V, τ) à un objet (\mathcal{E}, E) .

⁶Il est bon de noter que $f \circ T_{\vec{v}} \circ f^{-1} = T_{\vec{f}(\vec{v})}$. Attention ici à l'erreur récurrente qui consiste à écrire précipitamment le second membre de l'égalité sous la forme $T_{f(\vec{v})}$, erreur à bannir, bien sûr, étant donné que l'application f s'applique sur les points et non sur les vecteurs !

Se donner un couple (V, τ) revient en fait à se donner la figure suivante :



En effet, si l'on se donne au départ (V, τ) , il est clair que l'on dispose de l'hyperplan affine $\mathcal{E} = \{\vec{v} \in V, \tau(v) = 1\}$ et de sa direction $E = \ker \tau$. Inversement, la donnée de l'hyperplan affine $\mathcal{E} \subset V$, implique celle de l'hyperplan vectoriel E , dont l'orthogonal E^\perp dans le dual V^* de V est de dimension 1, et la forme τ est alors l'unique forme linéaire de E^\perp qui vaut 1 en un point de \mathcal{E} .

Nous décrivons également l'action de ce foncteur sur les flèches de **Véto**. Pour simplifier, supposons que l'on dispose d'une flèche d'un objet vers lui-même, soit $f : (V, \tau) \rightarrow (V, \tau)$. Cette flèche est une application linéaire et vérifie en outre $\tau \circ f = \tau$. On peut alors définir l'application $f_{\mathcal{E}}$ qui en résulte, car f stabilise tous les hyperplans parallèles à $\ker \tau$, et l'on vérifie facilement que cette application induite sur \mathcal{E} est *affine*⁷ :

$$f_{\mathcal{E}}(G) = f(\overrightarrow{OG}) = f\left(\sum_i \alpha_i \overrightarrow{OM_i}\right) = \sum_i \alpha_i f|_{\mathcal{E}}(M_i),$$

où le point $G = \sum_i \alpha_i M_i$ est le barycentre des points pondérés (M_i, α_i) , où les scalaires α_i vérifient la condition habituelle $\sum_i \alpha_i = 1$.

• Décrivons maintenant le foncteur inverse $(\mathcal{E}, E) \rightarrow (V, \tau)$.

Considérons à cet effet le dual affine de \mathcal{E} , à savoir l'espace vectoriel des applications affines de $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}$. C'est un espace vectoriel pointé, et cela en la forme affine constante $\mathcal{E} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$. Or, d'une façon générale, la donnée d'un espace vectoriel pointé (W, \vec{w}_0) , où \vec{w}_0 est un vecteur de W (autre évidemment que le vecteur nul⁸), fournit aussitôt un objet dans la catégorie **Véto**, en l'occurrence l'objet $(W^*, \varepsilon_{\vec{w}_0})$, où W^* est le dual algébrique de W (à différencier du dual affine précédemment utilisé) et $\varepsilon_{\vec{w}_0}$ l'évaluation en \vec{w}_0 .

⁷Il importe ici de rappeler que l'application induite par f sur le sous-espace vectoriel E est quant à elle *linéaire*, et qu'il est d'usage de la noter \vec{f} .

⁸Tout espace vectoriel, comme d'ailleurs tout groupe, est un ensemble pointé d'office. Parler d'un espace vectoriel pointé, c'est donc privilégier un élément autre que l'élément neutre $\vec{0}$.

Partant maintenant de l'objet (\mathcal{E}, E) , et appliquant cela au dual affine de \mathcal{E} , on dispose donc d'un objet — que l'on notera (\mathcal{E}^v, τ) — dans la catégorie **Véto**. L'espace vectoriel \mathcal{E}^v correspondant à l'espace affine (\mathcal{E}, E) est appelé le *complété vectoriel* de \mathcal{E} , ou encore le *vectorialisé* de \mathcal{E} . Il est important de toujours penser le complété vectoriel comme accompagné de la forme linéaire privilégiée τ , définie plus haut⁹, et non pas comme seulement un espace vectoriel de dimension une de plus que l'espace affine \mathcal{E} .

Nous laissons au lecteur le soin de préciser l'action du foncteur précédent au niveau des flèches. Nous lui demandons surtout de retenir qu'au lieu de travailler avec un espace affine (dans notre cas de dimension 2), il est parfois préférable de travailler avec un espace de dimension 3 dans lequel le plan affine de départ apparaît comme un hyperplan privilégié. Cela nous donnera en tout cas la possibilité de produire élégamment et sans peine la complétion projective de l'espace affine (voir section suivante). Faisons auparavant une remarque importante.

1.9. Pratique du dessin affine

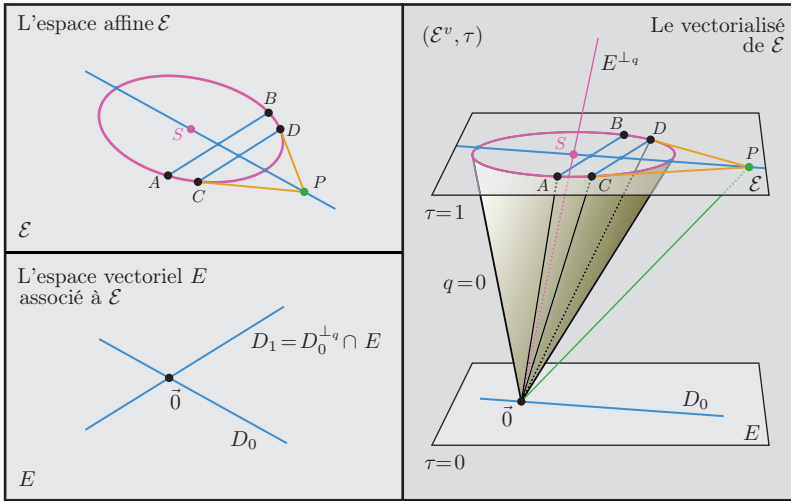
Nous conseillons vivement au lecteur de reproduire, quand cela est intéressant, une même figure géométrique dans un diptyque, où figurerait dans la moitié supérieure du côté gauche l'espace affine \mathcal{E} , et dans la moitié inférieure de ce même côté l'espace vectoriel associé E , alors que sur le côté droit se dessineraient l'espace affine \mathcal{E} et son espace vectoriel associé E plongés tous deux dans le complété vectoriel (\mathcal{E}^v, τ) .

Dans la figure qui suit, on a illustré, à titre d'exemple la notion de diamètre d'une conique affine relativement à une direction donnée. Le lecteur manquera sans doute, au stade de notre exposé, de saisir tous les ingrédients de la figure, et ce n'est que tout à fait normal. Il se contentera pour le moment d'en apprécier la beauté, et aura en revanche tout intérêt à y revenir une fois qu'il aura assimilé les notions utiles à cet effet.

⁹On peut ainsi voir le complété vectoriel comme la solution du problème universel suivant : étant donné $f : \mathcal{E} \rightarrow W$ une application affine à valeurs dans un espace vectoriel W , alors elle se prolonge de façon unique en une application linéaire $\tilde{f} : \mathcal{E}^v \rightarrow W$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E}^v & & \\
 \uparrow & \searrow \tilde{f} & \\
 \mathcal{E} & \xrightarrow{f} & W.
 \end{array}$$

La forme $\tau : \mathcal{E}^v \rightarrow \mathbb{K}$ est, bien sûr, celle qui prolonge la forme affine constante 1.



1.10. Exercice. Montrer le résultat suivant, dans l'une et l'autre des versions proposées ci-dessus de la notion d'espace affine : *une application affine (en dimension finie) admet un point fixe unique si, et seulement si, \vec{f} n'a pas 1 comme valeur propre.*

Indications. – Seule l'existence du point fixe mérite un mot.

▷ Dans la version affine classique, on met la main sur le point fixe F en le repérant par rapport à une origine arbitraire Ω . Autrement dit, il s'agit de déterminer le vecteur $\overrightarrow{\Omega F}$. Or,

$$\vec{f}(\overrightarrow{\Omega F}) = \overrightarrow{f(\Omega)f(F)} = \overrightarrow{f(\Omega)F} = \overrightarrow{f(\Omega)\vec{\Omega}} + \overrightarrow{\Omega F},$$

si bien que le vecteur $\overrightarrow{\Omega F}$ doit s'appliquer par l'endomorphisme $\vec{f} - \text{Id}_E$, supposé injectif, sur le vecteur $\overrightarrow{f(\Omega)\vec{\Omega}}$. Mais, en dimension finie, un endomorphisme injectif est bijectif. . .

▷ La deuxième approche consiste à remarquer qu'une application affine dans (V, τ) , avec $\dim V < \infty$, admet toujours 1 comme valeur propre, car elle a même polynôme caractéristique que sa transposée ${}^t f$, et que cette dernière vérifie ${}^t f(\tau) = \tau$, avec $\tau \neq 0$. Le sous-espace propre associé coupe par hypothèse E suivant le vecteur nul : il rencontre donc forcément \mathcal{E} .

▷ Une approche inédite, que nous traiterons de façon un peu brève, consiste à considérer l'espace affine $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ des applications affines de \mathcal{E} dans lui-même¹⁰, dont l'espace vectoriel associé est l'espace $\mathcal{A}(\mathcal{E}, E) \simeq \text{Hom}(\mathcal{E}^v, E)$

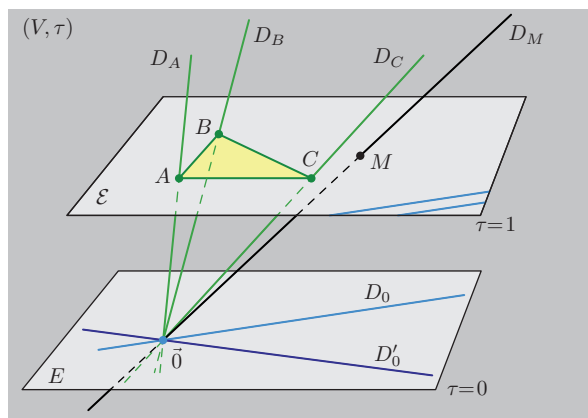
¹⁰Noter que cet espace affine est pointé en l'application $\text{Id}_{\mathcal{E}}$!

des applications affines de \mathcal{E} dans E . Il est facile de démontrer que si f et g sont deux applications affines de \mathcal{E} , le « vecteur » $f - g$ qui joint g à f est l'application affine $M \mapsto f(M) - g(M) \in E$, dont la flèche $\overrightarrow{f - g}$ est l'endomorphisme $\overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}$ de E . Si donc f est une application affine de \mathcal{E} , le vecteur $f - \text{Id}_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{A}(\mathcal{E}, E)$ admet pour fibre au dessus de 0 le sous-espace affine des points fixes de f et pour flèche $\overrightarrow{f} - \text{Id}_E$, qui est bijective par hypothèse. Il s'ensuit que l'application affine $f - \text{Id}_{\mathcal{E}}$ est bijective, et sa fibre au dessus de 0 est ainsi réduite à un unique point !

2. Complétion projective d'un espace affine

2.1. Définition. Soit V un espace vectoriel, nous considérons la relation de *colinéarité* entre deux éléments de $E \setminus \{0\}$; il s'agit d'une relation d'équivalence, et nous désignons par $\mathbb{P}(V)$ l'ensemble-quotient, que nous appellerons le *quotient projectif* de V ¹¹, et par π la surjection canonique de $E \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{P}(V)$. Par souci de simplification des énoncés, lorsque \mathcal{P} est une partie de V , nous appellerons *image projective*, ou *quotient projectif*, de \mathcal{P} l'image par π de $\mathcal{P} \setminus \{0\}$ (et non pas celle de \mathcal{P} , qui n'a pas de sens).

2.2. Définition. Partant de l'espace affine \mathcal{E} , l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$, où $V = (\mathcal{E}^v, \tau)$, est appelé *le complété projectif* de l'espace affine $\mathcal{E} = \tau^{-1}(\{1\})$. Les droites vectorielles de \mathcal{E}^v se répartissent en les droites qui percent \mathcal{E} et celles qui sont dans E .



¹¹On dit aussi habituellement que $\mathbb{P}(V)$ est l'espace projectif *attaché* à V .

Les points qui leur correspondent dans le projectif sont appelés respectivement les points à distance finie (c'est-à-dire les points de \mathcal{E}) et les points à l'infini¹². L'écriture suivante est alors justifiée :

$$\mathbb{P}(V) = \mathcal{E} \cup \mathbb{P}(E).$$

On notera bien en particulier que, désormais, \mathcal{E} est une partie de $\mathbb{P}(V)$, ce qui en justifie le qualificatif de *complété*.

Nous appellerons *droite projective* l'image projective d'un hyperplan de V ; une droite affine D de \mathcal{E} est incluse dans une unique droite projective \mathcal{D} , que nous appellerons la droite *complétée projective* de D . La différence $\mathcal{D} \setminus D$ consiste en un singleton D_∞ , qui est un point à l'infini et que l'on appelle le *point à l'infini* de D .

2.3. L'espace affine des supplémentaires d'un sous-espace vectoriel

Soit V_0 un sous-espace vectoriel fixé de dimension p de l'espace vectoriel V de dimension n . L'ensemble \mathcal{A}_{V_0} des supplémentaires S de V_0 dans V est en correspondance bijective avec l'ensemble des sections de la surjection canonique $\pi_0 : V \twoheadrightarrow V/V_0$. Plus précisément, si $\sigma : V/V_0 \rightarrow V$ vérifie

$$\pi_0 \circ \sigma = \text{Id}_{V/V_0}, \quad (*)$$

alors l'image $S := \text{Im}(\sigma)$ de l'application linéaire σ est un sous-espace supplémentaire de V_0 dans V . L'équation (*) ci-dessus est une équation linéaire avec second membre, dont l'équation homogène associée,

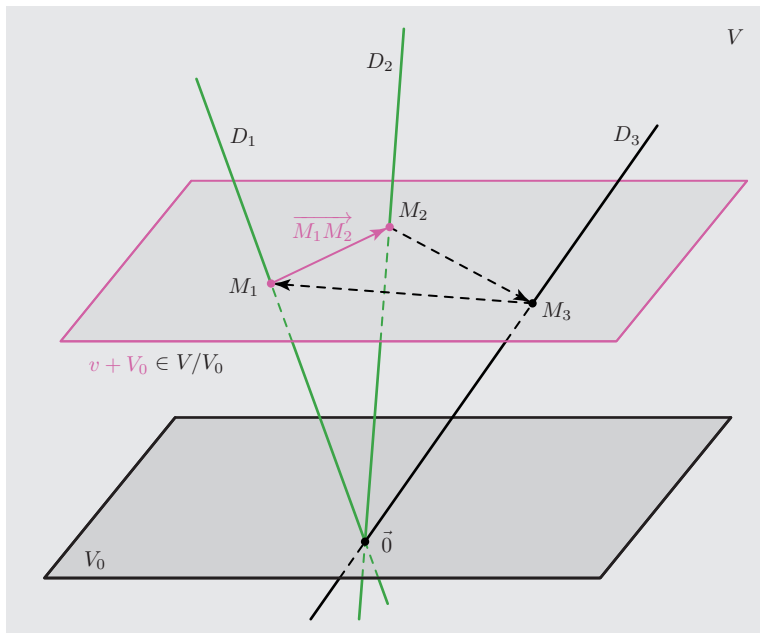
$$\pi_0 \circ \sigma = 0,$$

admet comme solution générale (à isomorphisme près) les éléments de l'espace vectoriel $\text{Hom}(V/V_0, V_0)$. L'ensemble des solutions (qui est non vide!) est donc un espace affine de dimension $p(n-p)$, que l'on notera encore \mathcal{A}_{V_0} , et son complété vectoriel apparaît comme l'ensemble des $\sigma : V/V_0 \rightarrow V$, tels que $\pi_0 \circ \sigma$ soit une homothétie de V/V_0 , ou encore $\pi_0 \circ \sigma = \lambda_\sigma \text{Id}_{V/V_0}$ pour $\lambda_\sigma \in \mathbb{R}$.

¹²Les points qui vivent l'espace affine \mathcal{E} ne se rendent pas compte a priori qu'ils ne sont que la trace sur \mathcal{E} de droites vectorielles vivant dans le complété vectoriel \mathcal{E}^v , et qu'à ce titre ils ont des frères qu'ils ne peuvent connaître, qui vivent à l'infini. Pourtant, en ouvrant bien les yeux, le frère à l'infini, défini sur le dessin par la droite vectorielle D_0 de E , se perçoit dans la direction commune aux droites, du plan affine \mathcal{E} , qui lui sont parallèles, et dont on voit sur le dessin deux répliques dans le coin de droite de \mathcal{E} . Il y a là de quoi méditer sur le Mythe de la caverne, où finalement en regardant au travers de l'œil initié les ombres au fond de celle-ci, on peut, sans en sortir, connaître le monde extérieur.

2.4. Exercice. Nous proposons dans ce qui suit une autre approche¹³ de l'espace affine \mathcal{A}_{V_0} , que nous expliquons en dimension 3. On prend pour V_0 un sous-espace de dimension $p = 2$.

1. Soient D_1 et D_2 deux droites supplémentaires de V_0 dans V , autrement dit D_1 et D_2 sont deux « points » de l'espace affine \mathcal{A}_{V_0} . Le « vecteur » $\overrightarrow{D_1 D_2}$ qui les joint est dans $\text{Hom}(V/V_0, V_0)$, et devrait ainsi associer à chaque classe modulo V_0 un élément de V_0 . Quel est ce vecteur ?



Le dessin ci-dessus montre bien l'application linéaire recherchée. On prend une classe modulo V_0 , c'est-à-dire un plan parallèle à V_0 ; il coupe D_1 et D_2 en deux points M_1 et M_2 . Le vecteur $\overrightarrow{M_1 M_2}$ est l'image de notre classe ! Vérifier que l'application ainsi définie est bien linéaire.

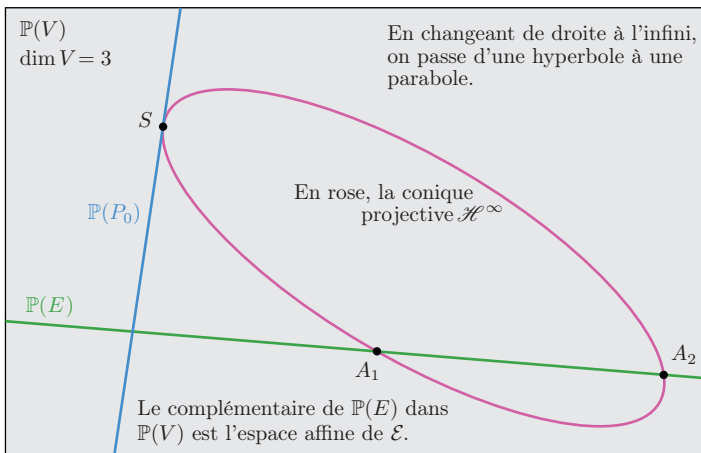
2. Vérifier la relation de Chasles, autrement dit que l'on a dans l'espace vectoriel $\text{Hom}(V/V_0, V_0)$ l'égalité $\overrightarrow{D_1 D_3} = \overrightarrow{D_1 D_2} + \overrightarrow{D_2 D_3}$.
3. Généraliser en dimension (finie ou non) quelconque en commençant par montrer que si $V = V_0 \oplus W$, alors toute image par translation $v + V_0$ rencontre le sous-espace W en un point unique.

Indication. – Décomposer v suivant la somme directe, soit $v = v_0 + w$, et montrer que $(v + V_0) \cap W = \{w\}$.

¹³Que nous devons à Jean-Jacques Brahim, ancien professeur au collège Balzac à Paris.

Partant d'un espace affine réel \mathcal{E} et de son vectorialisé (V, τ) , on pourra choisir au besoin un hyperplan V_0 dans V , autre a priori que E et considérer l'espace affine \mathcal{A}_{V_0} . Cela correspond dans le complété projectif $\mathbb{P}(V)$ de \mathcal{E} au choix d'un nouvel hyperplan à l'infini, autre que $\mathbb{P}(E)$. Le remplacement de l'hyperplan à l'infini par un autre est une pratique courante en géométrie, et permet par exemple en dimension 2, au moyen d'un simple choix d'une nouvelle droite à l'infini, de faire d'une hyperbole \mathcal{H} une parabole \mathcal{P}^{14} : il suffit de prendre pour droite projective dans $\mathbb{P}(V)$ une droite $\mathbb{P}(P_0)$ qui soit tangente à la conique projective \mathcal{H}^∞ complétée de \mathcal{H} , c'est-à-dire la conique affine \mathcal{H} unie à ses deux points à l'infini : le complémentaire dans \mathcal{H}^∞ du point de contact S est une parabole de l'espace affine \mathcal{A}_{P_0} .

2.5. Pratique du dessin affine/projectif



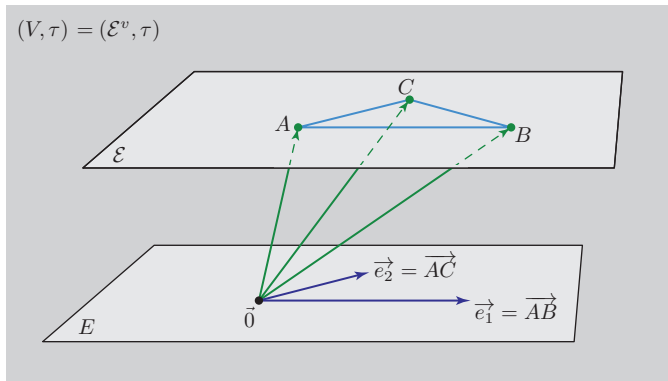
3. Calcul analytique dans le plan affine \mathcal{E}

Sous la dénomination de calcul analytique, nous voulons introduire des outils afin de pouvoir travailler et calculer à l'aide de coordonnées. C'est

¹⁴De l'alchimie, cette transmutation ? Que non pas ! Un plan projectif ne connaît que la notion de conique non dégénérée ou de conique dégénérée, et non pas celles, affines, de paraboles, ellipses ou hyperboles. Si notre hyperbole se mue en parabole, c'est tout simplement que le déplacement de la droite à l'infini a changé la nature de l'intersection de celle-ci avec la conique : de deux points d'intersection, nous sommes passés à un point de contact et c'est cela que nous, dans notre carte affine, avons pris pour un changement de nature. Vivrions-nous dans un espace complexe que nous ne songerions même pas, d'ailleurs, à distinguer *ellipses* et *hyperboles*.

dans ce contexte que se comprend notre volonté d'associer un espace affine à un objet de la catégorie **Véto**.

Choisissons dans \mathcal{E} un triangle ABC non aplati; cela met alors en évidence deux bases naturelles de (V, τ) .



Il s'agit évidemment des bases $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \overrightarrow{OA})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, avec $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$.

3.1. Définitions

1. La base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \overrightarrow{OA})$ de V , ou, pour abrégé, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2; A)$, est appelée une base (affine) cartésienne. Les coordonnées cartésiennes (x, y, z) d'un point $M \in \mathcal{E}$ satisfont alors

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\overrightarrow{OA}, \text{ avec } z = 1.$$

2. La base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ de V , ou (A, B, C) pour abrégé, est appelée une base barycentrique. Les coordonnées barycentriques (X, Y, Z) d'un point $M \in \mathcal{E}$ satisfont alors

$$\overrightarrow{OM} = X\overrightarrow{OA} + Y\overrightarrow{OB} + Z\overrightarrow{OC}, \text{ avec } X + Y + Z = 1.$$

Toutefois, on conviendra plus généralement d'appeler *coordonnées barycentriques* d'un point $M \in \mathcal{E}$ tout triplet (X, Y, Z) tel que $X + Y + Z \neq 0$ et

$$\overrightarrow{OM} = \frac{X\overrightarrow{OA} + Y\overrightarrow{OB} + Z\overrightarrow{OC}}{X + Y + Z}.$$

Ce faisant, on gagne largement en commodité ce que l'on perd en unicité (les coordonnées barycentriques ne sont plus définies qu'à un scalaire multiplicatif non nul près); s'il est nécessaire d'avoir $X + Y + Z = 1$, on précise en général qu'il s'agit des coordonnées barycentriques *normalisées* de M .

3. En écrivant $(\vec{e}_1, \vec{e}_2; A)$, on parlera de repère cartésien (ou repère affine) dans \mathcal{E} d'origine A , et, en écrivant (A, B, C) , on parlera de repère barycentrique (ou base affine) dans \mathcal{E} .

3.2. Remarques

1. On peut *mutatis mutandis* définir des bases affines cartésiennes ou des bases barycentriques de droites; les premières sont de la forme $(\vec{e}; A)$ et les secondes de la forme (A, B) .
2. Aucun test miraculeux ne permet de savoir si un problème donné sera plus simplement traité avec des coordonnées cartésiennes ou au contraire barycentriques; en revanche, le choix d'une base affine orthonormale aura souvent notre préférence dans le cadre euclidien tandis que le choix d'une base barycentrique sera tout indiqué lorsqu'un triangle jouera un rôle privilégié dans la configuration étudiée.

Il est évidemment naturel de vouloir passer d'un des deux types de représentation à l'autre, et c'est cela que facilite grandement la proposition suivante.

3.3. Proposition

1. La forme linéaire τ associée à un tel espace affine \mathcal{E} vérifie :

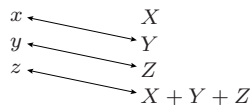
$$\tau(x, y, z) = z, \quad \tau(X, Y, Z) = X + Y + Z.$$

Dans la base duale de la base cartésienne, la forme τ a pour composantes $(0, 0, 1)$ et dans la base duale de la base barycentrique, τ a pour composantes $(1, 1, 1)$.

2. L'équation cartésienne de \mathcal{E} est $z = 1$, et son équation barycentrique est $X + Y + Z = 1$.
3. Pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées barycentriques, on bénéficie des relations suivantes¹⁵ :

$$x = Y, \quad y = Z, \quad z = X + Y + Z.$$

¹⁵Il est bon de garder de ces formules une image mentale avec le dessin ci-après



sachant que $z = 1$ si, et seulement si, $X + Y + Z = 1$.

Démonstration. Les deux premières assertions de la proposition sont immédiates. En effet, si $M \in \mathcal{E}$, on a

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{OA} = X\overrightarrow{OA} + Y\overrightarrow{OB} + Z\overrightarrow{OC},$$

et en appliquant τ à cette équation, on trouve ce que l'on veut. Pour la troisième assertion, il suffit d'utiliser la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OM} = X\overrightarrow{OA} + Y\overrightarrow{OB} + Z\overrightarrow{OC} = (X + Y + Z)\overrightarrow{OA} + Y\overrightarrow{AB} + Z\overrightarrow{AC}.$$

□

3.4. Remarque. Alors, comment choisir entre ces deux modes de représentations dans le plan ? Un élément de réponse est le suivant : une base cartésienne est adaptée aux cas où *un* point est privilégié — on le prend alors comme origine —, alors que, si trois points sont privilégiés (ou un point et une droite, ou trois droites, c'est-à-dire en fin de compte un triangle), on pourra avoir intérêt à adapter une base barycentrique à ce triangle.

Nous contracterons souvent, à la manière des taupins d'autrefois, les vocables récurrents de coordonnées cartésiennes et coordonnées barycentriques (normalisées ou non) en *cocars* et *cobars*.

3.5. Exercice. On rapporte le plan \mathcal{E} au repère barycentrique (A, B, C) .

1. Vérifier que le milieu G_A de BC a pour coordonnées barycentriques $(0, 1/2, 1/2)$, et que l'équation barycentrique de la droite BC est $X = 0$.
2. Vérifier que la droite d'équation barycentrique $Y + Z = 0$ est parallèle à la droite (BC) .
3. La droite passant par les milieux des segments AB et AC a pour équation cartésienne $2x + 2y = 1$. Montrer que son équation barycentrique est $Y + Z = X$.
4. Montrer que les coordonnées barycentriques du symétrique A' de A par rapport au centre de gravité sont $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

4. Les homographies

4.1. Définitions

Nous considérons les quotients projectifs $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(V')$ de deux espaces vectoriels sur le (même) corps \mathbb{K} ; si u est une application linéaire *injective* de V dans V' , alors, pour tout vecteur $x \neq 0 \in V$, on a $u(x) \neq 0$ et

donc l'image par u de la droite vectorielle $\text{Vect}(x)$ est également une droite vectorielle, plus précisément $\text{Vect}(u(x))$.

Il s'ensuit que cette application u *passse au quotient projectif*, c'est-à-dire qu'il existe une application \tilde{u} de $\mathbb{P}(V)$ dans $\mathbb{P}(V')$ telle que $\tilde{u} \circ \pi = u \circ \pi$:

$$\forall x \in V \setminus \{0\}, \quad \tilde{u}(\pi(x)) = \pi(u(x)).$$

Nous appellerons *homographie* ou *application projective* entre $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(V')$ toute application ainsi définie. Il est à signaler, avec ces notations, que si v est une seconde injection de V dans V' , alors $\tilde{v} = \tilde{u}$ si, et seulement si, il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $v = \lambda u$; en d'autres termes, le morphisme u est unique à scalaire multiplicatif non nul près.

Remarquons que toute homographie est elle-même injective (et qu'elle est surjective si, et seulement si, l'application linéaire u qui lui donne naissance l'est). En particulier, si $E = \mathbb{P}(V)$ est un espace projectif, l'ensemble des homographies bijectives de E sur lui-même est un sous-groupe du groupe des permutations de E ; on l'appelle le *groupe linéaire projectif* de E et on le note $\text{PGL}(E)$. Lorsque $E = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$, on utilise volontiers pour le groupe la notation $\text{PGL}_n(\mathbb{K})$.

4.2. Écriture analytique

Intéressons-nous plus précisément aux homographies du complété projectif $\mathbb{P}(\mathcal{E}^v)$ d'un espace affine de dimension finie n dans lui-même; si nous le munissons d'une base barycentrique, de la définition suit qu'une application φ de $\mathbb{P}(\mathcal{E}^v)$ dans lui-même est une homographie si, et seulement si, il existe une matrice inversible P d'ordre $n + 1$ telle que, si Ξ est un $(n + 1)$ -uplet de coordonnées barycentriques de $M \in \mathbb{P}(\mathcal{E}^v)$, alors $\Xi' = P\Xi$ est un $(n + 1)$ -uplet de coordonnées barycentriques de $\varphi(M)$.

En particulier, toute application affine injective f de \mathcal{E} dans lui-même se prolonge en une unique homographie de $\mathbb{P}(\mathcal{E}^v)$ ¹⁶. Inversement, si une homographie φ laisse stable l'hyperplan à l'infini, elle induit sur \mathcal{E} une application affine injective.

4.3. Exemple. Prenons le cas de la droite projective $D = \mathbb{P}(\mathbb{K}^2)$; nous pouvons la voir comme complété projectif de la droite affine \mathbb{K} grâce au couple **Véto** (\mathbb{K}^2, τ) , où $\tau(u, v) = v$ pour $(u, v) \in \mathbb{K}^2$. Si, dans D , nous posons $\infty = \pi(1, 0)$, alors $D = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ ¹⁷.

¹⁶Et ce d'autant plus volontiers que f est déjà la restriction à \mathcal{E} d'un endomorphisme injectif de $\mathbb{P}(\mathcal{E}^v)$.

¹⁷En effet, si $v \neq 0$, on a $\pi(u, v) = \pi(u/v, 1)$, que nous identifions au scalaire u/v , et si $u \neq 0$, on a $\pi(u, 0) = \pi(1, 0) = \infty$; nous avons envisagé là tous les cas possibles.

Une application affine injective de la droite \mathbb{K} dans elle-même est de la forme $x \in \mathbb{K} \xrightarrow{f} ax + b$, avec $a \neq 0$; on la prolonge à D tout entière en posant $f(\infty) = \infty$. Si nous remontons à \mathbb{K}^2 , l'homographie f ainsi prolongée provient de la bijection linéaire u qui à un élément (u, v) associe l'élément $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$.

Au contraire, si une bijection u est donnée par une matrice $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, avec $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$, l'homographie $f = \tilde{u}$ n'est pas le prolongement d'une application affine, car $f(\infty) = \pi(a, c) \in \mathbb{K}$. De même, elle envoie à l'infini le point $-d/c \in \mathbb{K}$; on peut donc résumer la situation ainsi qu'il suit :

$$\begin{cases} f(\infty) = a/c, & f(-d/c) = \infty \\ f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, & \text{si } x \neq -d/c \neq \infty. \end{cases}$$

Tout cela correspond bien à l'idée que l'on se fait d'une application homographique de $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ dans lui-même, aussi bien l'expression générale de $f(x)$ que les cas particuliers, qui traduisent algébriquement les limites aux bornes de l'application. Nous conseillons au lecteur de vérifier que f est une involution si, et seulement si, $a + d = 0$, c'est-à-dire si la matrice carrée d'ordre 2 définie *supra* est de trace nulle.

Dans la section qui suit, nous présentons une homographie d'un plan projectif, cette fois.

5. L'inversion harmonique

Nous examinons autour de ce thème¹⁸, et à l'aide de deux exercices¹⁹, quelques aspects intéressants du rapport entre affine et projectif²⁰ et cela nous donnera l'occasion d'étudier une homographie qui n'est pas le prolongement d'une banale application affine.

¹⁸*Inversion harmonique* est l'appellation moderne de ce que les Anciens appelaient *homologie harmonique*; nous préférons laisser le vocable *homologie* pour l'usage de la Topologie algébrique, discipline pour laquelle nous avons, de toute évidence, le plus grand respect.

¹⁹Ces exercices s'inspirent largement des considérations relatives à l'inversion harmonique telles qu'elles figurent dans le [JDE], pages 34 à 39.

²⁰Dans un premier temps, le lecteur débutant pourra sans crainte reporter l'étude de cette section.

5.1. Exercice. On démarre dans le plan affine \mathcal{E} avec une droite, notée Δ , et un point A situé en dehors de Δ ; soit D la droite passant par A et parallèle à Δ , et soit D' la droite milieu de Δ et D .

Si M est un point en dehors de la droite D , la droite AM recoupe Δ en le point M_A . Le conjugué harmonique M' de M par rapport à A et M_A existe si M est supposé de plus en dehors de D' . On définit bien ainsi une application $f_{A,\Delta} = f : \mathcal{E}_2 \setminus (D \cup D') \longrightarrow \mathcal{E}_2$ en posant $f(M) = M'$.

L'application $f_{A,\Delta}$ ainsi définie s'appelle l'involution harmonique associée au couple (Δ, A) . Nous allons voir dès maintenant que cette application s'interprète simplement dans le vectorialisé $V = \mathcal{E}^v$ de \mathcal{E} .

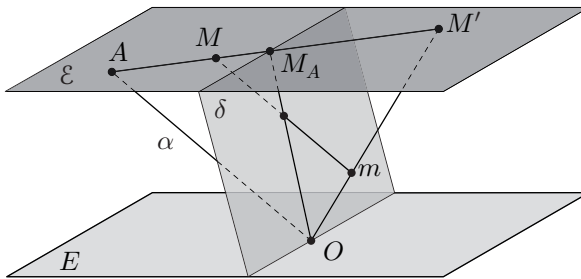
*Un peu plus loin dans ce chapitre*²¹, nous étudierons l'effet de l'involution harmonique $f_{\Delta,A}$ sur certaines hyperboles dessinées dans \mathcal{E} .

Les sous-espaces vectoriels engendrés par Δ et A dans \mathcal{E}^v ayant été notés respectivement δ et α , on considère dans \mathcal{E}^v la *symétrie vectorielle* $\sigma = \sigma_{\delta,\alpha}$ par rapport au plan δ et parallèlement à la droite α .

a) Soit E la direction de \mathcal{E} . Montrer que $\sigma(E) \cap \mathcal{E} = D'$.

Indication. – Penser au symétrique $\sigma(I_A)$ du milieu I_A du segment AM_A .

b) En considérant le faisceau harmonique formé des quatre droites coplanaires OA , OM_A , OM et Om , visibles sur la figure ci-dessous, montrer que OM' est le symétrique de OM sous l'action de σ .



En déduire que l'application $f_{\Delta,A}$ se prolonge en l'homographie $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_{\delta,\alpha}$ de l'espace projectif $\mathbb{P}(V) = \mathcal{E} \cup D_\infty$ qui est induite par l'automorphisme linéaire $\sigma_{\delta,\alpha}$, où la droite de l'infini D_∞ est donnée, bien sûr, par $\mathbb{P}(E)$. Montrer qu'ainsi prolongée, l'inversion harmonique agit sur la droite affine D tel — on s'en doute — le demi-tour (ou symétrie centrale) d_A .

c) Comment agit dans $\mathbb{P}(V)$ la *symétrie vectorielle* $\sigma_{\alpha,\delta}$ par rapport à la droite α et parallèlement au plan δ ? Noter à cet effet que nos deux symétries vectorielles diffèrent de l'homothétie $s_O = -\text{Id}_{\mathcal{E}^v}$! Voir aussi page 315.

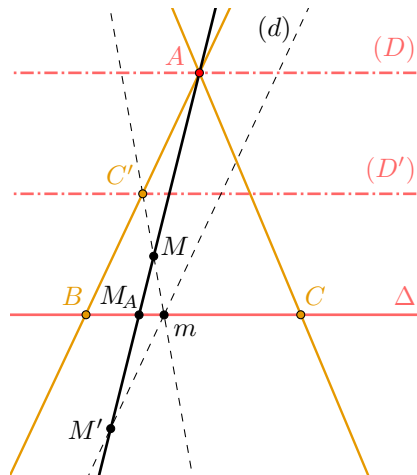
²¹Voir à cet effet l'exercice 17.1, en page 257.

5.2. Exercice. L'écriture analytique de l'inversion harmonique

Soit M un point du plan affine \mathcal{E} rapporté à la base affine (A, B, C) . On note (X, Y, Z) ses coordonnées barycentriques. On appelle f l'application

$$f : M = (X, Y, Z) \mapsto M' = (X, -Y, -Z).$$

- a) Vérifier que cette définition est *cohérente*, c'est-à-dire indépendante du choix du triplet (X, Y, Z) parmi tous les triplets possibles. Déterminer le domaine de définition de f . L'application f est-elle affine ?
- b) Soit D la droite passant par A et parallèle à BC . Montrer que $f|_D$ est affine et en déterminer la nature géométrique.
- c) Montrer que f définit une involution de $\mathcal{E} \setminus D'$, où la droite D' joint les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$. En déterminer les points fixes.
- d) Soit $M \notin D$. On note M_A le point d'intersection de la droite AM et de la droite $\Delta := BC$. Déterminer les coordonnées barycentriques de M_A en fonction de celles du point M .
- e) Soit $M \notin D \cup D'$. Montrer que les points A, M_A, M et $f(M)$ sont en division harmonique.
- f) Justifier l'expression qui définit f à partir de l'écriture matricielle (barycentrique) de la symétrie vectorielle $\sigma_{\delta, \alpha}$ de l'exercice précédent.
- g) Justifier la construction suivante, qui à $M \notin D \cup D'$ associe son inverse harmonique $M' = f(M)$.



Ici, C' est le milieu de $[AB]$; la droite $(C'M)$ coupe (BC) en m , la parallèle (d) menée de m à (AB) coupe alors la droite (AM) en M' .

Tout cela traduit la conservation de l'alignement, propriété partagée par toutes les homographies : par construction, les points C', m, M sont alignés et leurs images le sont aussi. Or, $f(C')$ est à l'infini dans la direction

de (AB) et $f(m) = m$. Cela justifie la construction de la droite (d) , dont nous savons qu'elle contient M' ; enfin, nous savons que $M' \in (AM)$.

Le recours à la droite (AB) n'est pas impératif; il eût été possible de procéder avec n'importe quelle sécante à (BC) issue de A , le point C' étant remplacé par l'intersection de cette sécante avec la droite D' .

5.3. Remarque. Si A' est un point de (BC) , le complété projectif \mathcal{D} de la droite (AA') est laissé stable par f ; plus précisément, si M est le barycentre de (A, λ) et de (A', λ') , alors M' est le barycentre de (A, λ) et de $(A', -\lambda')$ et c'est aussi le point tel que la division (A, A', M, M') soit harmonique.

On peut facilement montrer que cette restriction est la seule involution de \mathcal{D} qui laisse fixes A et A' et aussi que c'est est la seule homographie de \mathcal{D} qui laisse fixes A et A' et qui envoie à l'infini le milieu de $[AA']$.

6. Intersection d'un cône isotrope avec un sous-espace affine

Prenons V un \mathbb{K} -espace vectoriel, toujours de dimension 3. Soit $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée. On dispose déjà de l'application fondamentale

$$\begin{aligned} \pi : V \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{P}(V) \\ \vec{v} &\mapsto \mathbb{R}\vec{v}. \end{aligned}$$

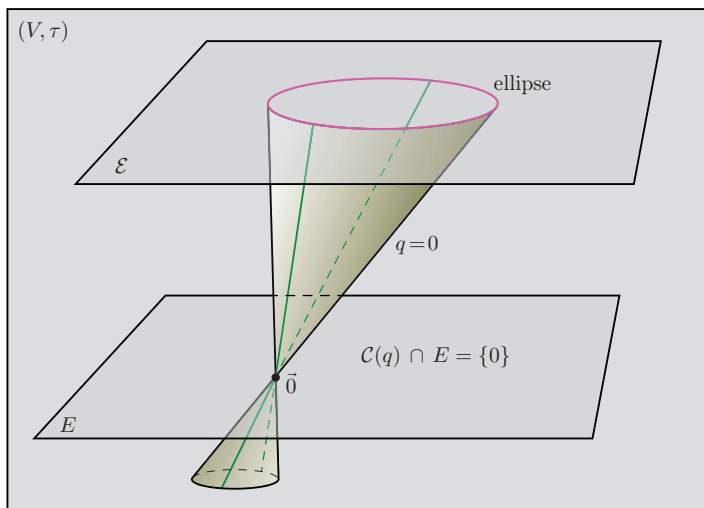
La *conique projective* non dégénérée $\pi(\mathcal{C}(q) \setminus \{0\})$ sera alors non vide si, et seulement si, la forme quadratique q admet des vecteurs isotropes non triviaux. Introduisons alors $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ et regardons sous cette hypothèse ce que donne l'intersection $\mathcal{C}(q) \cap \mathcal{E}$.

6.1. Quelques dessins suggestifs

Dans tous les dessins qui vont suivre, nous avons choisi de représenter l'hyperplan $\tau = 1$ horizontalement, quitte à varier la figure du cône isotrope et l'offrir au lecteur sous divers points de vue. Ce choix est rarement adopté par les autres auteurs, qui ont une préférence pour le choix de garder le cône isotrope vertical, comme c'est le cas avec la première figure ci-après, et de varier en revanche la position de l'hyperplan $\tau = 1$.

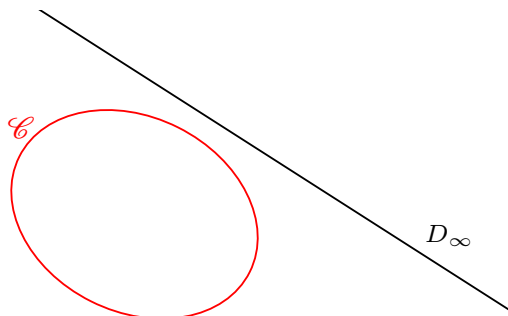
En tout cas, plusieurs sortes de situations se présentent, suivant la position relative du cône et de l'hyperplan...

▷ Si $\mathcal{C}(q) \cap E = \{0\}$.



Le dessin ci-dessus ne nécessite pas de commentaire particulier ; notons cependant que l'on y réfère à l'objet (V, τ) , qui est chronologiquement antérieur à la donnée du cône isotrope, lequel est supposé ici d'intersection triviale avec $\tau = 0$. L'intersection de l'hyperplan affine avec le cône est une brave ellipse (affine).

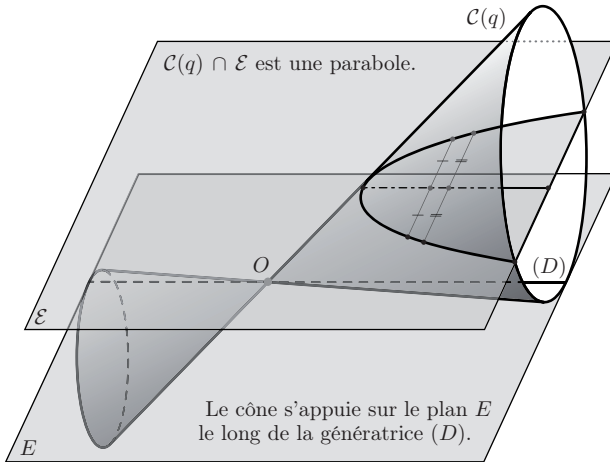
Rappelons que la conique projective \mathcal{C} est définie comme l'ensemble des génératrices du cône isotrope. Dans l'espace projectif $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \cup D_\infty$, cela se représente ainsi par



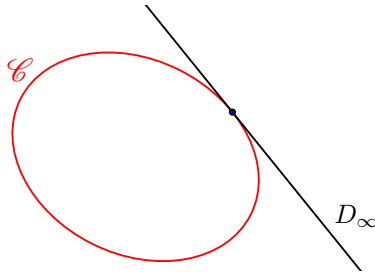
L'intersection de cette conique avec la droite à l'infini est, telle qu'elle apparaît sur le dessin, tout simplement vide, la conique projective se retrouvant ainsi entièrement contenue dans l'espace affine²², et est donc une ellipse.

²²Autrement dit, elle ne possède aucun point à l'infini.

▷ Lorsque $\mathcal{C}(q) \cap E$ est une droite.

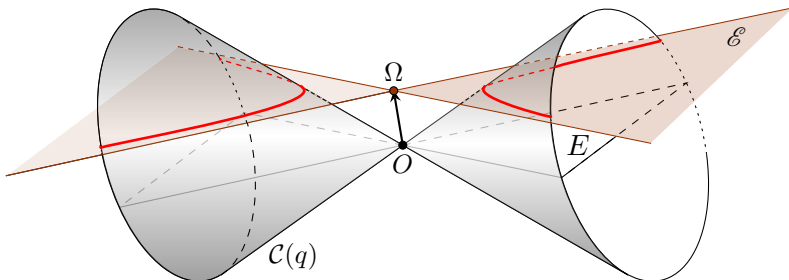


L'intersection du cône isotrope avec le plan affine est donc une parabole. Dans l'espace projectif, la conique est représentée par



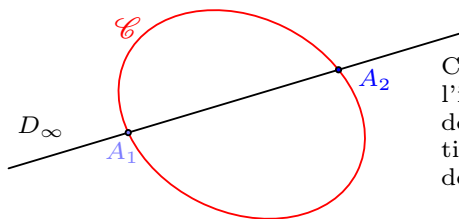
La conique projective est tangente à la droite de l'infini. Son morceau qui vit dans l'espace affine est une parabole²³.

▷ Enfin, lorsque $\mathcal{C}(q) \cap E$ est la réunion de deux droites sécantes.



²³Dont on connaît la direction de l'axe, donnée en effet par la génératrice d'appui.

Cela se représente dans le plan projectif, comme sur la figure ci-après.



Comme points à l'infini, A_1 et A_2 donnent les directions respectives des deux asymptotes.

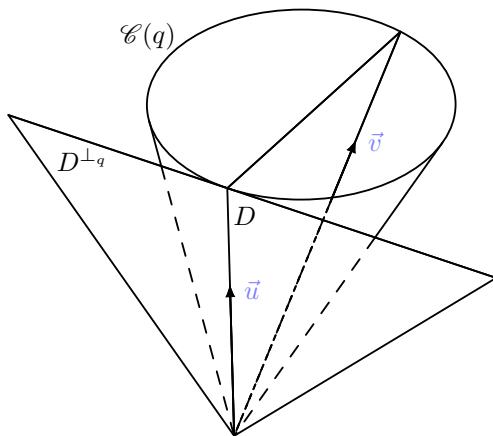
Et, l'intersection du cône isotrope avec le plan affine est donc une hyperbole. Nous pouvons par ailleurs déterminer les éléments affines emblématiques de cette hyperbole : son centre S et ses asymptotes. C'est une prochaine étape que nous nous devons de franchir. Auparavant, il nous faut nous faire une idée géométrique de l'orthogonalité, au sens de q , d'une droite ou d'un plan, et en dégager la notion de *contact*.

6.2. Remarque. On comprend pourquoi l'on appelle conique l'une ou l'autre des trois courbes données par l'ellipse, la parabole et l'hyperbole : ce sont des sections (planes) coniques !

7. Cône isotrope, orthogonalité, contact

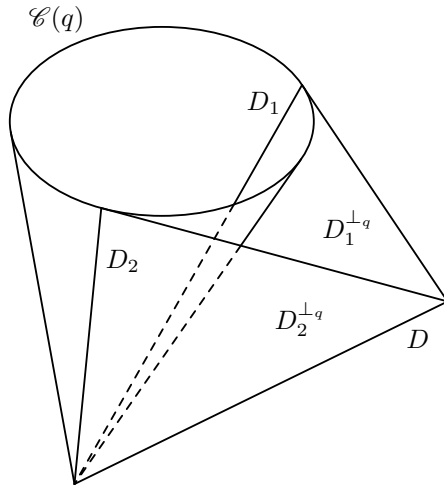
Nous privilégierons ici le regard géométrique et laisserons le point de vue de la géométrie différentielle à une section ultérieure, qui ne saurait d'ailleurs trop tarder (cf. section 10).

Soit D une génératrice du cône isotrope $\mathcal{C}(q)$.



Le sous-espace D^{\perp_q} est un plan qui passe par D , car D est isotrope. De plus, ce plan est tangent au cône isotrope ! Si tel n'était pas le cas, le plan trancherait le cône suivant deux génératrices, et la matrice de la forme quadratique (restreinte à ce plan) dans une base (\vec{u}, \vec{v}) formée de deux vecteurs portés par ces génératrices serait nulle (se rappeler que \vec{v} est q -orthogonal à \vec{u}), et notre plan serait inclus dans le cône isotrope, ce qui est absurde²⁴.

Donnons-nous maintenant une droite quelconque D , et prenons-la d'abord en dehors du cône isotrope. Alors, l'orthogonal de cette droite est le sous-espace engendré par les deux génératrices D_1 et D_2 , sous-espace que nous n'avons pas matérialisé sur la figure ci-après (mais que le lecteur identifiera manifestement comme le plan défini par les deux droites D_1 et D_2).



En effet, $D = D_1^{\perp_q} \cap D_2^{\perp_q}$, et donc

$$D^{\perp} = (D_1^{\perp_q})^{\perp_q} + (D_2^{\perp_q})^{\perp_q} = D_1 + D_2.$$

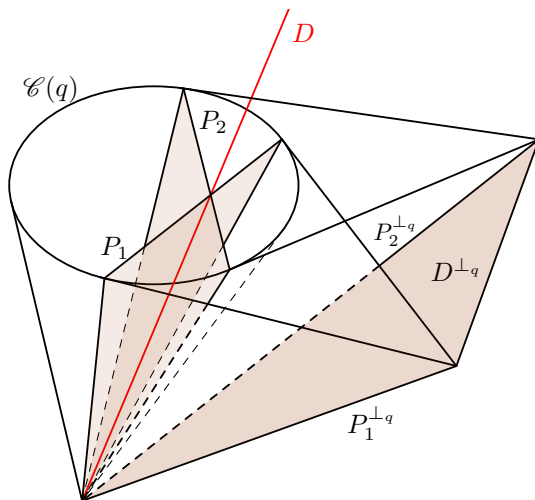
Maintenant, il n'est pas vraiment plus compliqué de donner l'orthogonal d'une droite à l'intérieur du cône isotrope par les mêmes arguments que

²⁴On peut aussi s'en tirer avec l'argument suivant de géométrie différentielle. Le plan tangent au cône épointé en un point M non nul de D est le noyau de la forme linéaire

$$dq(M) = 2B_q(M, \cdot) :$$

c'est donc bien l'orthogonal D^{\perp_q} de D . Se reporter à la section 10 pour plus de précisions à ce sujet.

ci-dessus. On fait passer deux plans par D , soit P_1 et P_2 .



Le q -orthogonal de la droite D est clairement le plan indiqué sur la figure ; en effet,

$$D^{\perp q} = (P_1 \cap P_2)^{\perp q} = P_1^{\perp q} + P_2^{\perp q}.$$

Remarquons que plus la droite D perce le plan horizontal de l'ellipse d'autant près de son centre que le plan $D^{\perp q}$ a tendance à se coucher davantage pour se confondre à la limite avec le plan E . Cela nous servira par la suite.

8. Coniques à centre – Asymptotes

Le centre S est défini²⁵ par :

$$\{S\} = \mathcal{E} \cap E^{\perp q},$$

et les asymptotes sont les droites du plan \mathcal{E} sécantes en S et parallèles aux génératrices du cône qui se trouvent dans le plan E . Il faut donc pouvoir déterminer $E^{\perp q}$, et c'est l'objet entre autres de la section qui vient juste après les deux exercices qui suivent.

²⁵Certains auteurs définissent le centre comme centre de symétrie de notre conique. Nous préférons le définir comme « pôle » d'une droite qui s'éloigne à l'infini (plus que toutes les autres, c'est-à-dire la droite de l'infini !). Le lecteur débutant comprendra cela encore mieux dans quelques pages. Il ne fait en tout cas point de doute que l'orthogonal $E^{\perp q}$ de E a un statut particulier parmi les droites du vectorialisé $V = \mathcal{E}^v$, et qu'il en est donc de même du point S (qui existe pour toutes les coniques non dégénérées autres que les paraboles).

8.1. Exercice. Soit \mathcal{C} une conique non dégénérée à centre, c'est-à-dire pour laquelle la droite $E^{\perp q}$ n'est pas incluse dans E (c'est-à-dire encore pour laquelle $q|_E$ est non dégénérée). Montrer que le point S défini ci-dessus est un centre de symétrie pour \mathcal{C} .

Indication.— Cela revient à démontrer que la symétrie vectorielle qui prolonge au vectorialisé \mathcal{E}^v la symétrie affine de \mathcal{C} centrée en S préserve le cône isotrope de la forme quadratique non dégénérée q définissant notre conique. Or, cette symétrie vectorielle induit $-Id_E$ sur la direction E de l'espace affine \mathcal{E} et vaut l'identité sur $E^{\perp q}$. Sa forme sur la décomposition orthogonale $\mathcal{E}^v = E \oplus E^{\perp q}$ en fait un automorphisme évident de q .

8.2. Exercice. Montrer que les asymptotes de l'hyperbole \mathcal{H} sont exactement les intersections du plan affine \mathcal{E} avec chacun des deux plans $\Delta_0^{\perp q}$ et $\Delta_0'^{\perp q}$, orthogonaux respectifs des droites d'intersection Δ_0 et Δ_0' du cône isotrope $\mathcal{C}(q)$ (définissant \mathcal{H}) avec la direction E .

Indication.— Remarquer tout simplement que l'orthogonal de la droite Δ_0 , par exemple, est le plan engendré par Δ_0 elle-même et la droite $(OS) = E^{\perp q}$, où S est le centre de \mathcal{H} .

Conséquence. Tout se passe comme si l'asymptote $\mathcal{E} \cap \Delta_0^{\perp q}$ était la tangente à \mathcal{H} au point à l'infini dans la direction Δ_0 ; pour s'en convaincre, revenir au 10.7. Cela n'a rien d'anodin : si, par une application projective φ , on envoie à l'infini un point M_0 d'une conique \mathcal{C} non dégénérée, l'image par φ de la tangente $T_{M_0}(\mathcal{C})$ est alors asymptote à $\varphi(\mathcal{C})$ dans la direction $\varphi(M_0)$ ²⁶.

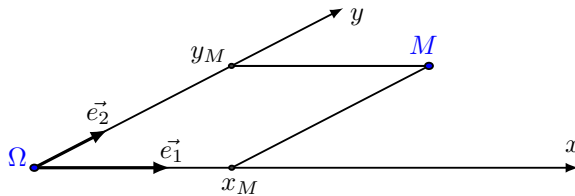
9. Exemples

- Regardons la conique définie par l'équation

$$x^2 - y^2 + x + 3y - 2 = 0,$$

et déterminons-en la nature.

On se place dans le plan affine muni des coordonnées cartésiennes suivantes :



²⁶À moins que la tangente $T_{M_0}(\mathcal{C})$ ne soit envoyée tout entière à l'infini ; dans ce cas, l'image $\varphi(\mathcal{C})$ devient une parabole de direction d'axe $\varphi(M_0)$.

Dans ce contexte, on peut reformuler l'équation précédente par

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + xz + 3yz - 2z^2 = 0 \\ z = 1, \quad \text{ce qui correspond à } \tau(x, y, z) = 1. \end{cases}$$

C'est ce que l'on appelle l'homogénéisation de l'équation de la conique. Maintenant, commençons par étudier le cône isotrope de la forme quadratique $x^2 - y^2 + xz + 3yz - 2z^2$. D'une façon usuelle, on procède avec la réduction de Gauss :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + xz + 3yz - 2z^2 &= \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{9z^2}{4} - y^2 + 3yz \\ &= \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 - \left(\frac{3z}{2} - y\right)^2. \end{aligned}$$

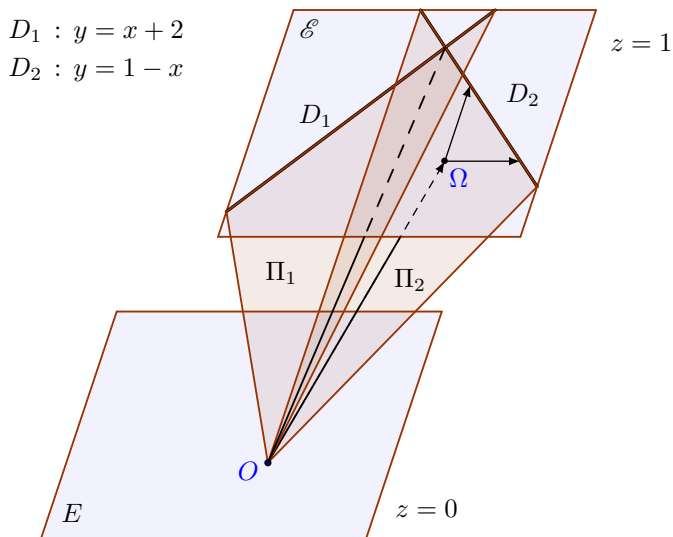
La forme quadratique est de signature $(1, 1)$, et est donc dégénérée. Son cône isotrope est alors donné par l'équation

$$\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 - \left(\frac{3z}{2} - y\right)^2 = 0$$

ou encore

$$(x + 2z - y)(x - z + y) = 0.$$

Ce cône consiste donc en la réunion des deux plans Π_1 et Π_2 .



En coupant donc par le plan $z = 1$, on voit que la conique est réunion des deux droites D_1 et D_2 , dont les équations sont celles obtenues à partir de $(x + 2z - y)(x - z + y) = 0$, avec $z = 1$.

- Considérons la conique définie par l'équation

$$2x^2 + 2y^2 + 4x + 1 = 0.$$

Comme on reste avec les coordonnées cartésiennes, et non pas barycentriques, on homogénéise avec z , et non pas avec $X + Y + Z$. L'équation précédente est alors remplacée par le système suivant :

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 4xz + z^2 = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$

L'algorithme de Gauss permet de récrire la première ligne sous la forme

$$(z + 2x)^2 - 2x^2 + 2y^2 = 0;$$

la forme quadratique q qui y apparaît est donc non dégénérée non définie, de signature $(2, 1)$.

Pour déterminer l'intersection avec le plan $z = 1$, regardons d'abord l'intersection avec le plan $z = 0$. On trouve alors que cette intersection est donnée par l'équation

$$2x^2 + 2y^2 = 0,$$

ou encore que cette intersection est réduite au point $(0, 0)$. Maintenant, et avec ce que l'on a dit précédemment, on sait que l'intersection avec le plan $z = 1$ est donc une ellipse.

Déterminons le centre de cette ellipse, qui, rappelons-le, est le point S donné par $\{S\} = \mathcal{E} \cap E^{\perp q}$. Pour trouver le sous-espace $E^{\perp q}$, on polarise la forme quadratique $2x^2 + 2y^2 + 4xz + z^2$ et l'on remarque que (x, y, z) est dans l'orthogonal de E si, et seulement si, pour tout triplet $(x', y', z' = 0)$, on a

$$2xx' + 2yy' + 2xz' + 2x'z + zz' = 0$$

ou encore

$$x'(2x + 2z) + 2yy' = 0,$$

c'est-à-dire

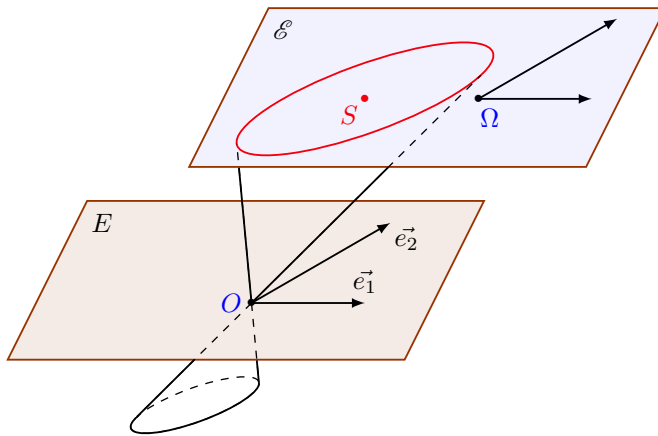
$$2x + 2z = 0 \quad \text{et} \quad 2y = 0.$$

Le sous-espace $E^{\perp q}$ consiste ainsi en l'intersection de deux plans, c'est donc une droite, comme on s'y attendait. Maintenant, il reste à déterminer le point S où cette droite perce le plan $\mathcal{E} : z = 1$. Pour cela, il suffit de poser $z = 1$, de sorte que $x = -1$ et $y = 0$.

L'exécution du dessin qui suit est facilitée par la détermination des points où l'ellipse rencontre l'axe des abscisses ainsi que l'équation des deux droites tangentes à l'ellipse et parallèles à ce même axe²⁷.

²⁷Pour obtenir ces dernières, on annule le discriminant de l'équation en x :

$$2x^2 + 4x + (1 + 2y^2) = 0,$$



Nous voyons sur le dessin ci-dessus le cône $2x^2 + 2y^2 + 4xz + z^2 = 0$ réalisé dans l'espace (V, τ) , rapporté à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{O}\vec{\Omega})$. Son intersection avec le plan affine $\tau = 1$ est l'ellipse

$$2x^2 + 2y^2 + 4x + 1 = 0$$

dans le plan affine, rapporté au repère cartésien $(\vec{e}_1, \vec{e}_2; \Omega)$.

- Considérons maintenant la conique définie par l'équation

$$3x^2 - 3y^2 - 2y - 1 = 0.$$

De façon semblable à ce qui a déjà été fait, nous homogénéisons l'équation et appliquons l'algorithme de Gauss :

$$-3x^2 + 3y^2 + 2yz + z^2 = 0$$

$$(z + y)^2 + 2y^2 - 3x^2 = 0.$$

Il s'agit donc encore une fois d'une forme quadratique non dégénérée, non définie, de signature $(2, 1)$.

Regardons alors l'intersection de ce cône isotrope avec le plan vectoriel E , d'équation $z = 0$. Pour $z = 0$, on trouve

$$3x^2 - 3y^2 = 0,$$

ce qui donne deux droites. Au vu de la section précédente, l'intersection du cône isotrope et du plan affine $\mathcal{E} : z = 1$ est donc une hyperbole.

ce qui donne $y = \pm\sqrt{2}/2$; l'abscisse des deux points de contact vaut -1 . Les directions des axes de coordonnées apparaissent ainsi comme conjuguées relativement à la conique, chose que l'on peut constater a priori puisque les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont q -orthogonaux, vu l'absence du terme rectangle en xy . (Voir à cet effet l'exercice 19.4, en page 266.)

Cherchons à en déterminer le centre S ; par polarisation, l'orthogonal de E est l'ensemble des points (x, y, z) vérifiant, pour tout $(x', y', z' = 0)$,

$$-3xx' + 3yy' + yz' + y'z + zz' = 0$$

$$-3xx' + y'(3y + z) = 0.$$

Les coordonnées (x, y, z) vérifient donc

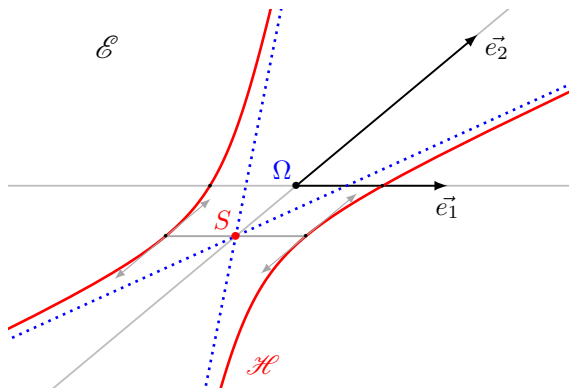
$$x = 0 \quad \text{et} \quad 3y + z = 0,$$

et lorsque l'on regarde alors l'intersection de cette droite avec le plan affine \mathcal{E} , d'équation $z = 1$, on trouve : $x = 0$ et $y = -\frac{1}{3}$.

On dispose désormais du centre, et dès lors des asymptotes de l'hyperbole. En effet, on avait précédemment dit que les asymptotes étaient les droites de l'espace affine \mathcal{E} parallèles aux droites formant l'intersection du cône isotrope et du plan E (voir aussi l'exercice 8.2), c'est-à-dire ici les droites $x \pm y = 0$.

Pour tracer l'hyperbole, regardons son intersection avec l'axe $y = 0$.

La coordonnée x vérifie alors $3x^2 - 1 = 0$ ou encore $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. Or, l'asymptote Δ (voir dessin ci-dessous), qui est de coefficient directeur 1 (car parallèle à la droite $y = x$ dans le plan E), coupe $x = 0$ dans le plan \mathcal{E} en $\frac{1}{3}$. On en déduit la position de la courbe relativement aux asymptotes.



Là aussi, les directions des axes sont conjuguées par rapport à notre conique²⁸.

- Considérons la conique d'équation

$$4x^2 + y^2 + 4xy + 3x + y + 2 = 0.$$

De la même façon que précédemment, on homogénéise puis l'on engage

²⁸Vu l'absence du terme rectangle en xy dans son équation (cf. encore l'exercice 19.4).

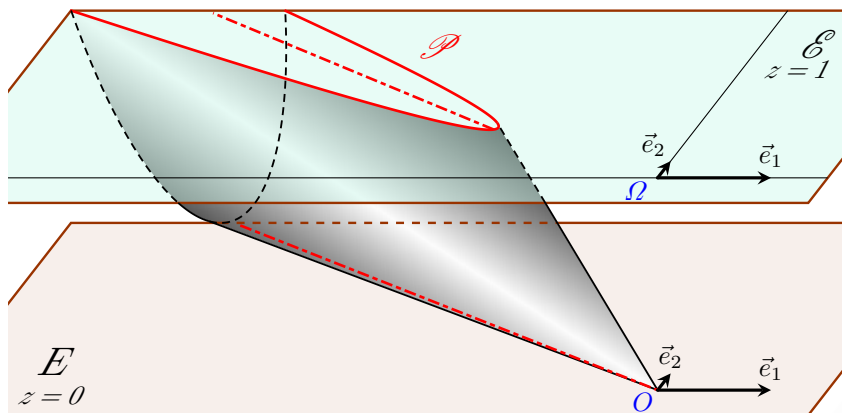
l'algorithme de Gauss, pour trouver :

$$4x^2 + y^2 + 4xy + 3xz + yz + 2z^2 = 0$$

$$(2x + y + \frac{3z}{4})^2 - \underbrace{\frac{yz}{2} + \frac{23}{16}z^2}_{+z(\frac{23}{16}z - \frac{y}{2})} = 0.$$

Il s'agit donc d'une forme quadratique non dégénérée, non définie, de signature $(2, 1)$. On fait $z = 0$ pour regarder l'intersection avec le plan E . On trouve : $(2x + y)^2 = 0$, c'est-à-dire que l'intersection du cône isotrope et du plan E est une droite, donnée par $2x + y = 0$. On est tombé donc (enfin) sur une parabole \mathcal{P} du plan affine \mathcal{E} . Qui plus est, en choisissant dans l'équation de la conique $x = 0$ et $y = 0$, on constate que cette parabole ne coupe ni l'axe des x , ni l'axe des y . Quant à la « direction de l'axe » de cette parabole affine²⁹, c'est celle de la droite $2x + y = 0$, rencontrée quelques lignes plus haut.

Pour dessiner avec soin cette parabole \mathcal{P} , on peut également en déterminer l'intersection avec des droites particulières du plan (par exemple, les trois droites $y = -2x - 2/3$, $y = -2x$ et $y = -x + 1$).



Le cône, que l'on a soumis à un découpage douloureux, est tangent au plan E selon la génératrice en pointillés rouges, et coupe donc le plan affine \mathcal{E} suivant la parabole \mathcal{P} .

- Jusqu'à présent, nous n'avons travaillé qu'avec des coordonnées cartésiennes. Le processus d'homogénéisation ainsi que l'algorithme de Gauss peuvent pourtant être utilisés dans le cadre des coordonnées barycentriques (voir le début de la section 3 pour les conventions, notamment

²⁹Qui n'a pas d'axe, mais simplement une direction d'axe.

pour la définition des points A , B et C), il suffit de se souvenir que dans la catégorie **Véto**, le plan affine est donné par l'équation

$$\tau(X, Y, Z) = X + Y + Z = 1.$$

À titre d'exemple immédiat, on considère la conique (passant par A et B) définie par l'équation barycentrique

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

En homogénéisant, on se retrouve avec le système suivant :

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = (X + Y + Z)^2 \\ X + Y + Z = 1. \end{cases}$$

La forme quadratique $(X + Y + Z)^2 - X^2 - Y^2$ qui s'y fait jour est de signature $(2, 1)$. Pour trouver la nature de l'intersection du cône isotrope avec le plan affine $X + Y + Z = 1$, on regarde l'intersection du cône avec le plan $X + Y + Z = 0$. On ne trouve qu'un seul point, à savoir le point $X = 0, Y = 0$ et $Z = 0$. On en déduit alors que l'intersection du cône isotrope et du plan $X + Y + Z = 1$ est une ellipse.

Une fois cela établi, nous pouvons essayer de donner de plus amples renseignements sur l'ellipse, par exemple son centre. Encore une fois, il s'agit principalement de déterminer l'orthogonal, relativement à la forme quadratique ci-dessus, du plan $E : \tau(X, Y, Z) = X + Y + Z = 0$. Or, la forme polaire relative à cette forme quadratique est donnée par

$$(X + Y + Z)(X' + Y' + Z') - XX' + YY'.$$

D'où, les coordonnées (X, Y, Z) du centre doivent vérifier

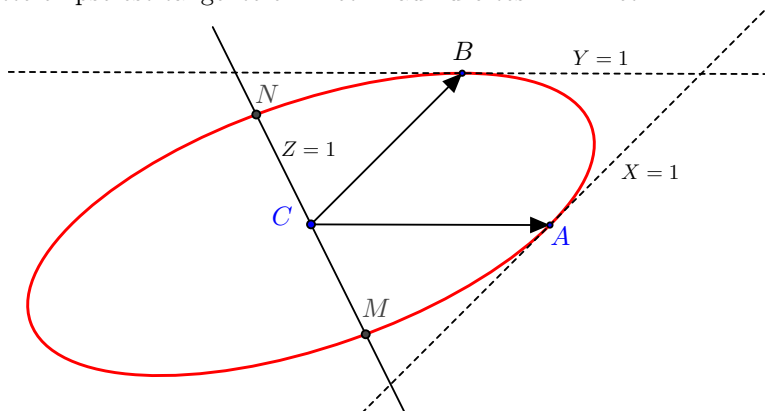
$$XX' + YY' = (X + Y + Z)(X' + Y' + Z')$$

pour tout point (X', Y', Z') tel que $\tau(X', Y', Z') = X' + Y' + Z' = 0$. On en déduit alors aisément que le centre de notre ellipse admet pour coordonnées $(X = 0, Y = 0, Z = 1)$, et il s'agit donc en fait du troisième point C de la base affine choisie initialement pour définir les coordonnées barycentriques.

Maintenant et afin de mieux appréhender la forme géométrique de la conique, déterminons-en l'intersection avec la droite d'équation (barycentrique) $X + Y = 0$, ou de façon plus simple, avec la droite $Z = 1$, car on s'est placé dans le plan affine d'équation $\tau(X, Y, Z) = X + Y + Z = 1$. On trouve alors facilement deux points d'intersection, qui sont

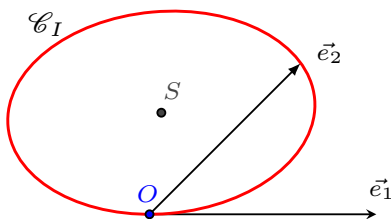
$$M = \begin{pmatrix} X = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ Z = 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} X = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Z = 1 \end{pmatrix}.$$

Cette ellipse est tangente en A et B aux droites $X = 1$ et $Y = 1$.



Le lecteur est invité à vérifier tout ce qui a été trouvé précédemment en revenant aux coordonnées cartésiennes à l'aide du changement de variables donné par la proposition 3.3. Que constate-t-il ?

9.1. Exercice. Déterminer la nature et le centre de la conique \mathcal{C}_I donnée en coordonnées barycentriques par l'équation $X^2 = YZ$.



On trouve : $S = (-1/3, 2/3, 2/3)$.

10. Les vertus du stéthoscope différentiel

Nous commençons par quelques considérations de géométrie différentielle élémentaire.

Un des critères les plus familiers de formation de sous-variétés de \mathbb{R}^n est³⁰ de s'offrir la sous-variété \mathcal{V} comme fibre au-dessus de $0 \in \mathbb{R}^p$ d'une application $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^p$, qui est une submersion en tout point de $\mathcal{V} \subset U$.

³⁰Le bon cadre pour présenter ce critère est celui d'un espace affine. Nous le donnons dans \mathbb{R}^n pour alléger un peu les notations.

Dans un tel cas, l'espace vectoriel tangent $T_{\mathcal{V}}(M_0)$ à \mathcal{V} au point $M_0 \in \mathcal{V}$ n'est autre que le noyau de la différentielle $df(M_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de f en M_0 , lequel est clairement alors de dimension $n - p$. Notons que le cône isotrope d'une forme quadratique sur \mathbb{R}^3 de signature $(2, 1)$ n'est pas une sous-variété de l'espace vectoriel V , comme l'on s'en aperçoit en portant le regard en son sommet, qui en est un *point singulier*.

10.1. Lemme. *Soit $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique sur V de dimension finie. Alors, l'application q est différentiable en tout point $v \in V$ et*

$$dq(v) : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad w \mapsto 2B_q(v, w).$$

La démonstration est un bon exercice pour les débutants en Calcul différentiel. Elle résulte de l'écriture $q(v + w) = q(v) + 2B_q(v, w) + q(w)$ et du fait que $q(w) = O(\|w\|^2)$, de sorte que $q(w) = o(w)$ comme il se doit. L'assertion $q(w) = O(\|w\|^2)$, qui vient d'être évoquée, est équivalente, par homogénéité, à l'assertion $w \mapsto q(w/\|w\|)$ est bornée sur $V \setminus \{0\}$, qui résulte quant à elle de ce que q est continue sur la sphère-unité (compacte) pour la norme $\|\cdot\|$.

En faisant appel au critère donné en début de section, on en déduit aussitôt le résultat qui suit.

10.2. Proposition

Soit $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique. Ou bien le cône isotrope $\mathcal{C}(q)$ est un brave sous-espace vectoriel, auquel cas il se confond avec le noyau $\ker q$ de q , ou bien la partie $\mathcal{C}(q) \setminus \ker(q)$ qui est contenue dans l'ouvert $U = V \setminus \ker q$ est une sous-variété de V de dimension $n - 1$, et l'espace tangent au cône isotrope en le vecteur isotrope $v_0 \in U$ est l'orthogonal $(\mathbb{R}v_0)^{\perp_q}$. Autrement dit, en dehors du cas où le cône isotrope est un sous-espace vectoriel, le cône isotrope est une brave sous-variété, pour peu que l'on lui ôte les points singuliers que sont les éléments de $\ker q$.

Une autre conséquence non moins importante du lemme précédent, et que le lecteur attentif n'a sûrement pas manquée, est que *l'on peut tout simplement différentier q , au lieu de la polariser, pour retrouver B_q !* Avant de préciser cela, voyons comment ce qui précède se traduit au niveau des coordonnées dans une base de V , supposé (pour simplifier) de dimension 3.

Nous introduisons donc une base quelconque de V , et considérons les coordonnées relatives à cette base.

La matrice ligne³¹

$$M = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial q}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial q}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial q}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{array} \right]$$

s'appelle usuellement la *jacobienne* de q au point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, et l'on a ainsi, pour $v = (v_1, v_2, v_3)$,

$$\begin{aligned} dq(M_0)(v) &= \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial q}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial q}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial q}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{array} \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial q}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)v_1 + \frac{\partial q}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)v_2 + \frac{\partial q}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)v_3. \end{aligned}$$

Retrouvons maintenant, sur un exemple, la forme polaire B_q en différentiant q . Soit donc la forme quadratique q (en dimension 4) donnée dans une base par $q(x, y, z, t) = x^2 - xt + yz + 5zt$; alors,

$$\begin{aligned} 2B_q((x, y, z, t), (x', y', z', t')) &= dq(x, y, z, t)(x', y', z', t') \\ &= \frac{\partial q}{\partial x}(x, y, z, t)x' + \frac{\partial q}{\partial y}(x, y, z, t)y' \\ &\quad + \frac{\partial q}{\partial z}(x, y, z, t)z' + \frac{\partial q}{\partial t}(x, y, z, t)t' \\ &= (2x - t)x' + zy' + (y + 5t)z' + (5z - x)t' \\ &= 2xx' - (xt' + tx') + (yz' + zy') + 5(zt' + tz'), \end{aligned}$$

10.3. À l'écoute du contact

Nous avons dans l'idée de donner ici deux formules qui permettent la détermination rapide de l'équation de la tangente en un point à une conique³², un peu à la manière dont les Anciens s'y prenaient pour ce faire.

10.4. Définition

Soit \mathcal{C} une conique, intersection du plan affine \mathcal{E} avec le cône isotrope d'une forme quadratique q non dégénérée, de forme polaire associée B_q . Si $M_0 \in \mathcal{C}$, la *tangente* à \mathcal{C} en M_0 est la droite $T_{M_0}(\mathcal{C})$ définie comme l'intersection de \mathcal{E} et de $(\text{Vect}(\overrightarrow{OM_0}))^{\perp q}$.

³¹Laquelle est à distinguer du vecteur colonne $\nabla_q(M_0)$ ayant les mêmes composantes et qui s'appelle dans le cadre d'un espace euclidien le vecteur gradient de q en M_0 , lequel est défini par

$$dq(M_0)(H) = \langle \nabla_q(M_0), H \rangle, \quad \forall H \in V.$$

³²Le problème de l'écriture des équations des deux tangentes (réelles ou imaginaires) issues d'un point à une conique qui ne passe pas par ce point est d'une autre nature et, comme l'on peut s'en douter, est un peu plus compliqué puisqu'il faut à un moment ou à un autre résoudre une équation du second degré. Voir en section 16.

Comme $q(\overrightarrow{OM_0}) = 0$, on a en particulier $M_0 \in T_{M_0}(\mathcal{C})$. De plus, l'espace affine tangent au cône au point M_0 se confond avec l'espace vectoriel tangent et s'appuie sur le cône le long de la génératrice passant par M_0 .

On se place maintenant dans un repère barycentrique du plan, et l'on considère les coordonnées barycentriques qui en résultent³³. On choisit donc trois points A, B et C dans \mathcal{E} de telle sorte que $e_1 = \overrightarrow{OA}$, $e_2 = \overrightarrow{OB}$ et $e_3 = \overrightarrow{OC}$ forment une base de $V = \mathcal{E}^v$. Nous désignerons par Q la fonction polynomiale $q(Xe_1 + Ye_2 + Ze_3)$: c'est tout simplement la forme quadratique q écrite avec les coordonnées barycentriques³⁴.

10.5. Proposition. *Soit (A, B, C) une base barycentrique du plan affine \mathcal{E} ; si $M_0 \in \mathcal{C}$, une équation barycentrique de $T_{M_0}(\mathcal{C})$ est*

$$\frac{\partial Q}{\partial X}(M_0) X + \frac{\partial Q}{\partial Y}(M_0) Y + \frac{\partial Q}{\partial Z}(M_0) Z = 0.$$

Démonstration. Le fait que les dérivées partielles ne sont pas toutes les trois nulles en M_0 découle de la non-dégénérescence de q ; quant à la formule elle-même, on la déduit du fait que, pour un point M de \mathcal{E} , ayant pour triplet de coordonnées barycentriques (X, Y, Z) , on a

$$M \in T_{M_0}(\mathcal{C}) \Leftrightarrow B_q(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM}) = 0 \Leftrightarrow dq(M_0)(M) = 0.$$

Le reste découle des considérations élémentaires qui précèdent. \square

10.6. Exemple. Reprenons un des exemples de la section 9 en considérant la conique \mathcal{C} d'équation barycentrique

$$X^2 + Y^2 - (X + Y + Z)^2 = 0.$$

Avec nos notations, nous avons par exemple, en tout point,

$$\frac{\partial Q}{\partial X}(X, Y, Z) = 2X - 2(X + Y + Z),$$

et les deux autres dérivées partielles se calculent à l'avenant. Après simplification par -2 , l'équation de la tangente en $M_0(X_0, Y_0, Z_0)$ est donc

$$(Y_0 + Z_0)X + (X_0 + Z_0)Y + (X_0 + Y_0 + Z_0)Z = 0.$$

En particulier, la tangente au point A est parallèle à (BC) , comme cela fut déjà relevé en la page 221.

³³Ce choix n'a en vérité aucune incidence sur les calculs qui suivent, soit dit en passant.

³⁴L'écriture des coordonnées barycentriques ayant été choisie avec des lettres majuscules, nous avons noté avec Q majuscule la forme quadratique dans la base barycentrique considérée.

Nous nous attachons maintenant à énoncer une formule *cartésienne affine*; pour cela, nous supposons donné un repère cartésien affine $(\vec{e}_1, \vec{e}_2; \Omega)$ du plan affine \mathcal{E} et, cette fois, il ne sera plus question a priori que d'un couple de coordonnées, disons (x, y) . Dans la proposition qui suit, nous poserons $F(x, y) = q(\overrightarrow{O\Omega} + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2)$; en d'autres termes, une équation cartésienne de \mathcal{C} est $F(x, y) = 0$.

10.7. Proposition. *Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de la conique \mathcal{C} . Une équation cartésienne de $T_{M_0}(\mathcal{C})$ est*

$$(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Démonstration. On a clairement $F(x, y) = q(z\overrightarrow{O\Omega} + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2)|_{z=1}$, que l'on écrira plus simplement³⁵ : $F(x, y) = q(x, y, z)|_{z=1}$. Par suite,

$$\frac{\partial q}{\partial x}(x_0, y_0, 1) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial q}{\partial y}(x_0, y_0, 1) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Comme $M_0 = (x_0, y_0, 1)$ est isotrope, on a

$$0 = 2B_q(M_0, M_0) = dq(M_0)(M_0) = x_0 \frac{\partial q}{\partial x}(x_0, y_0, 1) + y_0 \frac{\partial q}{\partial y}(x_0, y_0, 1) + 1 \cdot \frac{\partial q}{\partial z}(x_0, y_0, 1),$$

de sorte que $\frac{\partial q}{\partial z}(x_0, y_0, 1) = -x_0 \frac{\partial q}{\partial x}(x_0, y_0, 1) - y_0 \frac{\partial q}{\partial y}(x_0, y_0, 1)$. Le résultat découle alors de ce que l'équation du plan tangent en M_0 est donnée par

$$x \frac{\partial q}{\partial x}(x_0, y_0, 1) + y \frac{\partial q}{\partial y}(x_0, y_0, 1) + z \frac{\partial q}{\partial z}(x_0, y_0, 1) = 0,$$

et que l'équation de la tangente à \mathcal{C} s'en déduit en intersectant avec $z=1$. \square

10.8. Remarques

1. Si le corps de base est \mathbb{R} , cette formule prouve l'identité, moyennant nos hypothèses, entre la tangente *algébrique* et la plus classique tangente *différentielle*.
2. Si, en $M \in \mathcal{C}$, les deux dérivées partielles sont nulles (ce qu'excluent nos hypothèses), le membre de gauche de la formule est identiquement nul et donc \mathcal{E} est inclus dans le q -orthogonal de \overrightarrow{OM} ; puisque \mathcal{E} engendre vectoriellement \mathcal{E}^v , cela montre que \overrightarrow{OM} appartient au noyau de q . La conique est alors, si q est de rang 2, soit le singleton $\{M\}$, soit la réunion de deux droites sécantes en M ou, si q est de rang 1, une droite *double* passant par M .

³⁵On vient en fait d'homogénéiser l'écriture de F en introduisant la troisième variable z .

3. Un cas particulier mérite d'être signalé : *lorsque la conique (non dégénérée) passe par l'origine Ω , le terme constant de la fonction polynomiale F est nul et, en ordonnant cette fonction selon les degrés croissants, on a une formule du type*

$$F(x, y) = ax + by + a'x^2 + 2b'xy + c'y^2.$$

Il résulte de la formule générale, pour la tangente $T_\Omega(\mathcal{C})$, l'équation simple à retenir $ax + by = 0$ (autrement dit, *on se limite, dans l'expression de $F(x, y)$, aux termes linéaires*).

10.9. Exercice. Écrire l'équation de la tangente au point $M_0 = (1/2, -1/2)$ et au point $M_1 = (-1/2, -1/6)$ à la conique définie par l'équation

$$3x^2 - 3y^2 - 2y - 1 = 0.$$

On trouve : $3x + y = 1$ et $-3x - y = \frac{5}{3}$.

Pourquoi sont-elles parallèles ? Voir l'exemple traité en page 217.

Réponse.— Les points sont diamétralement opposés sur la conique ; leur milieu est le centre $S = (0, -1/3)$.

10.10. À l'écoute du centre

Le centre d'une conique (à centre) s'obtient comme intersection de l'espace affine \mathcal{E} avec la droite E^\perp . Il n'est donc pas étonnant d'en entendre les battements au cœur de la conique par les techniques précédentes de calcul différentiel.

1. Dans le cas d'une équation en coordonnées cartésiennes, soit

$$F(x, y) = 0 = q(x, y, z)|_{z=1},$$

il s'agit d'écrire que le centre $S(x_0, y_0, 1)$ est orthogonal aux deux vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$, qui engendrent E , ce qui se traduit par le système linéaire $\frac{\partial q}{\partial x}(x_0, y_0, 1) = 0$ et $\frac{\partial q}{\partial y}(x_0, y_0, 1) = 0$ ou encore

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Ainsi, dans l'exemple de l'hyperbole $3x^2 - 3y^2 - 2y - 1 = 0$, que nous avons traité en page 217, on obtient si simplement³⁶ les coordonnées du centre S en résolvant le système linéaire évident : $6x_0 = 0$ et $6y_0 + 2 = 0$, soit $S = (0, -1/3)$.

³⁶Nous avons délibérément occulté cette approche dans une première phase pour habituer le lecteur à penser orthogonalité par polarisation.

Dans l'exemple de la parabole $4x^2 + y^2 + 4xy + 3x + y + 2 = 0$, traité en page 218 et rencontré dans l'exercice plus haut, le système linéaire correspondant donné par $8x_0 + 4y_0 = -3$ et $4x_0 + 2y_0 = -1$ n'a, comme l'on s'y attend, pas de solution. Quant au système résultant de l'équation homogénéisée $4x^2 + y^2 + 4xy + 3xz + yz + 2z^2 = 0$ donné par $8x + 4y + 3z = 0$ et $4x + 2y + z = 0$, l'ensemble de ses solutions est la droite de E paramétrée par $x \mapsto (x, -2x, 0)$, qui fournit (comme l'on s'y attend aussi) la direction de l'axe.

2. Dans le cas d'une équation donnée en coordonnées barycentriques, de la forme $Q(X, Y, Z) = 0$, il s'agit d'exprimer que le centre $S(X_0, Y_0, Z_0)$, situé dans \mathcal{E} , est orthogonal aux vecteurs $(1, -1, 0)$ et $(1, 0, -1)$, qui engendrent ici E , ce qui se traduit par le *système linéaire*

$$\begin{cases} X_0 + Y_0 + Z_0 = 1 \\ \frac{\partial Q}{\partial X}(X_0, Y_0, Z_0) = \frac{\partial Q}{\partial Y}(X_0, Y_0, Z_0) = \frac{\partial Q}{\partial Z}(X_0, Y_0, Z_0). \end{cases}$$

On notera que la condition $X_0 + Y_0 + Z_0 \neq 0$ suffisait pour caractériser un triplet de coordonnées barycentriques, mais nous avons préféré l'équation $X_0 + Y_0 + Z_0 = 1$, qui a la vertu de préserver le caractère *linéaire* du système. Ainsi, dans l'exemple de l'ellipse de Steiner Σ_{ABC} circonscrite $YZ + ZX + XY = 0$ (que nous rencontrerons à nouveau à l'occasion de l'exercice 12.5, en page 235, ou avec l'exemple 16, en page 249), les coordonnées barycentriques du centre sont solutions du système

$$X + Y + Z = 1, \quad Y + Z = X + Z = X + Y,$$

soit, comme il se doit, $X_0 = Y_0 = Z_0 = 1/3$.

10.11. Remarque. Est-il nécessaire de s'assurer que la conique admet un centre *avant* de faire les calculs? Certes non; si elle n'en a pas, ni le système affine ni le barycentrique n'auront de solution. Ils ne vont pas en inventer juste pour nous faire plaisir.

11. Retour aux auscultations traditionnelles

Une réciproque caractérisant le contact d'une droite dont on connaît l'équation serait, au stade où nous sommes, la bienvenue; pour le cas des équations barycentriques, cela sera fait à la section 16.

Les équations affines n'auront guère à patienter, puisque leur sort sera réglé tout de suite.

Nous étudions donc ci-après le contact d'une droite affine avec une conique non dégénérée définie dans un repère affine cartésien comme intersection

avec \mathcal{E} du cône isotrope d'une forme quadratique q ; il sera commode de considérer la donnée d'une droite affine Δ à l'aide d'un quelconque de ses propres repères cartésiens affines $(\vec{\varepsilon}; A)$, autrement dit au moyen d'un point et d'un vecteur directeur. Si la droite est au contraire donnée par son équation cartésienne $ax + by + c = 0$, avec par exemple $b \neq 0$, il sera facile de s'y ramener en choisissant un point et un vecteur directeur : $A(0, -c/b)$ et $\vec{\varepsilon} = b\vec{e}_1 - a\vec{e}_2$.

11.1. Proposition. *Dans le plan affine \mathcal{E} rapporté à un repère affine cartésien $(\vec{e}_1, \vec{e}_2; \Omega)$, on donne une conique non dégénérée Γ , d'équation en coordonnées cartésiennes affines $F(x, y) = 0$, où*

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f.$$

Pour $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{\Omega M} = xe_1 + ye_2$, on notera $F(M)$ pour $F(x, y)$; on suppose enfin la donnée d'une droite affine Δ comme supra. Alors, la fonction polynomiale $t \in \mathbb{K} \mapsto F(A + t\vec{\varepsilon})$ est de degré au plus 2, mais non identiquement nulle.

Plus précisément, nous avons ce qui suit.

1. *Si φ est de degré effectif 2, alors Δ est tangente à Γ si, et seulement si, le discriminant de φ est nul.*
2. *Si φ est de degré effectif 1, alors Δ est parallèle à une direction asymptotique de Γ (sans en être une asymptote).*
3. *Si φ est de degré effectif 0, alors Δ est une asymptote de Γ .*

Démonstration. Quelques points à venir font double emploi avec des preuves déjà détaillées ; cela étant, il n'est pas mauvais d'avoir ici une preuve complète des jolis résultats annoncés.

Si $\overrightarrow{\Omega A} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ et $\vec{\varepsilon} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$, la majoration du degré de φ résulte de la formule

$$\varphi(t) = a(x_1 + t\alpha_1)^2 + 2b(x_1 + t\alpha_1)(x_2 + t\alpha_2) + \dots$$

Remarquons que ce degré ne dépend pas du choix d'un repère affine : les formules de changement de repère étant affines, ce degré ne peut que baisser à la suite d'un tel changement ; or, si l'on change à nouveau pour revenir au repère initial, il ne peut encore une fois que baisser alors que l'on retrouve le degré initial. Donc, *il n'a jamais baissé* ; dans le même temps, l'équation affine $F(x, y) = 0$ est remplacée par une équation affine $F'(x, y) = 0$, qui reste de degré total 2.

On peut donc supposer d'emblée que $A = \Omega$ est l'origine du repère et que $\vec{\varepsilon} = \vec{e}_1$, c'est-à-dire le premier vecteur de base ; on a par suite la formule $\varphi(t) = at^2 + 2dt + f$. Disjoignons donc les cas.

1. *Cas où φ est de degré 2.* Si $a \neq 0$ et que $d^2 - af = 0$, la fonction φ s'annule pour un unique t_0 et, quitte à remplacer A par $A + t_0 \vec{\varepsilon}$, on peut supposer que $t_0 = 0$, autrement dit que $d = f = 0$. Or, il résulte du cas particulier de 10.7, évoqué en page 226, que l'équation cartésienne de la tangente $T_A(\Gamma)$ en A à la conique Γ est $dx + ey = 0$, soit encore $y = 0$, car $d = 0$ mais $e \neq 0$ (sinon, Γ serait dégénérée). Cette tangente est l'axe des abscisses, c'est-à-dire Δ .

Réciproquement, si $a \neq 0$ et que Δ soit tangente à Γ en un point $A_0 \in \Delta$, choisissons encore une fois $\Omega = A_0$; on a donc déjà $f = 0$. En outre, de 10.7 résulte à nouveau que l'équation cartésienne de la tangente $T_{A_0}(\Gamma)$ est $dx + ey = 0$. C'est bien dire que l'on a $d = 0$ et que $d^2 - af = 0$.

2. *Cas d'abaissement du degré.* Si $a = 0$, l'intersection Γ_∞ de E avec le cône isotrope de q a pour équation $(2bx + cy)y = 0$; cette intersection est une droite ou la réunion de deux droites, et, dans tous les cas, le vecteur $\vec{\varepsilon}$ appartient à une génératrice de Γ_∞ . Donc, la droite Δ est parallèle à une direction asymptotique de Γ .

Si $d \neq 0$, alors φ est de degré 1 et l'intersection de Γ et de Δ se réduit au point $A_0 = A - f\vec{\varepsilon}/2d$. Si $b = 0$, la conique est une parabole et Δ n'en est donc pas asymptote; si $b \neq 0$, elle admet pour centre un point S d'ordonnées $-d/b \neq 0$: puisque $S \notin \Delta$, cette droite n'est pas non plus une asymptote dans ce cas.

Si $d = 0$, alors $f \neq 0$ (car, sinon, on pourrait factoriser y dans l'équation de la conique Γ , et il s'agirait d'une hyperbole dégénérée) et $b \neq 0$ (sinon, la conique serait une parabole dégénérée, faute de termes en x effectifs); par suite, Γ possède un centre S , de coordonnées $(-e/b, 0)$. Comme $S \in \Delta$, cette droite, parallèle à une direction asymptotique, est donc une asymptote. \square

Quelques remarques méritent d'être faites dans le cas où le corps de base est \mathbb{R} .

11.2. Remarques

1. Si Γ est une ellipse, elle n'a pas de directions asymptotiques (réelles) et le polynôme φ est toujours de degré 2.
2. Si Γ est une parabole, elle a une direction asymptotique, celle de son axe, et toute droite parallèle à l'axe coupe Γ en un point. Une tangente coupe Γ en un point, mais qui compte double.
3. Si Γ est une hyperbole, elle a deux asymptotes et toute droite strictement parallèle à l'une d'elles coupe Γ en un point. Une tangente coupe Γ en un point, mais qui, ici aussi, compte double. Enfin, les asymptotes sont les seules droites disjointes de Γ .

À noter que, lorsque φ est non constant et scindé, son degré compte le nombre de points d'intersection de Γ et de Δ à *distance finie*, comptés avec leur multiplicité. L'abaissement du degré correspond à une intersection à l'infini dans le complété projectif.

11.3. Exercice. Dans le plan affine réel \mathcal{E} rapporté à une base affine cartésienne $(\vec{e}_1, \vec{e}_2; \Omega)$, on donne la conique \mathcal{C} d'équation (cartésienne)

$$x^2 + xy - 2y^2 - 2x - y = 0.$$

1. Soit un vecteur non nul $\vec{\varepsilon} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$; discuter selon les scalaires a_1 et a_2 le nombre de points d'intersection avec \mathcal{C} de la droite $\Delta = (\vec{\varepsilon}; \Omega)$. En déduire les directions des branches infinies de \mathcal{C} .
2. Reprendre maintenant la question précédente en remplaçant Ω par le point $B = (-1/3, 2/3)$.
3. Soit $A(x, y)$ un point de \mathcal{E} ; discuter le nombre de points d'intersection avec \mathcal{C} de la droite $\Delta' = (\vec{\varepsilon}; A)$, lorsque $\vec{\varepsilon}$ dirige une branche infinie de \mathcal{C} . En déduire le centre de \mathcal{C} .

Solution. – Nous conservons ici les notations de la proposition 11.1.

1. Un calcul banal montre que, lorsque $\Delta = (\vec{\varepsilon}; \Omega)$, la fonction $\varphi = \varphi_{\Omega, \vec{\varepsilon}}$ est donnée par

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (a_1 - a_2)(a_1 + 2a_2)t^2 - (2a_1 + a_2)t.$$

Si $a_1 \neq a_2$ et $a_1 \neq -2a_2$, le degré effectif est 2 et $\vec{\varepsilon}$ ne dirige pas une branche infinie de \mathcal{C} . Dans le cas contraire, le coefficient de t est en revanche non nul : $2a_1 + a_2 \neq 0$ (sinon, on aurait $a_1 = a_2 = 0$), et donc le degré est 1 ; en conclusion, la conique \mathcal{C} possède deux directions asymptotiques, qui sont $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{\varepsilon}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

2. On considère la droite $D = (\vec{\varepsilon}; B)$, avec $\vec{\varepsilon} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. On a alors

$$\begin{aligned} \varphi_{B, \vec{\varepsilon}} &= F(B + t\vec{\varepsilon}) = F\left(-\frac{1}{3} + ta, \frac{2}{3} + tb\right) \\ &= \left(-\frac{1}{3} + ta\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} + ta\right)\left(\frac{2}{3} + tb\right) - 2\left(\frac{2}{3} + tb\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{3} + ta\right) - \left(\frac{2}{3} + tb\right) \\ &= \frac{1}{9} + t^2a^2 - \frac{2}{3}ta - \frac{2}{9} - \frac{t}{3}b + \frac{2}{3}ta + abt^2 - \frac{8}{9} - \frac{8}{3}tb - 2b^2t^2 + \frac{2}{3} - 2ta - \frac{2}{3} - tb \\ &= (a^2 + ab - 2b^2)t^2 + (-2a - 4b)t - 1 \\ &= (a - b)(a + 2b)t^2 - 2(a + 2b)t - 1. \end{aligned}$$

Le discriminant réduit vaut

$$\delta = (a + 2b)^2 + (a - b)(a + 2b) = (a + 2b)(2a + b).$$

Nous serons dès lors plus économes quant aux détails. Nous retrouvons, bien sûr, les deux directions asymptotiques $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{\varepsilon}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

de la question précédente. Comme la direction définie par $\vec{\varepsilon}_2$ annule le coefficient de t aussi, le degré de φ est nul et la droite correspondante est en fait une asymptote passant donc par B . La direction $2a + b = 0$ suggérée par l'autre cas de nullité de δ est celle de l'unique vraie tangente issue de B à la conique.

3. Un calcul simple montre que, lorsque $\Delta'_1 = (\vec{\varepsilon}_1; A)$, la fonction $\varphi_{A, \vec{\varepsilon}_1}$ est donnée par

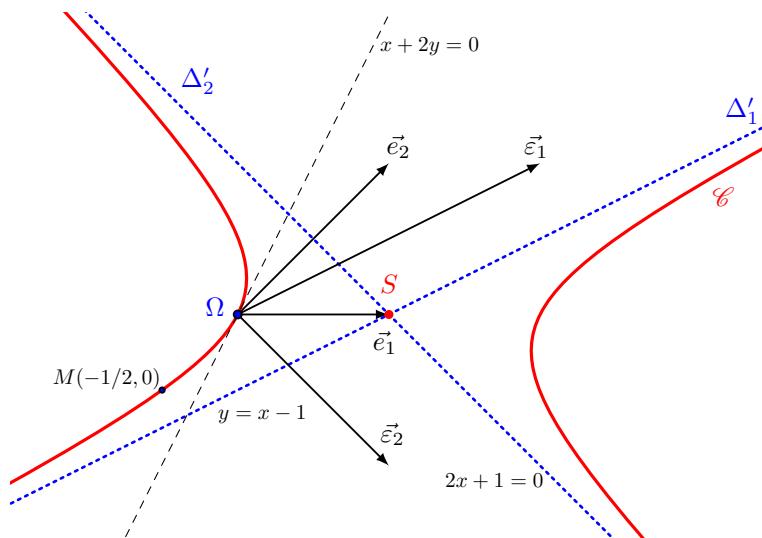
$$t \in \mathbb{R} \mapsto 3(x - y - 1)t + x^2 + xy - 2y^2 - 2x - y.$$

Si $x - y \neq 1$, le degré est 1, et la droite Δ'_1 n'a donc que la direction d'une asymptote, sans en être une.

Sinon, on vérifie que $x^2 + xy - 2y^2 - 2x - y = -1 \neq 0$, et donc que Δ'_1 est une asymptote, d'équation $x - y = 1$. De même, lorsque $\Delta'_2 = (\vec{\varepsilon}_2; A)$, la fonction φ est donnée par

$$t \in \mathbb{R} \mapsto 3(x + 2y - 1)t + x^2 + xy - 2y^2 - 2x - y.$$

Si $x + 2y \neq 1$, le degré est 1, et Δ'_2 n'a que la direction d'une asymptote, sans en être une ; sinon, on vérifie que $x^2 + xy - 2y^2 - 2x - y = -1 \neq 0$ et donc que Δ'_2 est une asymptote, d'équation $x + 2y = 1$.



En conclusion, la conique \mathcal{C} est du type *hyperbole* et le centre de \mathcal{C} est le point $S(1, 0)$, à l'intersection des deux asymptotes ; comme $S \notin \mathcal{C}$, cela signifie que \mathcal{C} est non dégénérée.

11.4. Exercice. On considère, dans le plan affine réel \mathcal{E} rapporté à une base affine cartésienne $(e_1, e_2; \Omega)$, deux coniques \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 non dégénérées, passant par Ω et d'équations cartésiennes respectives

$$a_1x + a_2y + q_1(\overrightarrow{\Omega M}) = 0 \quad \text{et} \quad a_1x + a_2y + q_2(\overrightarrow{\Omega M}) = 0,$$

où $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ et où q_1 et q_2 sont deux formes quadratiques non nulles.

1. Montrer que ces deux coniques ont la même tangente T_Ω à l'origine.
2. On pose $\vec{\varepsilon} = a_1e_1 + a_2e_2$; montrer que, au voisinage de Ω , les deux coniques sont d'un même côté du demi-plan limité par T_Ω (respectivement de part et d'autre de T_Ω) si, et seulement si, $q_1(\vec{\varepsilon})q_2(\vec{\varepsilon}) > 0$ (respectivement $q_1(\vec{\varepsilon})q_2(\vec{\varepsilon}) < 0$).

Indication. – On pourra se ramener au cas où $\vec{\varepsilon} = e_1$ et vérifier alors que, pour $M(x, y)$ assez proche de Ω sur l'une des deux coniques, on a $xy = o(x^2)$ et $y^2 = o(x^2)$.

12. Coniques circonscrites

Intéressons-nous maintenant à l'existence de coniques passant par un certain nombre de points, pris dans le plan affine \mathcal{E} . Plaçons-nous toujours dans le cadre des coordonnées barycentriques. Le plan affine \mathcal{E} contient alors naturellement un triangle (ABC) , ces points ayant été définis comme au début de section 3. Supposons qu'il existe une conique circonscrite à ce triangle, c'est-à-dire passant par les trois sommets d'icelui. La proposition suivante nous renseigne quant à la nature de la forme quadratique associée.

12.1. Proposition. *La forme quadratique, définie à un scalaire multiplicatif non nul près, associée à une conique circonscrite au triangle A, B, C est sans termes carrés. Autrement dit, l'équation de la conique est donnée par*

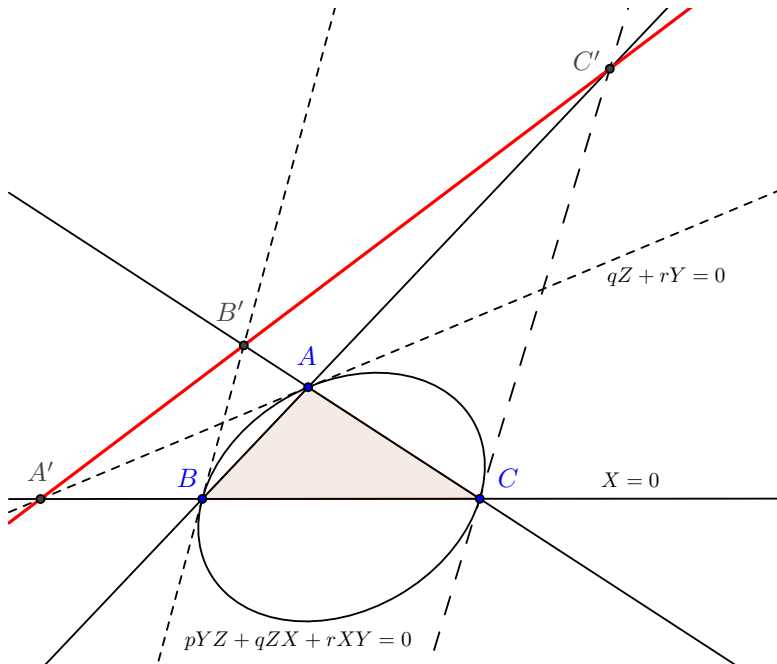
$$pYZ + qXZ + rXY = 0;$$

en d'autres termes également, la matrice de la forme quadratique dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{bmatrix}.$$

On notera que la conique est alors non dégénérée si, et seulement si, $pqr \neq 0$, puisque le déterminant de cette matrice est $2pqr$.

12.2. Exercice. Montrer que les tangentes en les trois sommets d'un triangle inscrit dans une conique non dégénérée recourent respectivement les côtés opposés en des points alignés.



Indication. – Prendre comme base affine les sommets du triangle. Nous raisonnons dans l'espace (V, τ) , même si notre figure se limite à $\tau = 1$. L'équation du cône au-dessus de la conique est alors donnée par

$$pYZ + qXZ + rXY = 0.$$

L'orthogonal, par exemple, du sommet $(1, 0, 0)$ a pour équation $qZ + rY = 0$ (voir la section 7 ou encore, pour faire plus vite, la section 10). Il coupe le plan $X = 0$ suivant la droite engendrée par $(0, q, -r)$. On conclut en remarquant que le système formé de ce vecteur-ci et des vecteurs analogues $(p, 0, -r)$ et $(p, -q, 0)$ est lié, et que ces vecteurs engendrent le plan d'équation

$$\frac{X}{p} + \frac{Y}{q} + \frac{Z}{r} = 0,$$

écriture que le lecteur pourra rapprocher d'une écriture symbolique de l'équation de notre conique, donnée par

$$\frac{p}{X} + \frac{q}{Y} + \frac{r}{Z} = 0.$$

La proposition ci-dessus acquise, on peut désormais s'intéresser à *la nature d'une telle conique*. Déjà, rappelons que la forme quadratique est non dégénérée si, et seulement si, $pqr \neq 0$. Une fois cette condition vérifiée, on peut ensuite se demander s'il s'agit d'un conique à centre. Rappelons que le centre S d'une conique est donné par :

$$\{S\} = E^{\perp q} \cap \mathcal{E}.$$

Rappelons également que le sous-espace E est l'hyperplan (en fait c'est un plan, vu que la dimension est égale à 3) défini par $E = \ker \tau$. Maintenant, la proposition I-5.3, en page 36, donne

$$E^{\perp q} = \varphi_q^{-1}(E^{\perp}),$$

avec φ_q^{-1} désignant l'image réciproque de φ_q , mais en fait également l'image directe par φ_q , qui est bien définie (car, lorsque q est non dégénérée, φ_q est bijective). On obtient alors

$$\begin{aligned} E^{\perp q} &= \varphi_q^{-1}((\ker \tau)^{\perp}) \\ &= \varphi_q^{-1}(\mathbb{R}\tau) = \mathbb{R}\varphi_q^{-1}(\tau). \end{aligned}$$

Cette égalité est rassurante dans le sens où $\mathbb{R}\varphi_q^{-1}(\tau)$ est bien une droite, c'est ce que l'on voulait pour $E^{\perp q}$. Or, selon la forme quadratique associée, on a

$$\text{Mat}(\varphi_q, \mathcal{B}, \mathcal{B}^*) = \begin{bmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{bmatrix},$$

et, à un scalaire multiplicatif non nul près,

$$\text{Mat}(\varphi_q^{-1}, \mathcal{B}^*, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -p^2 & pq & pr \\ pq & -q^2 & qr \\ pr & qr & -r^2 \end{bmatrix}.$$

Comme de plus, $\tau(X, Y, Z) = X + Y + Z$, on en déduit (toujours à un scalaire non nul près) que

$$\varphi_q^{-1}(\tau) = \begin{bmatrix} -p^2 & pq & pr \\ pq & -q^2 & qr \\ pr & qr & -r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p^2 + pq + pr \\ pq - q^2 + qr \\ pr + qr - r^2 \end{bmatrix}. \quad (!!)$$

On trouve alors que l'intersection $E^{\perp q} \cap \mathcal{E}$ est non vide si, et seulement si, la somme des coordonnées du dernier vecteur est non nulle. En posant

$$\mathcal{S} = p^2 + q^2 + r^2 - 2pq - 2pr - 2qr,$$

on obtient alors le résultat qui suit.

12.3. Proposition. *La conique non dégénérée d'équation*

$$pYZ + qXZ + rXY = 0$$

est une parabole si, et seulement si, la quantité \mathcal{S} est nulle.

On se doute maintenant que le signe de \mathcal{S} va pouvoir départager ellipses et hyperboles. C'est en effet le cas.

12.4. Proposition. *La conique réelle non dégénérée d'équation*

$$pYZ + qXZ + rXY = 0$$

est une ellipse (resp. hyperbole) si, et seulement si, \mathcal{S} est strictement négative (resp. strictement positive).

Démonstration. Tout revient à vérifier la nature de la forme quadratique $q|_E$. Or, ici, le sous-espace vectoriel E admet pour équation $X + Y + Z = 0$. Comme $q(X, Y, Z) = pYZ + qXZ + rXY$, on en déduit

$$q|_E(X, Y, -X - Y) = pY(-X - Y) + qX(-X - Y) + rXY.$$

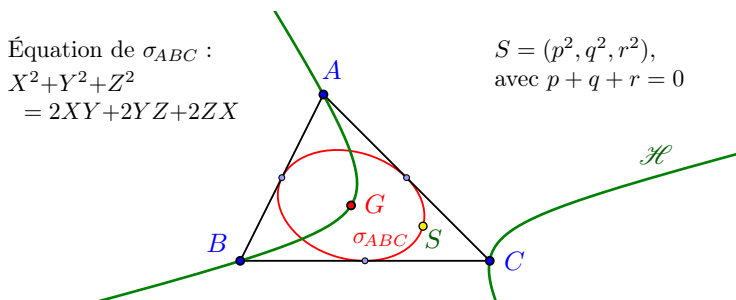
La matrice de $q|_E$, relativement au paramétrage $(X, Y) \mapsto (X, Y, -X - Y)$ de E , est, à un facteur près,

$$\begin{bmatrix} -2q & r - p - q \\ r - p - q & -2p \end{bmatrix},$$

et son discriminant est $-\mathcal{S}$. On conclut facilement. □

12.5. Exercice. Vérifier qu'une conique qui passe par les sommets du triangle (ABC) et par son centre de gravité G est toujours une hyperbole. Trouver le lieu des centres de ces hyperboles.

Réponse.— Il s'agit de déterminer le signe de $\mathcal{S} = (r - p - q)^2 - 4pq$, sachant que $p + q + r = 0$. On trouve alors : $\mathcal{S}/4 = p^2 + q^2 + pq > 0$.



Le lieu des centres est la conique de Steiner inscrite $\sigma = \sigma_{ABC}$, dont l'équation barycentrique est donnée en l'exercice 22.3. Cf. aussi 21.4 et page 293.

12.6. Remarque. Nous allons clore cette section par la réponse à une question importante pour la suite³⁷, qui prépare d'ailleurs à la section 14.

Commençons donc par la question : que peut-on dire de l'ensemble des coniques passant par quatre points (dont trois quelconques ne sont pas alignés) ? Nous venons de voir que l'ensemble des coniques passant par trois points s'identifie à un plan projectif, puisque ces coniques sont données par des équations de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$ dans la base affine définie par ces trois points, que l'on a préalablement ordonnés, et que deux telles équations définissent la même conique si, et seulement si, elles sont proportionnelles³⁸.

Demander qu'une telle conique passe par un quatrième point, revient à écrire une relation *linéaire* entre les scalaires p , q et r . L'ensemble des coniques passant par quatre points est donc une droite projective, qu'il est d'usage d'appeler *faisceau de coniques*. Comme toute droite projective, un faisceau de coniques est donc déterminé par le choix de deux de ses « points », c'est-à-dire ici par deux de ses coniques distinctes.

Dit autrement, deux coniques distinctes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 se coupant en quatre points définissent un faisceau ; de plus, si $q_1 = 0$ et $q_2 = 0$ sont des équations respectives de ces coniques, toutes les autres coniques du faisceau (en dehors de celle définie par q_2 , bien sûr), c'est-à-dire les coniques passant par ces quatre points, sont données par les équations $q_1 + \lambda q_2$, pour λ variant dans \mathbb{K} ³⁹ !

Que dire maintenant des coniques passant par cinq points (dont trois quelconques ne sont pas alignés) ? Une telle conique appartient au faisceau défini par les quatre premiers points et aussi par le faisceau défini par les quatre derniers. Elle est donc à l'intersection de deux droites⁴⁰ du plan projectif formé des coniques passant par les trois points « au milieu ». Deux droites projectives distinctes d'un plan projectif se coupent toujours en un point unique. Il passe donc une conique et une seule par cinq points génériques du plan projectif⁴¹.

³⁷Voir notamment la section 22, en page 289.

³⁸Pour peu qu'un cône isotrope non dégénéré, en dimension 3, contienne au moins deux droites vectorielles, il détermine à un scalaire multiplicatif non nul près la forme quadratique qui lui donne naissance. Ce résultat est démontré en exercice, au I-4.17.

³⁹Pour éviter de particulariser ainsi l'une des coniques, l'on peut aussi en considérer une équation de la forme $\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 = 0$, avec $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$; avec ce choix, la structure de droite projective du faisceau n'en est que plus apparente.

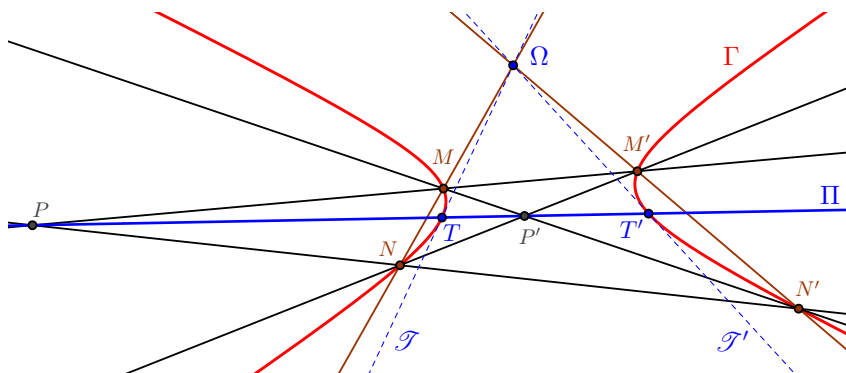
⁴⁰Le fait que l'on a bien deux droites distinctes sera établi soigneusement dans la section 14.

⁴¹Les deux plans projectifs dont il vient d'être question ne sont pas les mêmes ! Le premier est contenu dans l'espace projectif des coniques (lequel est de dimension 5) et l'autre est l'espace projectif où se trouvent les coniques et qui provient de l'espace vectoriel V où sont définies nos formes quadratiques (qui forment quant à elles un espace vectoriel de dimension 6).

Nous reviendrons sur cela, avec un œil tout neuf, dans la section qui vient après la suivante, c'est-à-dire en 14.

13. Compléments sur la polarité

13.1. Construction à la règle seule



Au I-5.37, nous avons soulevé un coin du voile; nous avons maintenant le matériel adéquat pour justifier une construction de la polaire d'un point par rapport à une conique. Un sous-produit de cela est la recherche des tangentes menées d'un point à une conique non dégénérée, lorsqu'elles existent⁴².

Soit Γ une conique d'un plan projectif. D'un point $\Omega \notin \Gamma$, on mène deux sécantes (MN) et $(M'N')$; les droites (MM') et (NN') se coupent en P et les droites (MN') et $(M'N)$ en P' .

13.2. Proposition

1. La polaire Π de Ω relativement à Γ est la droite (PP') .
2. Si Γ est non dégénérée, les points de contact des tangentes menées de Ω à Γ , si elles existent, sont les points d'intersection de Γ et de (PP') .

Démonstration.—

1. Prenons $MM'N$ comme base barycentrique du plan, et désignons alors par (X_0, Y_0, Z_0) les coordonnées barycentriques de N' ; vu qu'elle passe par M, M', N, N' , la conique Γ admet une équation barycentrique de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$, avec $pY_0Z_0 + qZ_0X_0 + rX_0Y_0 = 0$. Le point Ω , à l'intersection de (MN) et de $(M'N')$ admet pour coordonnées barycentriques $(X_0, 0, Z_0)$ et (de même) le point P admet pour coordonnées barycentriques $(X_0, Y_0, 0)$.

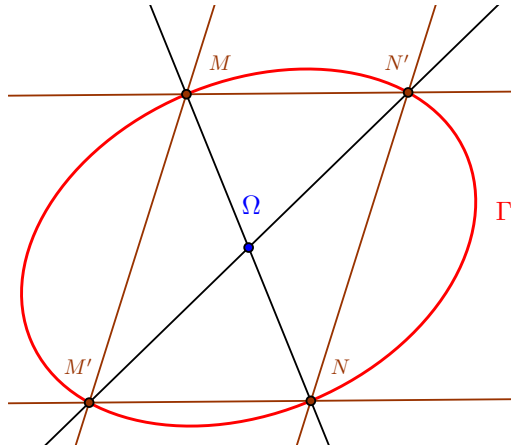
⁴²De nombreuses figures de ce livre ont été réalisées grâce à cette construction.

Alors, les points Ω et P sont conjugués par rapport à Γ , car, en en polarisant l'équation barycentrique, nous vérifions effectivement que

$$\begin{aligned} p \cdot (0.0 + Z_0 Y_0) + q \cdot (Z_0 X_0 + X_0.0) + r \cdot (X_0 Y_0 + 0.X_0) \\ = p Y_0 Z_0 + q Z_0 X_0 + r X_0 Y_0 = 0. \end{aligned}$$

Nous vérifions de même la conjugaison de Ω et de P' ; ainsi, la polaire de Ω est bien la droite (PP') .

Une méthode expéditive, et foncièrement avouable, consiste à envoyer la droite (PP') à l'infini, ce qui rend alors parallèles les paires de droites (MM') , (NN') et, de même, (MN') , $(M'N)$; or, il s'agit de montrer alors que le point Ω est le pôle de la droite de l'infini, c'est-à-dire le centre de la conique, et c'est bien ce que traduit la figure qui suit.



2. Nous savons que, si Γ est le quotient projectif du cône isotrope d'une forme quadratique non dégénérée q , si $T \in \Gamma$ et Ω sont les quotients projectifs de deux vecteurs X et Y , le point Ω appartient à la tangente en T si, et seulement si, $B_q(X, Y) = 0$; or, c'est bien la condition de conjugaison de ces deux points. \square

13.3. Remarques

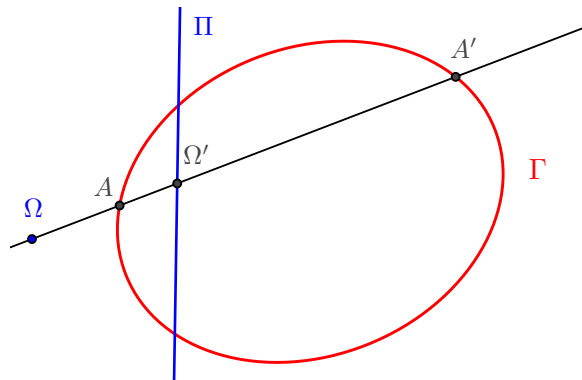
1. Corrélativement, pour obtenir le pôle d'une droite \mathcal{D} , il suffit d'en choisir deux points et d'en construire les polaires; le pôle de Δ est alors l'intersection de ces deux polaires. C'est inutile si \mathcal{D} est tangente à la conique, puisqu'alors le pôle est le point de contact.
2. De même, si $\Omega \in \Gamma$, la polaire de ce point, c'est-à-dire la tangente, résulte de ce qui suit : on choisit une droite \mathcal{D} passant par ce point; on en construit le pôle T et la tangente est alors la droite (ΩT) .

3. La construction *supra* reste partiellement valide lorsque la conique Γ est la réunion de deux droites distinctes (même parallèles) ; la polaire passe alors toujours par le point d'intersection S des deux droites. Seul l'alinéa concernant les éventuelles tangentes menées de Ω à Γ perd son sens, à moins que l'on ne convienne que la (seule) tangente menée de Ω est la droite $(S\Omega)$ ⁴³.

Toutes ces remarques-là découlent de la symétrie de la relation de conjugaison.

La proposition qui suit revient sur la relation entre *polarité* et *conjugaison harmonique* ; l'énoncé reste valide si la conique Γ est la réunion de deux droites Δ et Δ' , sécantes en un point S . Pour la notion de *conjugaison harmonique* et la façon de la caractériser, on pourra utilement consulter la section VII-1.1.

13.4. Proposition. *Soit Γ une conique projective, et soit $\Omega \notin \Gamma$. On désigne par Π la polaire de Ω . Si une droite issue de Ω coupe Γ en A et A' et Π en Ω' , les quatre points A, A', Ω, Ω' sont harmoniquement conjugués.*



Démonstration. Envoyons à l'infini la droite Π ; le point Ω' y va donc lui aussi, et Ω devient le centre de la conique (voir ce qui précède). Les points A et A' sont alors diamétralement opposés sur Γ , de sorte que Ω est le milieu de $[AA']$. La conjugaison harmonique annoncée est donc établie. \square

⁴³Pour éviter la prolifération de cas particuliers dans la plupart des énoncés concernant les coniques dans les cas de dégénérescence, il est en effet envisageable de convenir que toute droite passant par S est tangente à Γ ... puisqu'elle la coupe en deux points confondus.

14. Conique définie par cinq points

14.1. Un exposé classique

Tâchons à nouveau de gérer les degrés de liberté dans le choix des coniques circonscrites au triangle A, B, C . Cela s'éclaire par le résultat suivant, très intéressant en lui-même.

14.2. Proposition. *On se donne cinq points distincts dont quatre quelconques ne sont pas alignés. Il existe une conique non dégénérée passant par ces points si, et seulement si, trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés.*

Démonstration. La démonstration provient du livre [JDE]. On travaille toujours avec les coordonnées barycentriques. Grâce aux hypothèses, il existe donc parmi ces points, trois formant un triangle non aplati. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il s'agit des points A, B, C précédemment définis. On se donne également les coordonnées $(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)$ des deux autres points. Une conique passant par ces cinq points est donc en particulier une conique circonscrite au triangle A, B, C et admet donc, de façon nécessaire et suffisante, une équation de la forme $pXY + qXZ + rYZ = 0$. De plus, la conique passant par les deux autres points, les équations suivantes sont satisfaites

$$\begin{cases} pX_1Y_1 + qX_1Z_1 + rY_1Z_1 = 0 \\ pX_2Y_2 + qX_2Z_2 + rY_2Z_2 = 0. \end{cases}$$

Il s'agit en fait d'un système d'équations en les inconnues p, q et r , qui est de rang 2. Il est clair en effet qu'il est de rang au plus 2 et s'il était de rang inférieur ou égal à 1, les trois mineurs 2×2 seraient nuls, c'est-à-dire que l'on aurait :

$$\begin{aligned} X_1Z_1Y_2Z_2 - Y_1Z_1X_2Z_2 &= Z_1Z_2(Y_1X_2 - Y_2X_1) = 0 \\ X_1Y_1Y_2Z_2 - Y_1Z_1X_2Y_2 &= Y_1Y_2(X_1Z_2 - X_2Z_1) = 0 \\ X_1Y_1X_2Z_2 - X_1Z_1X_2Y_2 &= X_1X_2(Z_1Y_2 - Z_2Y_1) = 0. \end{aligned}$$

Si maintenant les deux points $(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)$ ne se trouvaient pas sur (BC) , on aurait $X_1 \neq 0$ et $X_2 \neq 0$, de sorte que $X_1X_2(Z_1Y_2 - Z_2Y_1) = 0$

si, et seulement si, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$. Mais alors, si tel est le cas, les trois points $A, (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)$ sont alignés et les quantités

$$Y_1Y_2(X_1Z_2 - X_2Z_1) \quad \text{et} \quad X_1X_2(Z_1Y_2 - Z_2Y_1)$$

ne peuvent pas être nulles. Dans le cas où par exemple (X_1, Y_1, Z_1) se trouve sur (BC) , alors $X_1 = 0$, d'où l'on en déduit $X_2 \neq 0$ et $Y_1Z_1 \neq 0$, mais alors

après simplification $-Y_1 Z_1 X_2 Y_2 = 0$ et $Y_1 Z_1 X_2 Z_2 = 0$, il suffit de vérifier que Y_2 ou Z_2 est non nul pour obtenir la contradiction, et c'est le cas sinon le point (X_2, Y_2, Z_2) serait en A . \square

14.3. Proposition. *L'équation de la conique générale circonscrite au repère affine (A, B, C) et passant par les points M_1 et M_2 de coordonnées barycentriques respectifs (X_1, Y_1, Z_1) et (X_2, Y_2, Z_2) est donnée par*

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{X} & \frac{1}{Y} & \frac{1}{Z} \\ \frac{1}{X_1} & \frac{1}{Y_1} & \frac{1}{Z_1} \\ \frac{1}{X_2} & \frac{1}{Y_2} & \frac{1}{Z_2} \end{vmatrix} = 0.$$

En multipliant par XYZ , on retrouve visiblement l'équation d'une conique, équation que vérifient les points M_1 et M_2 !

14.4. Exercice. Montrer que si ABC est le repère de référence et $M(p, q, r)$ et $M'(p', q', r')$ sont à l'infini, la conique circonscrite⁴⁴ passant par les deux points M et M' admet pour équation

$$pp'YZ + qq'ZX + rr'XY = 0.$$

14.5. Exercice. L'énoncé de la proposition 14.3, ci-dessus, donne en fait une condition nécessaire et suffisante pour que trois points soient sur une même conique circonscrite au triangle ABC de base.

1. Montrer que si (a, b, c) sont les coordonnées barycentriques normalisées d'un point S du plan, les coordonnées barycentriques des symétriques des sommets A , B et C sont données par les colonnes respectives de la matrice

$$\begin{bmatrix} 2a-1 & 2a & 2a \\ 2b & 2b-1 & 2b \\ 2c & 2c & 2c-1 \end{bmatrix}.$$

2. Montrer que

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2a-1} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b-1} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{2c} & \frac{1}{2c} & \frac{1}{2c-1} \end{vmatrix} = \frac{a+b+c-1}{4abc(2a-1)(2b-1)(2c-1)} = 0.$$

3. Qu'en déduit-on? (Cf. exercice 18.6, en page 261.)

⁴⁴Il s'agit, bien sûr, d'une hyperbole dont on connaît les directions des asymptotes.

14.6. Coniques, sauce lyonnaise

L'oral du concours de l'ÉNS de Lyon accommode à sa façon la définition des coniques par cinq points ; voici une libre interprétation d'un exercice de la session de 2012. Il faut se rendre compte qu'il s'agit d'un exercice d'oral : ayant à se conformer à un programme, l'examinateur n'a pas recherché l'énoncé le plus général possible et s'est en particulier placé dans le cadre *affine réel*, comme l'on s'en apercevra tout de suite.

14.7. Exercice

1. On donne un plan affine réel \mathcal{E} rapporté à un repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2; \Omega)$, cartésien affine.

a) On se donne deux points distincts A et A' dans \mathcal{E} , de coordonnées respectives (x_A, y_A) et $(x_{A'}, y_{A'})$ ainsi qu'une matrice J , réelle inversible d'ordre 2.

Montrer que l'on définit une bijection Φ entre l'ensemble \mathcal{D}_A des droites affines passant par A et l'ensemble $\mathcal{D}_{A'}$ des droites affines passant par A' en associant à la droite d'équation $\lambda(x - x_A) + \mu(y - y_A) = 0$ la droite d'équation $\lambda'(x - x_{A'}) + \mu'(y - y_{A'}) = 0$, où

$$\begin{bmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{bmatrix} \stackrel{(1)}{=} J \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}.$$

b) Déterminer par son équation l'ensemble \mathcal{C} des points de \mathcal{E} de la forme $\Delta \cap \Phi(\Delta)$, où $\Delta \in \mathcal{D}_A$, puis montrer que \mathcal{C} contient A et A' .

2. Soient cinq points A, A', B, C, D de E , trois à trois non alignés. Montrer qu'il existe une conique Γ passant par ces cinq points.

Indications. – Nous donnons à présent suffisamment d'indices pour que le lecteur puisse finir lui-même la cuisson, et se délecter du produit fini.

1. a) Il ne s'agit pas que d'invoquer ici la matrice inverse J^{-1} pour pouvoir parler de bijection ; le problème est surtout en amont : puisqu'une droite $\Delta \in \mathcal{D}_A$ possède plusieurs équations possibles⁴⁵, on vérifiera aisément que la droite $\Phi(\Delta)$ ne dépend pas de l'équation choisie.

b) Soit $M(x, y)$ un point de \mathcal{E} ; alors $M \in \mathcal{C}$ si, et seulement si, il existe un couple $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tel que

$$\lambda(x - x_A) + \mu(y - y_A) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda'(x - x_{A'}) + \mu'(y - y_{A'}) = 0$$

où le couple (λ', μ') satisfait la relation (1) ci-dessus.

⁴⁵Plus précisément, deux équations de la même droite sont proportionnelles, avec un facteur multiplicatif non nul.

On vérifiera que cela équivaut à dire qu'un certain système linéaire homogène de deux équations en les deux inconnues λ et μ n'est pas de Cramer et, de ce fait, admet un déterminant nul. La nullité de ce déterminant équivaut à une équation en (x, y) de degré au plus 2, que l'on trouvera en note de bas de page⁴⁶; en outre, les coordonnées de A et A' satisfont cette équation⁴⁷.

On n'en déduira pas hâtivement que \mathcal{C} est une conique : si par exemple J est la matrice-identité, alors les droites Δ et $\Phi(\Delta)$ sont toujours parallèles ; si Δ n'est pas la droite (AA') elle-même, alors ces deux parallèles sont disjointes. De ce fait, \mathcal{C} est réduit à la droite (AA') ; dans l'esprit de l'exercice, nous nous contenterons de vérifier que \mathcal{C} est réellement une conique dans le cas de la question qui suit.

Remarque. Il est immédiat que si l'on remplace J par aJ , où a est un scalaire non nul, on obtient la même application Φ et, partant, le même ensemble \mathcal{C} .

2. On peut toujours réordonner les cinq points donnés de façon que les vecteurs \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{BC} ne soient pas colinéaires. Cela étant supposé, on choisit $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}; A)$ comme nouveau repère affine cartésien ; les coordonnées de A, B et C sont alors $(0, 0), (1, 0)$ et $(0, 1)$, celles de D sont de la forme (u, u') où $uu' \neq 0$ et $u + u' \neq 1$ (sinon, nous aurions des alignements de trois de nos cinq points) et celles de A' de la forme (v, v') , où, pour la même raison, on a $vv' \neq 0$ et $v + v' \neq 1$. Posons $J = \begin{bmatrix} \alpha(v-1) & \beta v \\ \alpha v' & \beta(v'-1) \end{bmatrix}$, où $\alpha = u'(u(v'-1) - v(u'-1))$ et $\beta = u(u'(v-1) - v'(u-1))$: cette matrice est inversible⁴⁸ et les images par Φ des droites $(AB), (AC), (AD)$ sont respectivement les droites $(A'B), (A'C), (A'D)$. L'ensemble \mathcal{C} qui correspond à J passe ainsi par B, C et D et, en plus, par A et A' .

Puisque nos points ne sont pas alignés, l'ensemble \mathcal{C} n'est pas une droite, mais pourrait bien être le plan \mathcal{E} tout entier.

⁴⁶Si $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, le système en les inconnues (λ, μ) est

$$\begin{cases} (x-x_A)\lambda & + & (y-y_A)\mu & = & 0 \\ (a(x-x_{A'})+c(y-y_{A'}))\lambda & + & (b(x-x_{A'})+d(y-y_{A'}))\mu & = & 0, \end{cases}$$

dont le déterminant est

$$(x-x_A)(b(x-x_{A'})+d(y-y_{A'})) - (y-y_A)(a(x-x_{A'})+c(y-y_{A'})).$$

⁴⁷Ce qui est prévisible : par exemple, le point A' est à l'intersection de la droite (AA') et de son image par Φ , qui passe de toute façon par A' .

⁴⁸Elle a pour déterminant $\alpha\beta(1-v-v') \neq 0$; nous avons déjà fait voir que $v+v' \neq 1$, mais l'on a aussi $\alpha \neq 0$ (car, sinon, les points A', C, D seraient alignés) et $\beta \neq 0$ (vu le non-alignement de A', B, D).

Ce n'est pas le cas : vérifions que \mathcal{C} ne rencontre la droite (AB) qu'en les points A et B ; si M est un troisième point de cette droite, la seule droite $\Delta \in \mathcal{D}_A$ qui passe par M est en effet la droite (AB) , mais alors $\Phi(\Delta)$ est la droite $(A'B)$ qui, elle, ne passe pas par M puisqu'elle rencontre Δ en B . Ainsi, $M \notin \mathcal{C}$, et nous concluons que \mathcal{C} , ayant une équation de degré au plus 2, est une vraie conique.

Remarques

1. Les ensembles de droites \mathcal{D}_A et $\mathcal{D}_{A'}$ sont des droites projectives puisqu'ils sont paramétrés par un couple non nul (λ, μ) défini à un scalaire multiplicatif près ; on a coutume de les appeler des *pincesaux*, ou *faisceaux*, de droites. L'application Φ est une homographie : nous avons au passage établi que le lieu des points d'intersection de deux pincesaux de droites en homographie est une conique — voir [Ing].
2. Si le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est vecteur propre de J , alors la droite (AA') coïncide avec son image par Φ ; de ce fait, cette droite est incluse dans l'ensemble \mathcal{C} , qui est alors une droite double ou la réunion de deux droites. Dans le cas particulier de la donnée de cinq points trois à trois non alignés, cela ne peut se produire ; il peut se produire en revanche qu'il y ait un vecteur propre $u \notin \text{Vect}(\overrightarrow{AA'})$. La droite $(u; A)$ est alors strictement parallèle à son image par Φ et le point d'intersection est rejeté à l'infini ; cela correspond donc à une direction asymptotique de la conique \mathcal{C} .
3. Un cas intéressant est celui où le plan \mathcal{E} est muni d'une structure euclidienne, en l'occurrence celle qui fait du repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2; \Omega)$ un repère orthonormé. Si l'on prend alors pour matrice particulière la matrice de similitude directe $J = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, avec $b \neq 0$, on vérifie, par exemple grâce à l'équation cartésienne donnée en note de bas de page, que \mathcal{C} est un cercle passant par A et A' (et même le cercle de diamètre $[AA']$ si $a = 0$). Cela vous rappelle-t-il quelque chose ?

Dans les mêmes conditions, si $J = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$, le lieu \mathcal{C} est une hyperbole équilatère.

4. La cuisine, fût-elle plantureuse comme à Lyon, nous laisserait sur notre faim si la question de l'unicité de la conique Γ passant par A, A', B, C, D n'était pas au moins évoquée, en relation avec les techniques de l'exercice. Si, pour $M \in \Gamma$, on associe à la droite (AM) la droite $(A'M)$ (en convenant que la droite (AM) est la tangente en A lorsque $M = A$), on établit une application entre \mathcal{D}_A et $\mathcal{D}_{A'}$ qui se révèle être une homographie associée à une certaine matrice J' inversible. Les conditions

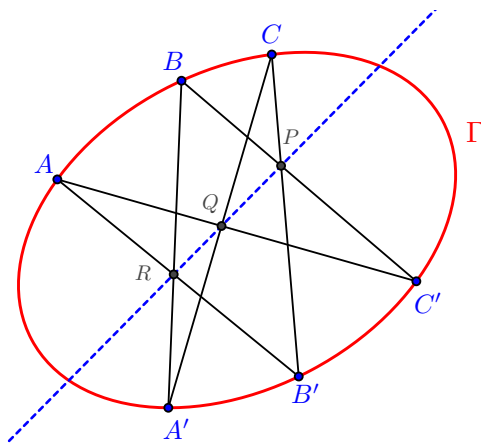
imposées à J' , voir le corrigé *supra*, font que J' est nécessairement de la forme aJ^{49} , avec $a \neq 0$. Nous savons à présent que toutes les matrices de cette forme redonnent le même ensemble \mathcal{C} , d'où suit l'unicité de Γ .

5. Remarquons à cet égard que si une droite Δ contient exactement trois des cinq points, disons A , B et C mais non pas D ni E , alors la conique qui passe par ces points se décompose en la réunion de Δ et de la droite (DE) ; elle reste toutefois unique.
6. L'ensemble des considérations précédentes annonce déjà la structure de droite projective que possède une conique \mathcal{C} non dégénérée et l'idée de birapport sur une telle conique. Cette idée subtile et féconde ne saute pas aux yeux, car notre conique, plongée dans le plan projectif, n'en est pas une droite projective. Sa nature projective découle d'un plan vectoriel époiné qui se dissimule quelque part, peut-être dans la rondeur de l'un ou l'autre des demi-cônes qui forment le cône époiné au dessus de \mathcal{C} . On laisse cette investigation importante pour le chapitre VII.

15. Le théorème de Pascal

Ce beau théorème n'est aucunement trivial; il est traité en long et en large dans tous les livres qui évoquent les coniques; aussi serons-nous très brefs. Nous nous contenterons donc d'en donner une démonstration relativement simple, sans nous perdre dans les méandres de ses innombrables cas dégénérés ni de ses non moins nombreuses applications.

Commençons par l'énoncer; le mieux est de faire une figure.

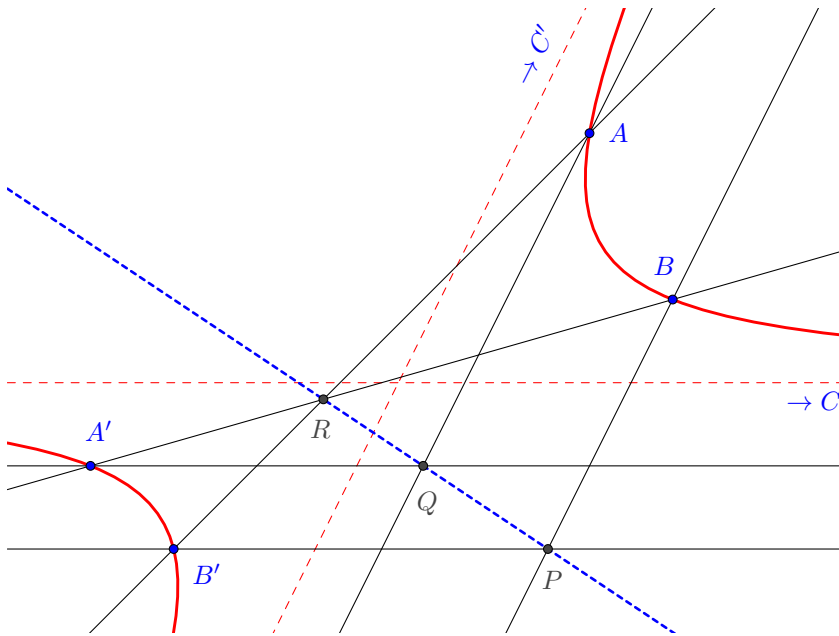


⁴⁹La matrice J que nous avons exhibée résulte d'un calcul et est en réalité unique à un scalaire multiplicatif non nul près.

On considère six points répartis en deux triplets sur une conique projective et l'on trace certaines droites joignant ces points, comme le montre la figure qui précède.

Alors, les points d'intersection P , Q et R sont alignés⁵⁰ !

Démonstration. On va faire de ce résultat un énoncé affine, en choisissant pour droite à l'infini la droite (CC') . Notre conique (privée de ces deux points) apparaît dans la *carte affine* (c'est-à-dire le complémentaire de la droite projective (CC')) comme une hyperbole, que nous dénommerons \mathcal{H} . Le théorème de Pascal revient alors à montrer que les trois points P , Q et R de la figure qui suit sont alignés, ou de manière équivalente que les trois droites (AB') , $(A'B)$ et (QR) sont concourantes.



En rapportant ce plan à un repère cartésien ayant le centre de l'hyperbole comme origine et pour vecteurs des vecteurs adéquats donnant les directions asymptotiques de \mathcal{H} , on peut supposer que $xy = 1$ est l'équation cartésienne de notre hyperbole. Les coordonnées de nos quatre points sont entièrement déterminées par la donnée de leurs abscisses : disons a, b, a', b' pour A, B, A', B' respectivement.

⁵⁰On raconte que Pascal découvrit ce résultat à l'âge de seize ans, du moins dans le cas où la conique est un cercle ! Sa démonstration est à jamais perdue, mais Leibniz put la lire, et il ne semble pas qu'il ait soulevé à son égard de graves objections !

Les équations de nos trois droites sont données ainsi par la nullité des trois déterminants qui suivent :

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & \frac{1}{b'} \\ y & \frac{1}{a} & b' \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & \frac{1}{a'} & b \\ y & a' & \frac{1}{b} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ y & a' & b' \end{vmatrix}.$$

Il s'agit dès lors d'établir que la nullité de deux de ces déterminants implique la troisième ! En portant notre regard sur les coefficients de y dans ces trois déterminants, on trouve

$$\left(\frac{1}{b'} - a\right), \quad \left(b - \frac{1}{a'}\right) \quad \text{et} \quad (b - a),$$

si bien que

$$\frac{ab'}{1-ab'} \left(\frac{1}{b'} - a\right) + \frac{a'b}{1-a'b} \left(b - \frac{1}{a'}\right) + 1(b-a) = 0.$$

Les mêmes coefficients conviennent pour les termes constants puisque

$$\frac{ab'}{1-ab'} \left(ab' - \frac{1}{ab'}\right) + \frac{a'b}{1-a'b} \left(\frac{1}{a'b} - a'b\right) + 1(ab' - a'b) = 0.$$

On le vérifie aussi pour les termes en x . Notre assertion sur ces trois déterminants est démontrée (et avec elle le théorème de Pascal) puisque nous venons d'établir à notre grand bonheur que

$$\frac{ab'}{1-ab'} \delta_1 + \frac{a'b}{1-a'b} \delta_2 + \delta_3 = 0. \quad \square$$

15.1. Remarque. Le lecteur pourrait qualifier l'obtention de la relation précédente de tour de passe-passe. En fait, démontrer que nos trois droites sont concourantes revient à établir que le déterminant de la matrice

$$M = \begin{bmatrix} ab' - \frac{1}{ab'} & \frac{1}{a'b} - a'b & ab' - a'b \\ \frac{1}{a} - b' & a' - \frac{1}{b} & a' - b' \\ \frac{1}{b'} - a & b - \frac{1}{a'} & b - a \end{bmatrix},$$

formée des coefficients de leurs équations, est nul⁵¹. Et, si l'on tient à produire la relation offerte ci-dessus, elle est fournie par un vecteur non nul du noyau de la matrice M . Il suffit donc de l'échelonner, ou bien considérer les colonnes de sa comatrice \tilde{M} , ou (mieux que tout) revenir à la note de bas de page en pensant à une opération élémentaire sur les colonnes de M !

⁵¹Les méthodes pour cela ne manquent pas : réduisons au même dénominateur les termes de chacune des deux premières colonnes. C'est fait ? Bon, nous pouvons alors factoriser $(1-ab')(1-a'b)/aa'bb'$ dans $\det M$ et, dans ce qu'il reste du déterminant, la somme des trois colonnes est nulle. D'ailleurs, ce n'est que pour cette raison que le déterminant est nul ; en effet, les termes en facteur $1-ab'$ et $1-a'b$, eux, sont non nuls puisque, sinon, nous aurions $A' = B$ ou $A = B'$.

16. Équation tangentielle d'une conique non dégénérée

Comme on se place dans le cadre des coniques non dégénérées, l'application linéaire φ_q , pour une forme quadratique q associée à la conique, est bijective : $E \xrightarrow{\varphi_q} E^*$, on en déduit alors l'existence de

$$E^* \xrightarrow{\varphi_q^{-1}} (E^*)^*.$$

Ainsi, φ_q^{-1} définit une forme quadratique q^* sur E^* ! La proposition suivante permet alors de relier la notion de contact à une conique au cône isotrope de la forme quadratique q^* que l'on vient de définir.

16.1. Proposition. *Pour $\alpha \in E^* \setminus \{0\}$, l'hyperplan $\ker \alpha$ est tangent à $\mathcal{C}(q)$ si, et seulement si, $\alpha \in \mathcal{C}(q^*)$.*

Démonstration.—

La situation n'est pas très compliquée : $\ker \alpha$ est tangent au cône $\mathcal{C}(q)$ si, et seulement si, par définition, $\ker \alpha$ rencontre $\mathcal{C}(q)$ selon une droite (voir au I-4.35, indication et remarque incluses) ; or, cela équivaut à dire que $(\ker \alpha)^{\perp q} \subset \ker \alpha$: voir à cet effet la description des orthogonaux d'espaces déjà faite.

Cela se traduit donc par

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\varphi_q^{-1}(\alpha) &\subset \ker \alpha \\ \Leftrightarrow \alpha(\varphi_q^{-1}(\alpha)) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &\in \mathcal{C}(q^*). \end{aligned} \quad \square$$

Puisque cette nouvelle notion vient s'ajouter à l'équation habituelle donnée par q , nous parlerons d'équation ponctuelle (avec q) pour la distinguer de la tangentielle (avec q^).*

Nous pouvons énoncer maintenant la condition analytique (nécessaire et suffisante) pour qu'une conique circonscrite au triangle (ABC) — définissant notre repère affine — et une droite quelconque soient tangentes.

16.2. Proposition. *La droite d'équation $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$ est tangente à la conique d'équation*

$$pYZ + qXZ + rXY = 0$$

si, et seulement si, les scalaires α , β et γ vérifient

$$[\alpha \ \beta \ \gamma] \begin{bmatrix} -p^2 & pq & pr \\ pq & -q^2 & qr \\ pr & qr & -r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0.$$

16.3. Exemple. Considérons alors, et à titre d'exemple, la conique suivante, appelée conique de Steiner (circonscrite) attachée au triangle ABC , dont l'équation est

$$XY + XZ + YZ = 0.$$

Dans ce cas, et à scalaire près, la matrice de φ_q associée est

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et son inverse est

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

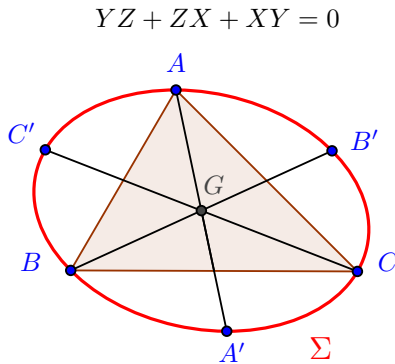
Avant de discuter de tangentes, déterminons le centre de la conique, s'il existe. Du calcul suivant

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

on déduit que le centre a pour coordonnées

$$\begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix},$$

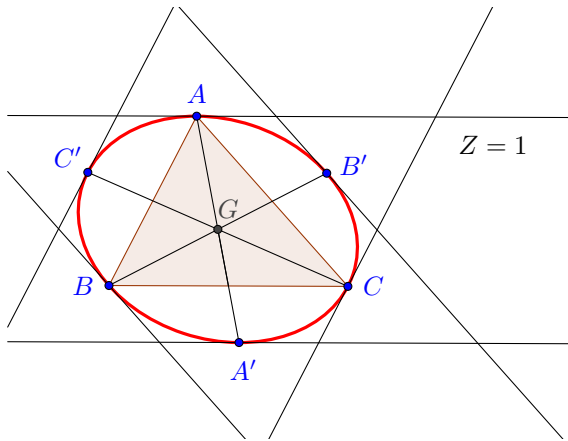
puisque'il faut que ce point appartienne au plan d'équation $X + Y + Z = 1$, qui est notre espace affine \mathcal{E} . C'est le centre de gravité du triangle ABC !



Revenons maintenant sur la détermination de l'équation de la tangente au point $C(0,0,1)$, par exemple. Celle-ci admet pour équation de façon générale $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$, et comme, de plus, le point C est sur cette droite, on a forcément $\gamma = 0$. On est donc ramené à une équation de la forme $\alpha X + \beta Y = 0$. On peut alors déterminer α, β en disant que ces réels doivent vérifier

$$[\alpha \ \beta \ 0] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} = (\alpha - \beta)^2 = 0.$$

La tangente admet donc pour équation $X + Y = 0$ ou encore $Z = 1$. C'est donc la droite passant par C et parallèle à (AB) .



La conique de Steiner circonscrite à ABC est la conique de Steiner inscrite du triangle bimédian.

16.4. Remarque. On vérifie, ci-après, aisément que la conique de Steiner est en fait une ellipse.

▷ Ou bien en se ramenant aux coordonnées cartésiennes, où la conique s'écrit

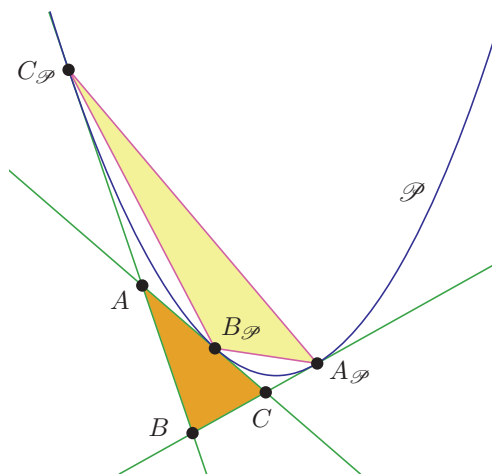
$$x(z - x - y) + xy + y(z - x - y) = 0,$$

coupant le plan E d'équation $z = 0$ en la seule origine, puisque $x^2 + xy + y^2$ est définie positive.

▷ Ou bien en remarquant qu'il n'existe pas de point non trivial dans le complété vectoriel de \mathcal{E} , de coordonnées X, Y et Z appartenant à la fois au cône $XY + YZ + XZ = 0$ et au plan E d'équation $X + Y + Z = 0$, car les trois coordonnées d'un tel point *réel* seraient les racines d'une équation du troisième degré de la forme $T^3 - \lambda = 0$, avec $\lambda \neq 0$! Noter à cet effet que l'on a $XYZ = X^3 = Y^3 = Z^3$.

16.5. Équations tangentielles et paraboles

Nous donnons ci-après une preuve digne d'intérêt⁵² d'une propriété classique de la parabole. La parabole \mathcal{P} est inscrite dans le triangle ABC et les points $A_{\mathcal{P}}$, $B_{\mathcal{P}}$ et $C_{\mathcal{P}}$ sont ses points de contact avec les côtés respectifs.



Alors, l'aire du triangle ABC est la moitié de celle du triangle $A_{\mathcal{P}}B_{\mathcal{P}}C_{\mathcal{P}}$.

Nous commençons par une propriété générale.

16.6. Proposition. Une conique inscrite dans le triangle ABC de référence admet pour équation tangentielle une équation du type

$$pVU + qUW + rUV = 0.$$

Les points de contact d'une telle conique non dégénérée avec les côtés du triangle ont pour coordonnées barycentriques les coefficients figurant respec-

tivement dans les lignes (ou colonnes) de la matrice $\begin{bmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{bmatrix}$. C'est une parabole si, et seulement si, $p + q + r = 0$.

Démonstration. L'équation tangentielle est la condition nécessaire et suffisante pour que la droite d'équation $UX + VY + WZ$ soit tangente à notre conique. Une conique tangente à la droite BC , laquelle admet pour équation $X = 0$, va avoir une équation tangentielle une équation (forcément quadratique en U, V et W) ne comportant pas de terme en U^2 . La forme de l'équation d'une conique inscrite est donc claire. Pour obtenir le point de contact avec la droite BC , par exemple, on a le choix entre deux méthodes possibles.

⁵²Que nous devons à notre ami John-John. D'autres preuves existent, et sont parfois plus simples.

La première consiste à déterminer les coordonnées barycentriques du point vérifiant $X = 0$ et l'équation ponctuelle de notre conique, équation donnée par l'inverse de la matrice ci-dessus. On est alors amené à résoudre

$$X = 0 \quad \text{et} \quad p^2X^2 + q^2Y^2 + r^2Z^2 - 2pqXY - 2prXZ - 2qrYZ = 0$$

(voir plus haut). Cela donne aussitôt l'équation $(qY - rZ)^2 = 0$, et le résultat annoncé s'ensuit. La deuxième méthode consiste à déterminer l'orthogonal de la première forme linéaire coordonnée relativement à la forme quadratique q^* et donne alors les formes linéaires $(X, Y, Z) \mapsto UX + qY - rZ$, avec U quelconque⁵³. Les noyaux de ces formes linéaires définissent dans l'espace affine une famille de droites passant toutes par le point de coordonnées $(0, r, q)$!

Pour obtenir la condition relative aux paraboles, il suffit d'écrire que la droite de l'infini $X + Y + Z = 0$, associée à la forme linéaire $(1, 1, 1)$, est tout simplement q^* -isotrope. \square

Le résultat annoncé en début de cette sous-section va résulter alors de la proposition importante qui suit.

16.7. Proposition. *Soit (ABC) un triangle de référence et soit $(M_1M_2M_3)$ un triangle de son plan. Alors, le rapport des aires de ces triangles⁵⁴ est égal au déterminant des coordonnées barycentriques normalisées des trois points M_i .*

Démonstration. Le déterminant des coordonnées barycentriques est égal au rapport des volumes des polyèdres $(OM_1M_2M_3)$ et $(OABC)$: c'est aussi le déterminant de la famille formée des trois vecteurs $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3})$ relativement à la base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ du vectorialisé \mathcal{E}^v . Quant au rapport des aires des triangles considérés, il est égal au déterminant des vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}$ relativement à la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de la direction E de \mathcal{E} . Or, si $\overrightarrow{OM} = X\overrightarrow{OA} + Y\overrightarrow{OB} + Z\overrightarrow{OC}$ (avec $X + Y + Z = 1$), on vérifie alors facilement que $\overrightarrow{AM} = Y\overrightarrow{AB} + Z\overrightarrow{AC}$. Par suite, $\overrightarrow{M_1M_2} = (Y_2 - Y_1)\overrightarrow{AB} + (Z_2 - Z_1)\overrightarrow{AC}$ et idem pour $\overrightarrow{M_1M_3}$, de sorte que

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ Y_1 & Y_2 - Y_1 & Y_3 - Y_1 \\ Z_1 & Z_2 - Z_1 & Z_3 - Z_1 \end{vmatrix},$$

et le tour est joué. \square

⁵³Les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(U, q, -r)$ sont bien q^* -orthogonaux.

⁵⁴Il s'agit plus précisément du quotient de l'aire du triangle $M_1M_2M_3$ par celle du triangle ABC .

En appliquant tout cela au cas de la parabole, on est ramené, après avoir normalisé les coordonnées barycentriques, à calculer le déterminant suivant, sous la condition $p + q + r = 0$,

$$\frac{1}{(r+q)(r+p)(p+q)} \begin{vmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{vmatrix} = \frac{2pqr}{(r+q)(r+p)(p+q)} = -2,$$

et le résultat est établi⁵⁵.

Remarque. – Il est à noter que ce qui précède donne les coordonnées barycentriques d'un point comme des aires algébriques de triangles !

Nous terminons ce paragraphe par le traitement du problème évoqué dans la section 10 : comment obtenir les tangentes menées d'un point à une conique dégénérée ? Commençons par un exemple.

16.8. Exercice

On rapporte un plan projectif à une base barycentrique (A, B, C) ; mener du point $M(1, 0, -2)$ les tangentes à la conique non dégénérée \mathcal{C} d'équation barycentrique $X^2 - 2YZ = 0$ et en déterminer les points de contact avec la conique.

Solution. – En inversant la matrice canonique de la forme quadratique définissant \mathcal{C} , on voit tout de suite que l'équation tangentielle de \mathcal{C} est

$$U^2 - 2VW \stackrel{(1)}{=} 0.$$

La droite d'équation $uX + vY + wZ = 0$ passe par le point M si, et seulement si, $u = 2w$; elle satisfait donc (1) si, et seulement si, $2w^2 = vw$, c'est-à-dire si $w = 0$ (et $u = 0$) ou $v = 2w$ (et $u = 2w$). Il y a donc deux tangentes passant par M , et elles ont pour équations barycentriques respectives $Y = 0$, c'est la droite (AC) , et $2X + 2Y + Z = 0$.

Pour trouver les points de contact, rappelons-nous que, dans \mathcal{E}^v , le q -orthogonal de la première génératrice de contact \mathcal{T}_1 est le plan P_1 d'équation $Y = 0$. Désignons par $T_1(x, y, z)$ un générateur de \mathcal{T}_1 ; le q -orthogonal de $\text{Vect}(\overrightarrow{OT_1})$ admet pour équation

$$xX - zY - yZ = 0.$$

Il s'agit de P_1 si, et seulement si, $x = y = 0$; ainsi, le contact a lieu au point $T_1(0, 0, 1)$, c'est-à-dire au point C .

De même, le plan P_2 d'équation $2X + Y + Z = 0$ est l'orthogonal de la seconde génératrice de contact, engendrée par un certain $T_2(x, y, z)$; le plan d'équation $xX - zY - yZ = 0$ coïncide avec P_2 si, et seulement si, T_2 est dans $\text{Vect}(-2, 1, 2)$.

⁵⁵Le signe *moins* indique que la parabole inscrite dans le triangle ABC occupe forcément une zone qui ne fait pas partie des zones exclues.

16.9. Remarques

1. Ce procédé peut donner des points à l'infini ; cela signifie alors que les tangentes correspondantes sont asymptotes à la conique.
2. Sachant que le q -orthogonal d'une génératrice de contact contient cette génératrice, on aurait aussi bien pu chercher les vecteurs isotropes de la restriction de q à chacun des deux plans P_i .

Voici comment mener les calculs dans le cas le moins simple, celui de P_2 : (x, y, z) est dans P_2 si, et seulement si, $z = -2(x+y)$; dans ce cas, on a

$$x^2 - 2yz = x^2 + 4(x+y)y = (x+2y)^2.$$

Ainsi, la restriction de la forme quadratique s'annule sur la droite engendrée par le triplet $(-2, 1, 2)$ et nous retrouvons le T_2 précédent. *Grosso modo*, il suffit de savoir détecter les carrés parfaits pour mettre en œuvre ce principe.

En toute généralité, si \mathcal{C} non dégénérée et $M(x, y, z)$ sont donnés, on cherchera les triplets (u, v, w) non nuls satisfaisant $xU + yV + zW = 0$ et qui sont q^* -isotropes⁵⁶. Puisque la restriction de la forme quadratique q^* au plan d'équation $xU + yV + zW = 0$ admet zéro, une ou deux droites isotropes, nous trouverons respectivement zéro, une ou deux tangentes issues de M , la notion de tangente incluant celle d'asymptote.

16.10. Exercice

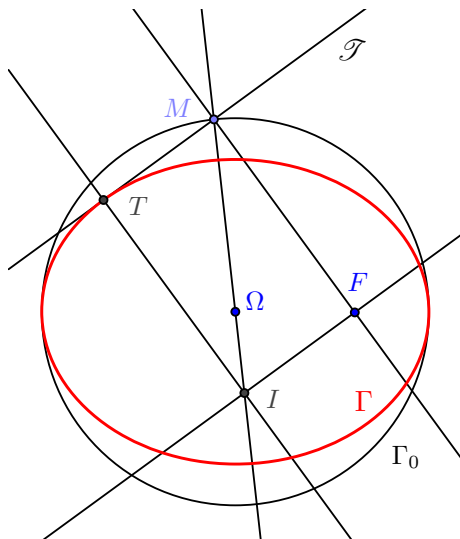
Le corps de base est \mathbb{C} ; on donne une base barycentrique (A, B, C) d'un plan projectif. Montrer que les points de contact des tangentes menées du point $G(1, 1, 1)$ à la conique de Steiner σ_{ABC} d'équation tangentielle $VW + WU + UV = 0$ admettent pour coordonnées barycentriques $(1, j, j^2)$ et $(1, j^2, j)$. Interpréter lucidement le résultat.

L'exercice qui suit s'inscrit dans un cadre euclidien ; toutefois, il a toute sa place dans ce chapitre, car il est de nature tangentielle. Il s'agit d'un problème d'*antipodaire* : étant donné un point F et une courbe Γ_0 , quelle est l'enveloppe de la droite orthogonale à (FM) en M , lorsque ce point décrit Γ_0 ?

C'est le problème inverse du suivant : étant donnés une courbe Γ et un point F , quel est le lieu Γ_0 des projections de F sur les tangentes à Γ ? Le lieu trouvé s'appelle la *podaire* de Γ par rapport à F .

⁵⁶La notation q^* est introduite au début de la section 16.

16.11. Exercice. On donne un plan affine euclidien \mathcal{E} , que l'on complète projectivement en $\mathbb{P}(\mathcal{E}^v)$; dans \mathcal{E} , on donne deux points distincts Ω et F ainsi qu'un cercle Γ_0 , de rayon $R > 0$, centré en Ω et ne passant pas par F . À tout point M de Γ_0 , on associe la droite \mathcal{T} orthogonale en M à (FM) .



Établir que les droites \mathcal{T} ainsi obtenues sont tangentes à une certaine conique Γ .

Indication.— On pourra effectuer les calculs dans un repère orthonormé d'origine Ω tel que F soit un point de l'axe Ωx ; on posera une équation de \mathcal{T} sous la forme $Ux + Vy + W = 0$ et l'on cherchera à quelle condition la projection orthogonale de F sur \mathcal{T} appartient à Γ_0 . On trouvera une condition de la forme $\mathcal{Q}(U, V, W) = 0$, où \mathcal{Q} est une forme quadratique non dégénérée, et il restera alors à déterminer Γ de sorte que son équation tangentielle soit donnée par \mathcal{Q} .

Solution.— Choisissons le repère comme cela est suggéré : le point F a des coordonnées cartésiennes de la forme $(c_0, 0)$ et Γ_0 une équation cartésienne de la forme $x^2 + y^2 = R^2$, avec $c_0 \neq R \neq 0$. Si \mathcal{T} a une équation de la forme $Ux + Vy + W = 0$, le point F se projette orthogonalement sur \mathcal{T} en le point M de coordonnées

$$\frac{1}{U^2 + V^2} \times (c_0 V^2 - UW, -(c_0 U + W)V).$$

Le point M appartient à Γ_0 si, et seulement si,

$$(U^2 + V^2) \times (R^2 U^2 + (R^2 - c_0^2) V^2 - W^2) \stackrel{(1)}{=} 0.$$

On n'a jamais $U = V = 0$, car la droite \mathcal{T} n'est jamais la droite de l'infini ;

toutes les droites \mathcal{S} sont donc tangentes à la conique d'équation cartésienne homogène

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 - c_0^2} - z^2 \stackrel{(2)}{=} 0.$$

En effet, l'équation tangentielle de cette conique est bien l'équation (1); il s'ensuit qu'il y a une (unique) conique solution du problème, et il s'agit d'une ellipse si $|c_0| < R$ et d'une hyperbole si $|c_0| > R$.

À noter que les demi-distances des axes focal et non focal sont respectivement $a = R$ et $b = \sqrt{|R^2 - c_0^2|}$; la demi-distance focale est $c = \sqrt{a^2 - b^2} = |c_0|$; en conséquence, Ω est le centre de Γ et F en est un foyer.

16.12. Remarque. Il y a bien une unique *conique* Γ solution du problème posé; *a priori*, il pourrait y avoir des courbes Γ solutions qui ne soient pas des coniques. En réalité, il n'y en a pas d'autre, mais cette unicité-là est une question de Géométrie différentielle; nous ne l'aborderons donc pas.

On notera également la présence du rectangle ($FMTI$) dont une diagonale passe toujours par Ω ; c'est une sombre affaire de Cinématique du solide...

On pourra aussi traiter l'exercice inverse: étant donnée une ellipse Γ de foyer F , quel est le lieu des projections orthogonales de F sur les tangentes à Γ ? Les apprentis mathématiciens, jusque dans les années soixante-dix, ont fait leur miel de ces délices surannées.

16.13. Remarques culturelles

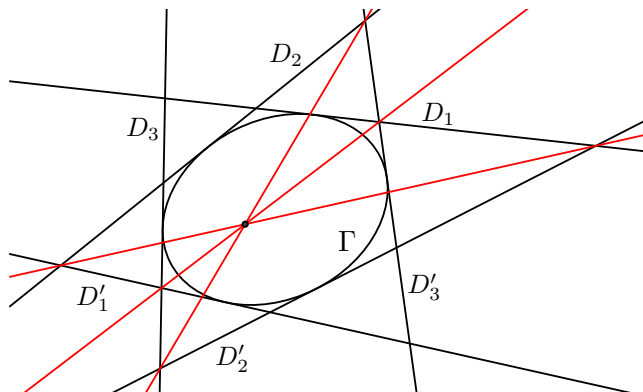
Si \mathcal{Q} est une forme quadratique non dégénérée définie sur le dual E^* d'un espace vectoriel E de dimension 3, il existe une unique conique non dégénérée de $\mathbb{P}(E)$ dont $q = 0$ soit l'équation tangentielle; cela résulte tout simplement de la bijectivité de l'inversion matricielle, restreinte à l'ensemble des matrices *symétriques* inversibles. Nous venons d'utiliser ce principe à l'occasion de l'exercice précédent.

En adaptant les méthodes de la section 14, on établit *dualement* qu'il existe une conique non dégénérée unique qui soit tangente à cinq droites trois à trois non concourantes d'un plan projectif. Si ce plan est le complété projectif d'un plan affine \mathcal{E} , on peut choisir la droite de l'infini comme droite numéro 5; on en déduit alors que, dans ce plan affine, si l'on donne quatre droites deux à deux non parallèles⁵⁷ et trois à trois non concourantes, il existe une unique *parabole* qui leur soit tangente.

Il existe une version duale du théorème de Pascal: c'est celui de Brianchon; soient six droites $D_1, D_2, D_3, D'_1, D'_2, D'_3$ d'un plan projectif. Il existe une

⁵⁷Ce, afin qu'elles ne concourent pas avec la droite de l'infini.

conique tangente à ces droites si, et seulement si, les droites joignant les points d'intersection suivants concourent : $D_2 \cap D'_3$ et $D_3 \cap D'_2$, $D_3 \cap D'_1$ et $D_1 \cap D'_3$ et enfin $D_1 \cap D'_2$ et $D_2 \cap D'_1$.



17. Coniques et inversion harmonique

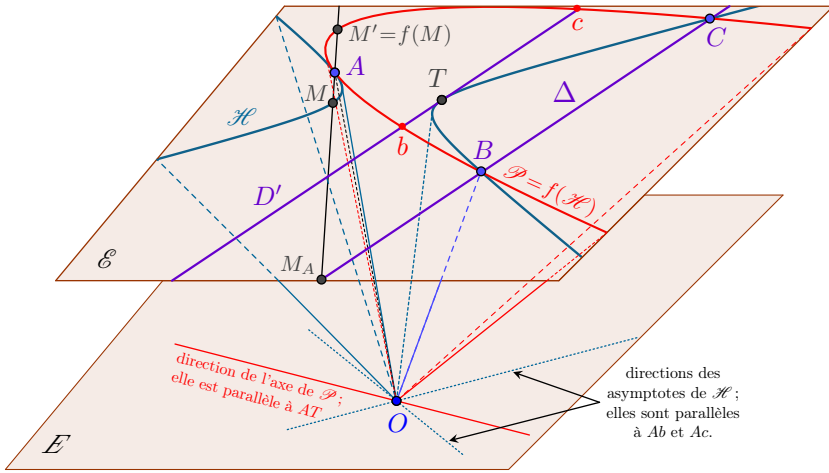
Nous examinons dans les deux exercices qui suivent l'image d'une hyperbole (particulière) \mathcal{H} — circonscrite au triangle ABC et tangente à une droite (tout aussi particulière) D' — sous l'effet de l'inversion harmonique $f_{A,\Delta}$ de centre A relativement à la droite Δ (cf. exercice 5.1). Une inversion harmonique est intimement liée, comme on le sait, à une application projective $\hat{\sigma}$, qui relève d'une symétrie vectorielle σ dans le vectorialisé $V = \mathcal{E}^v$ de l'espace affine \mathcal{E} .

17.1. Exercice. On rapporte comme plus haut le plan affine \mathcal{E} à la base affine (A, B, C) . On appelle Δ la droite (BC) et D' la droite qui joint les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$. On regardera l'hyperbole \mathcal{H} comme l'intersection de \mathcal{E} avec le cône isotrope $\mathcal{C}(q)$ d'une forme quadratique q de signature $(2, 1)$, définie sur V . On notera $\hat{\mathcal{E}} = \mathbb{P}(V)$ le complété projectif de l'espace affine \mathcal{E} et $\hat{\mathcal{H}}$ la conique projective associée à $\mathcal{C}(q)$; cette conique projective est appelée parfois la complétion projective de l'hyperbole \mathcal{H} .

a) Soit T le point de contact de \mathcal{H} avec la droite D' . Montrer que l'image par f de $\mathcal{H} \setminus \{T\}$ (qui a trois composantes connexes) est une parabole \mathcal{P} privée de deux de ses points (lesquels?).

Indication. — Retourner à l'exercice 5.1 et remarquer que l'image d'une conique projective de $\hat{\mathcal{E}}$ par une application projective est encore une conique projective! Constater enfin que la conique image est tangente à la droite de l'infini, et que c'est donc forcément une parabole.

b) On considère le cône du vectorialisé au-dessus de la parabole. Déterminer la génératrice le long de laquelle il s'appuie sur l'espace E . (C'est la droite issue de O et parallèle à (AT) .)



Noter que les points M et M' se correspondent dans l'homologie et que la division (A, M_A, M, M') est harmonique.

Le cône au-dessus de la parabole, que nous n'avons fait qu'esquisser sur la figure, a ici une ouverture (un angle solide, diraient les physiciens) trop importante. Cela nécessite un petit effort pour bien penser notre figure. Ne pas oublier non plus que ce cône admet une nappe au-dessus de E et une autre en dessous (laquelle, d'ailleurs, porte le symétrique de A par rapport au sommet O).

17.2. Exercice

Nous nous proposons de retrouver le résultat précédent au moyen d'un calcul analytique, en nous servant de l'expression de $f_{A,\Delta}$ donnée à l'occasion de l'exercice 5.2, en page 207 :

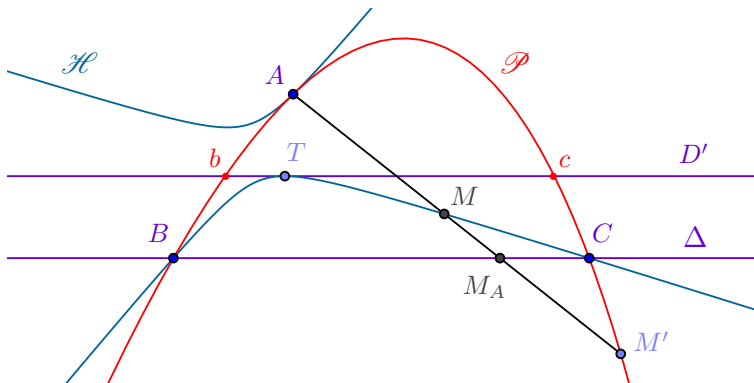
$$f_{A,\Delta} : M = (X, Y, Z) \mapsto M' = \frac{1}{X - Y - Z} (X, -Y, -Z).$$

a) Montrer que si $pYZ + qXZ + rXY = 0$ est l'équation en coordonnées barycentriques de l'hyperbole \mathcal{H} , alors $(p + q + r)^2 - 4qr = 0$.

Indication. - Mettre l'équation $X - Y - Z = 0$ de la droite D' dans l'équation tangentielle de notre hyperbole (cf. 16.3).

b) Montrer alors à nouveau que l'image de $\mathcal{H} \setminus \{T\}$ est une parabole bi-épointée.

Indication. – Utiliser, bien sûr, la proposition 12.3.



c) Montrer que l'hyperbole et son image sont tangentes.

Indication. – Donner deux arguments comme dans [JDE].

(i) La tangente à une courbe en un point A est la limite d'une sécante AM à cette courbe passant par A . Mais une droite passant par A est invariante par $f = f_{A,\Delta}$, si bien qu'elle coupe l'hyperbole \mathcal{H} en M et la parabole image en $M' = f(M)$. Faire tendre alors M vers M' !

(ii) La droite d'équation $rY + qZ = 0$ est la tangente en A à \mathcal{H} , et c'est également la tangente en A à la parabole image.

d) Quelles sont, enfin, les droites images par $f_{A,\Delta}$ des asymptotes à l'hyperbole \mathcal{H} ? En déduire que le centre de \mathcal{H} et le pôle de (bc) par rapport à la parabole $\mathcal{P} = f(\mathcal{H})$ se correspondent par l'inversion harmonique $f_{A,\Delta}$.

18. Théorème de Carnot

Trois points non alignés sont toujours *cocycliques*, c'est-à-dire sur un même cercle. En revanche, quatre points pris au hasard ne le sont pas. Ainsi, beaucoup d'exercices de l'ancien Brevet consistaient à montrer que dans une figure particulière quatre points bien choisis étaient cocycliques. Il fallait chaque fois vaincre une petite difficulté.

Du côté des coniques, cinq points en situation générale sont *coconiques*, c'est-à-dire sur une même conique et beaucoup d'énoncés dans ce cadre cherchent à vérifier que six points bien choisis le sont. Nous abordons dans cette section un résultat qui permet de vérifier que six points soumis à une condition relativement simple sont coconiques. On fixe un triangle ABC .

18.1. Théorème

Si P et P' sont sur le côté (BC) , Q et Q' sur le côté (AC) et enfin R et R' sur (AB) , alors ces six points sont coconiques si, et seulement si, le produit des trois quantités suivantes

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} \quad \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{Q'C}}{\overline{Q'A}} \quad \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} \times \frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}}$$

est égal à 1.

Démonstration. L'équation d'une conique générale relativement au repère barycentrique affine donné par les points A , B et C est

$$uX^2 + u'Y^2 + u''Z^2 + vYZ + v'ZX + v''XY.$$

Cette conique ne passe par aucun sommet si, et seulement si, $uu'u'' \neq 0$. Elle coupe la droite BC (d'équation est $X=0$) suivant deux points réels ou imaginaires, dont les coordonnées barycentriques vérifient l'équation

$$u'Y^2 + vYZ + u''Z^2,$$

ou encore l'équation du second degré en $\frac{Z}{Y}$ donnée par

$$u''\left(\frac{Z}{Y}\right)^2 + v\frac{Z}{Y} + v'' = 0.$$

Les points P et P' ont pour coordonnées barycentriques $(0, x, y)$ et $(0, x', y')$ vérifiant $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\frac{z}{y}$ et $\frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} = -\frac{z'}{y'}$, d'où il découle que $\frac{zz'}{yy'} = \frac{u'}{u''}$ si les points P et P' appartiennent à la conique. La condition nécessaire s'obtient alors par permutation circulaire, puisque

$$\frac{u'}{u''} \times \frac{u''}{u} \times \frac{u}{u'} = 1.$$

La condition suffisante est *maintenant* facile et laissée au lecteur. □

Nous donnons aussitôt une application intéressante de ce théorème.

18.2. Corollaire. *Les pieds des céviennes de deux points M et M' quelconques du plan par rapport au triangle de référence ABC sont coconiques.*

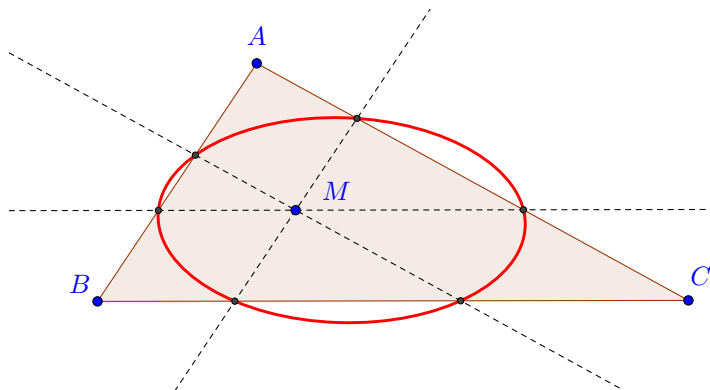
Démonstration. Cela découle facilement du théorème de Carnot et du théorème de Céva. Les détails sont laissés au lecteur, qui remarquera que si les points M_A , M_B et M_C sont les pieds des céviennes du point M , on a

$$\frac{\overline{M_AB}}{\overline{M_AC}} \times \frac{\overline{M_BC}}{\overline{M_BA}} \times \frac{\overline{M_CA}}{\overline{M_CB}} = -1. \quad \square$$

18.3. Exercice

Soit M un point quelconque du plan du triangle ABC . Les trois parallèles aux côtés BC , AC et AB passant par M définissent six points sur les côtés du triangle, lesquels sont coconiques.

Indication. – Faire un dessin et utiliser les théorèmes de Thalès et de Carnot.



18.4. Remarque. Si M est situé sur l'ellipse de Steiner circonscrite, la conique dégénère ; quand il est sur l'ellipse de Steiner inscrite, la conique devient une parabole !

18.5. Remarque. Si M est le point de Lemoine K relatif au triangle ABC , de coordonnées barycentriques (a^2, b^2, c^2) , où a, b, c désignent les longueurs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, la conique en question est un cercle ; cette remarque ne vaut évidemment que dans le cadre euclidien. Toujours dans ce cadre, la conique est une hyperbole équilatère lorsque le point M est sur la polaire triangulaire de l'orthocentre H du triangle⁵⁸.

18.6. Exercice

Soit S un point du plan du triangle ABC . En situation générale, les points A, B, C et leurs symétriques A', B' et C' par rapport à S sont sur une même conique, centrée en S . (Cet exercice donne peut-être le moyen le plus rapide de construire une conique et son centre avec Cabri.)

Indication. – Faire un dessin et examiner les cas pathologiques (les côtés du triangles et les trois droites des milieux).

⁵⁸Cette droite est aussi appelée l'axe orthique.

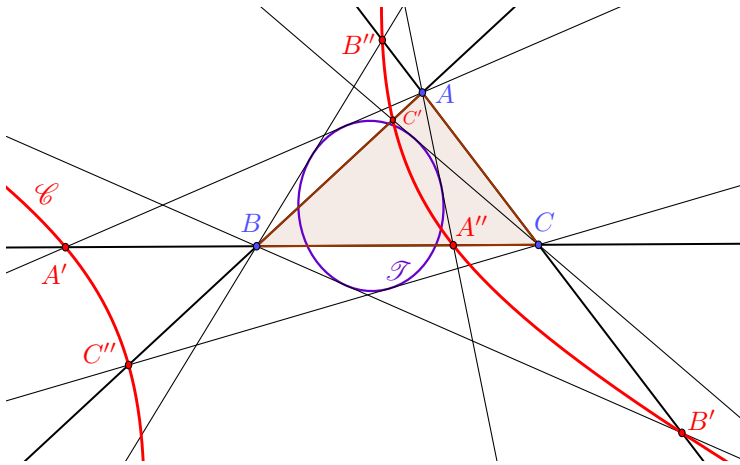
18.7. Version tangentielle : conique tangente à six droites

Le présent paragraphe est un joli exercice. Une conique \mathcal{C} coupe les côtés d'un triangle en six points, comme sur la figure. Les six droites joignant chacun des trois sommets aux deux points pointés par la conique sur le côté opposé sont alors tangentes à une même conique.

Nous aurons besoin pour établir cela du « complément de Sarrus » $S_{\mathcal{C}}$ de la matrice symétrique S définissant la conique ponctuelle \mathcal{C} :

$$\text{si } S = \begin{bmatrix} a & r & q \\ r & b & p \\ q & p & c \end{bmatrix}, \text{ alors } S_{\mathcal{C}} := \begin{bmatrix} bc & -rc & -bq \\ -rc & ac & -ap \\ -bq & -ap & ab \end{bmatrix}.$$

Il s'avérera en effet que l'équation tangentielle de la conique \mathcal{T} recherchée est donnée précisément par $S_{\mathcal{C}}$.



Notons d'abord que les coordonnées barycentriques des points alignés avec A et soit A' , soit A'' , vérifient l'équation $bY^2 + 2pYZ + cZ^2 = 0$. La conique (dégénérée) définie en général par une telle équation est réunion de deux droites (d'équations respectives $mY + nZ = 0$ et $m'Y + n'Z = 0$, éventuellement confondues) passant par A , c'est donc ici la réunion des droites AA' et AA'' . On écrit ainsi

$$bY^2 + 2pYZ + cZ^2 = (mY + nZ)(m'Y + n'Z) = 0,$$

et par conséquent $(b, 2p, c) \doteq (mm', mn' + nm', nn')$. Les nombres m/n et m'/n' sont donc les racines du trinôme

$$\text{car } acT^2 - 2apT + ab = 0,$$

$$\frac{m}{n} \times \frac{m'}{n'} = \frac{ab}{ac} = \frac{b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + n'm}{nn'} = \frac{2ap}{ac} = \frac{2p}{c}.$$

Les coordonnées tangentielles $(0, m, n)$ et $(0, m', n')$ des droites $mY + nZ = 0$ et $m'Y + n'Z = 0$ satisfont les formules

$$U = 0, \quad acV^2 - 2apVW + abW^2 = 0,$$

et appartiennent donc à la conique \mathcal{T} dont l'équation tangentielle est définie par le complément de Sarrus $S_{\mathcal{S}}$ de S !

18.8. Remarque. Comme $(S_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}} = abc S_{\mathcal{S}} \doteq S$, notre conique de départ, désignée par \mathcal{C} , peut être retrouvée comme *conique ponctuelle* à partir de la conique *tangentielle* \mathcal{T} par application à l'équation correspondante de celle-ci la complémentation de Sarrus. Mais, attention! Elle apparaît aussi comme la conique tangentielle, enveloppant les trois paires de droites passant respectivement par l'un ou l'autre des sommets du triangle ABC et par les points que marque la *conique ponctuelle* d'équation donnée par la matrice $\mathcal{S}_{\mathcal{S}}$. Cette conique, non présente sur le dessin ci-dessus⁵⁹, est distincte, il va sans dire, de la conique \mathcal{T} et de la conique déduite de \mathcal{T} par le procédé décrit ci-dessus.

Nous remarquons enfin que l'équation tangentielle de la petite conique apparaissant dans le dessin s'obtient à partir de la matrice symétrique $(S^{-1})_{\mathcal{S}}$.

On notera également le caractère auto-dual de notre exercice : *les six points obtenus comme intersections avec les côtés d'un triangle des tangentes à une conique \mathcal{C} menés depuis les sommets opposés sont coconiques.*

19. Diamètres conjugués

Nous établissons ci-après, par le calcul barycentrique, une propriété classique des coniques à centre. Nous donnerons ensuite l'explication projective de cette propriété, ce qui éclairera même la démonstration de départ.

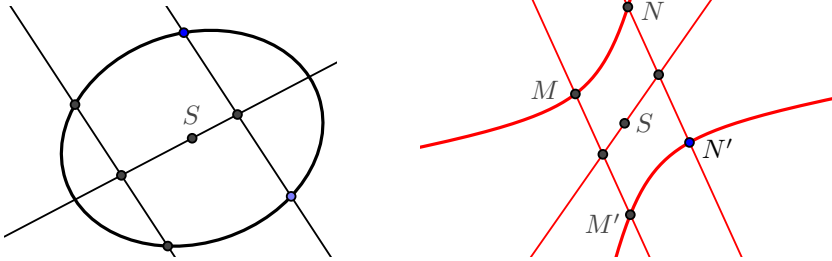
19.1. Proposition. *Soit Γ une conique à centre, noté S , et soient deux cordes MM' et NN' parallèles. Alors, les milieux I et J de ces cordes sont alignés avec le centre S .*

Démonstration. Nous prenons comme base barycentrique le triangle de référence $(MM'N)$; la conique y a alors, en tant que conique circonscrite, une équation de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$, avec

$$p^2 + q^2 + r^2 - 2pr - 2pq - 2rq \neq 0.$$

⁵⁹Nous rassurons le lecteur qui verrait mal la conique de départ \mathcal{C} enveloppant des droites issues des sommets du triangle qu'il n'y a là aucune aberration : la conique ponctuelle $\mathcal{S}_{\mathcal{S}}$ ne coupe dans notre dessin aucun des côtés du triangle ABC en des points réels, mais les intersections complexes sont là... et les droites enveloppantes sont donc des droites imaginaires.

La droite (NN') a pour équation barycentrique $X + Y = 0$. Le point N' situé à leur intersection admet pour coordonnées $(q - p, p - q, r)$.



Il nous reste alors à vérifier que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ q - p & p - q & 2r \\ p^2 - pq - pr & q^2 - qr - qp & r^2 - rp - rq \end{vmatrix}$$

est nul⁶⁰. Mais ce déterminant est clairement nul pour mille et une raisons, dont la plus inattendue à ce stade est que la matrice dont il est issu admet le vecteur non nul $\vec{v} = (-r, r, q - p)$ dans son noyau⁶¹ ! □

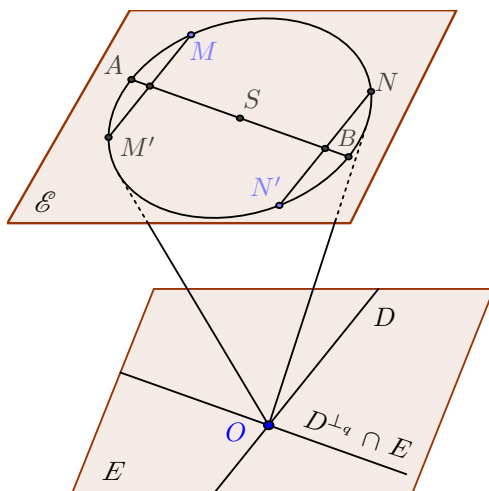
19.2. Remarques

- Les cordes parallèles définissent en fait un point sur la droite de l'infini, ou encore une droite vectorielle D de la direction E de notre espace affine \mathcal{E} . Cette droite est, vu le choix de notre base, engendrée par le vecteur $\overrightarrow{MM'} = (1, -1, 0)$, dont la somme des composantes est bien nulle (comme il se doit). Le q -orthogonal de cette droite est un plan $P = D^{\perp_q}$ du vectorialisé \mathcal{E}^v , qui contient, bien sûr, la droite (OS) (qui est définie comme le q -orthogonal du plan E)! Ce plan coupe donc \mathcal{E} suivant un diamètre de notre conique Γ , et passe par le milieu de toutes les cordes de direction D ⁶².

⁶⁰On aura noté que pour écrire les coordonnées barycentriques d'un milieu comme demi-somme des coordonnées barycentriques, il faut partir avec des cobars normalisées. Enfin, les coordonnées barycentriques de S ont déjà été calculées en page 234.

⁶¹« L'invention » de ce vecteur n'a en réalité rien de mystérieux, comme l'on s'en rendra compte juste ci-après.

⁶²Ce dernier point est une conséquence immédiate du fait qu'un faisceau harmonique (D_1, D_2, D_3, D_4) de droites, coupé par une droite parallèle à l'une de ses droites, par exemple D_1 , marque sur les trois autres des points M_2, M_3 et M_4 tels que M_2 soit le milieu de M_3M_4



Il nous reste à déterminer l'équation du plan q -orthogonal à la droite D : il est formé des vecteurs (X, Y, Z) tels que

$$[X \ Y \ Z] \begin{bmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou encore

$$[X \ Y \ Z] \begin{bmatrix} -r \\ r \\ q - p \end{bmatrix},$$

et l'on voit apparaître le pas vraiment mystérieux vecteur \vec{v} .

- Le lecteur attentif aura remarqué qu'aux extrémités A et B du diamètre passant par I et J les tangentes à Γ sont parallèles à la direction D de nos cordes.
- L'énoncé donne un moyen pratique de déterminer le centre, par exemple, d'une ellipse dont on a le dessin (ou seulement cinq points). Il donne aussi un moyen d'en dessiner la tangente en l'un de ses points.

19.3. Définition. Deux diamètres dans une conique à centre sont dits conjugués si les directions qu'ils définissent dans E sont q -orthogonales.

Il va sans dire, vu le caractère symétrique de la relation de q -orthogonalité, que chacun de ces deux diamètres porte les milieux des cordes parallèles à l'autre. De plus, les tangentes aux extrémités de chacun de ces diamètres sont parallèles à l'autre.

19.4. Exercice. Soit Γ une conique non dégénérée, de centre S .

1. Soit M un point de Γ . Montrer que la tangente en M à Γ est q -perpendiculaire au rayon SM qui aboutit au point de contact.
 2. Montrer que si deux tangentes en M et N à la conique Γ se rencontrent en P (à distance finie ou non), alors le milieu de la corde MN se trouve sur la droite SP .
-

19.5. Exercice. Soit Σ une ellipse et soit A un point quelconque de Σ . Montrer qu'il existe un triangle (direct) unique dont l'ellipse de Steiner circonscrite Σ_{ABC} soit l'ellipse Σ de départ.

Indication. – Penser au point G_A et au centre de l'ellipse, et au fait que les directions BC et AG_A sont conjuguées dans l'ellipse de Steiner.

19.6. Exercice. Soit Γ une conique non dégénérée à centre et soit AB un diamètre quelconque de Γ . Montrer que si $M \in \Gamma$, les directions MA et MB sont conjuguées (par rapport à Γ)⁶³.

19.7. Construire une parabole connaissant trois points et la direction de l'axe

Un élève de première S peut être confronté à la question de savoir combien de paraboles $ax^2 + bx + c$ passent par trois points du plan rapporté au repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2; \Omega)$. Pour peu que deux de ces points ne soient pas sur une même « verticale »⁶⁴, et qu'ils ne soient pas alignés, il passe alors par ces trois points une et une seule telle parabole⁶⁵.

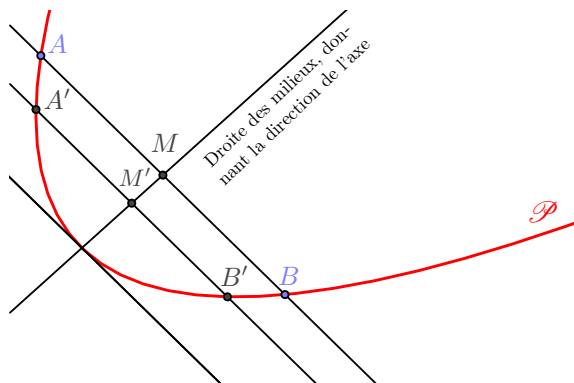
Comme pour le cas des coniques à centre, les milieux des cordes de même direction sont alignés sur une droite parallèle à la direction de l'axe. (Voir la première figure ci-après.)

Faisons maintenant un deuxième dessin, dans le vectorialisé. On démarre de même avec des cordes parallèles. On appelle AB l'une de ces cordes. La direction de ces cordes est une droite vectorielle (D) dans E . On dispose du cône $\mathcal{C}(q)$ donnant naissance à la parabole. On dessine les deux plans tangents au cône $\mathcal{C}(q)$ contenant (D) .

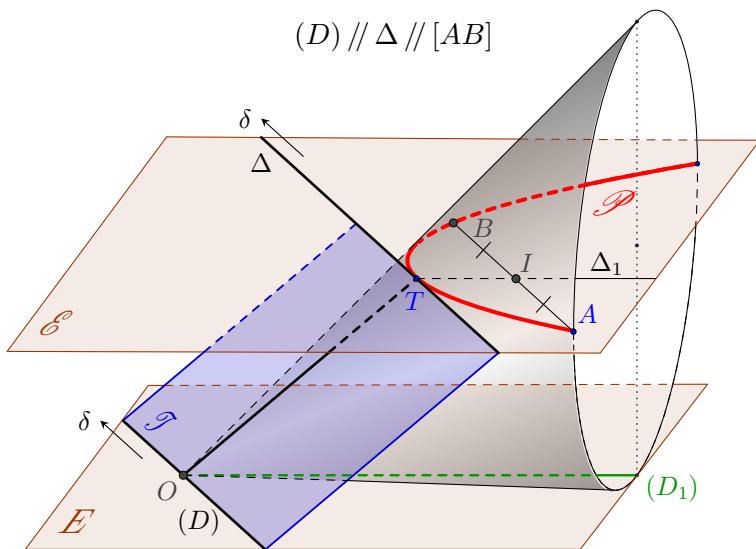
⁶³Si l'on connaît déjà le centre de Γ , il est encore plus rapide pour tracer la direction conjuguée à la direction d'une corde MA de joindre le centre au milieu de AB .

⁶⁴En fait, c'est un problème affine : le repère n'a aucune raison d'être orthonormé ou orthogonal.

⁶⁵On a là cinq conditions, car l'on se donne trois points et un quatrième point et sa tangente (qui sont à l'infini). Quant aux restrictions de l'énoncé, elles sont en accord avec les restrictions énoncées dans la proposition 14.2.

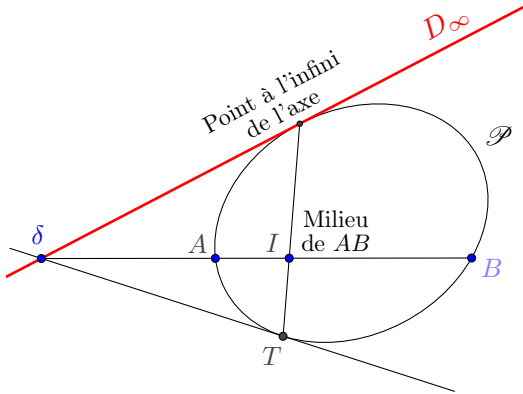


L'espace E est l'un de ces deux plans, et D_1 est la génératrice de contact. Le deuxième plan tangent, \mathcal{T} , coupe l'espace affine \mathcal{E} suivant une droite parallèle à (D) , soit Δ , et s'appuie le long du cône suivant la génératrice OT , où l'on a désigné par T le point d'intersection de Δ et de la génératrice de contact. La droite (OT) rencontre le plan affine \mathcal{E} et la parabole au seul point T .



La droite Δ est ainsi tangente en le point T à la parabole \mathcal{P} . Cela dit, le plan q -orthogonal dans le vectorialisé $V = \mathcal{E}^v$ de la droite $(D) = E \cap \mathcal{T}$ est engendré par les deux génératrices de contact $(D_1) = E^{\perp q}$ et $(OT) = \mathcal{T}^{\perp q}$, et coupe le plan affine \mathcal{E} suivant une droite parallèle à D_1 , que nous notons Δ_1 . Nous allons établir de deux façons que cette droite Δ_1 porte les milieux de toutes les cordes parallèles à (AB) .

La première, assez expéditive, consiste à dire que la droite Δ_1 est la polaire du point à l'infini δ du plan \mathcal{E} dans la direction D . Il s'ensuit aussitôt que le point d'intersection de AB avec Δ_1 est au milieu de AB .

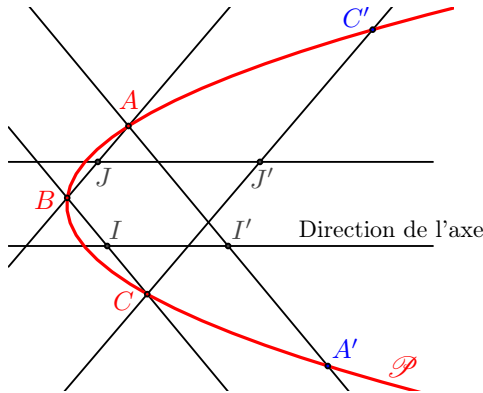


La deuxième approche se fait comme il suit : le vecteur $\vec{OI} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}$ est q -orthogonal à la droite D , laquelle est dirigée par le vecteur $\vec{OB} - \vec{OA}$:

$$B_q(\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}, \vec{OB} - \vec{OA}) = (\alpha - \beta)B_q(\vec{OA}, \vec{OB}) = 0,$$

c'est-à-dire⁶⁶ $\alpha = \beta$, et donc I est milieu de AB .

Revenons au problème-titre de la section ! Dans le repère cartésien, $\Omega x, \Omega y$, les paraboles $ax^2 + bx + c$ ont en commun une même direction d'axe ! Le dessin ci-dessous explique comment une telle parabole peut être construite à partir des trois points A, B et C donnés (et des deux points construits A' et C' à partir de la direction de l'axe) et justifie son unicité (cf. à nouveau la proposition 14.2).



⁶⁶L'orthogonal de la droite OA est le plan tangent au cône le long de la génératrice OA : il ne contient donc pas B .

20. L'inversion isotomique

Nous avons rencontré l'ellipse de Steiner (circonscrite) Σ_{ABC} attachée à un triangle ABC à l'occasion de l'exercice 12.5 et de la proposition 16. Elle se distingue par la simplicité de son équation barycentrique, dans la base affine ABC , en tant que conique circonscrite. Nous allons la retrouver ici comme inhérente à l'inversion isotomique (relative au triangle ABC).

Nous choisissons ci-après une base barycentrique (A, B, C) du complété projectif $\mathbb{P}(\mathcal{E}^v)$ d'un plan affine \mathcal{E} ; l'inversion que nous allons définir n'est pas une homographie (et donc encore moins une application affine). Pour tout dire, elle n'est même pas définie en tout point de $\mathbb{P}(\mathcal{E}^v)$ et, de ce fait, nous allons commettre un abus de langage bien inoffensif : lorsque nous parlerons de l'image d'une partie \mathcal{P} de $\mathbb{P}(\mathcal{E}^v)$ par l'inversion, nous entendrons qu'il s'agit de l'image de l'intersection de \mathcal{P} avec le domaine de définition de l'application et, lorsque nous dirons par exemple que cette image est une conique, nous ferons semblant de ne pas nous apercevoir que des points, en nombre fini, manquent à l'appel.

20.1. La correspondance $(X, Y, Z) \mapsto \left(\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}, \frac{1}{Z}\right)$, ou comment retrouver l'ellipse de Steiner

La cohérence de l'application $(X, Y, Z) \mapsto \left(\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}, \frac{1}{Z}\right)$ est parfaitement claire : l'image d'un point ne dépend pas du choix de ses coordonnées barycentriques. En revanche, pour que cette image soit totalement définie, il importe que le point M de coordonnées barycentriques (X, Y, Z) soit déjà en dehors des trois droites portant les paires de sommets du triangle⁶⁷ de référence ABC . Mais le triplet (X, Y, Z) doit être soumis à une dernière condition : il faut que la somme $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z}$ ne soit pas nulle si l'on veut que le point image M' de M soit à distance finie. Cette correspondance, que l'on appellera l'isotomie (relative au triangle ABC), est une brave involution (d'où son nom d'inversion) définie sur le plan affine \mathcal{E} privé des trois côtés du triangle ABC et de l'ellipse de Steiner Σ_{ABC} (circonscrite) d'équation $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z} = 0$, ou encore $YZ + XZ + YZ = 0$. L'inversion isotomique sera notée ι_{ABC} ou plus simplement ι si aucune confusion n'est à craindre au sujet du triangle de référence.

L'inversion isotomique n'a pas seulement une écriture analytique simple; elle définit en fait aussi une transformation géométrique remarquable, que nous allons mettre tout de suite en évidence. La proposition suivante, importante en soi, va nous aider dans cette voie.

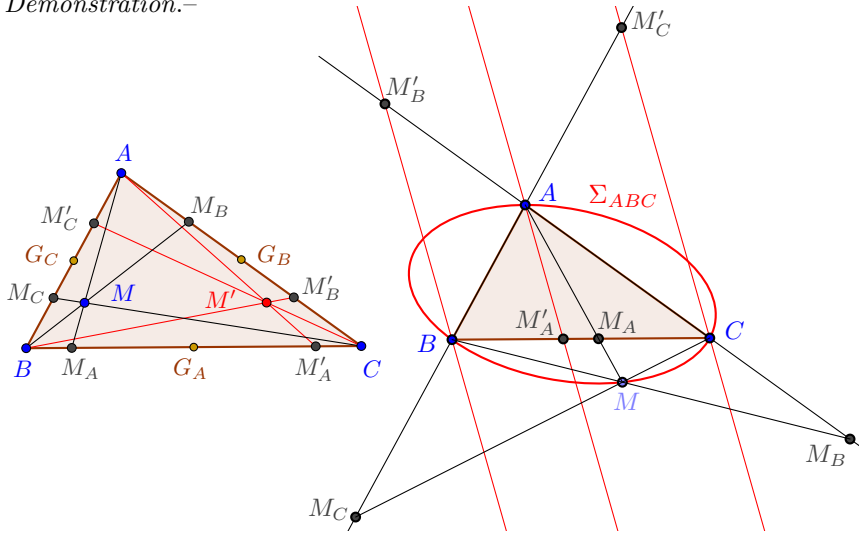
⁶⁷On appellera un peu abusivement ces droites les côtés du triangle.

20.2. Régionnement du plan en dix parties, et comment elles se permutent sous l'action de l'isotomie.

Le plan affine réel \mathcal{E} privé des trois côtés du triangle ABC et de l'ellipse de Steiner est une partie spécifique du plan, que l'on notera \mathcal{I}_{ABC} ou \mathcal{I} tout simplement, possède dix composantes connexes, qui seront permutées suivant une manière précise par l'inversion isotomique. Il importe d'avoir assez l'œil pour détecter où se situe en général l'image d'un point de cet ensemble sous l'effet de ι_{ABC} .

20.3. Proposition. *Pour $M \in \mathcal{I}$, on appelle M_A, M_B et M_C les pieds des céviennes passant par M . On symétrise chacun des ces points par rapport au milieu du côté qui le porte, ce qui définit trois nouveaux points M'_A, M'_B et M'_C sur les droites respectives BC, AC et AB . Si $M \in \mathcal{I}$, alors les trois droites AM'_A, BM'_B et CM'_C concourent en un point M' , qui coïncide avec le point $\iota(M)$. De plus, si $M \in \Sigma$ sans être un sommet du triangle ABC , les droites AM'_A, BM'_B et CM'_C sont bien définies et parallèles⁶⁸.*

Démonstration.—



Si M a pour coordonnées barycentriques (X, Y, Z) , le point M_A a pour coordonnées barycentriques $(0, Y, Z)$, comme il résulte aisément d'un argument

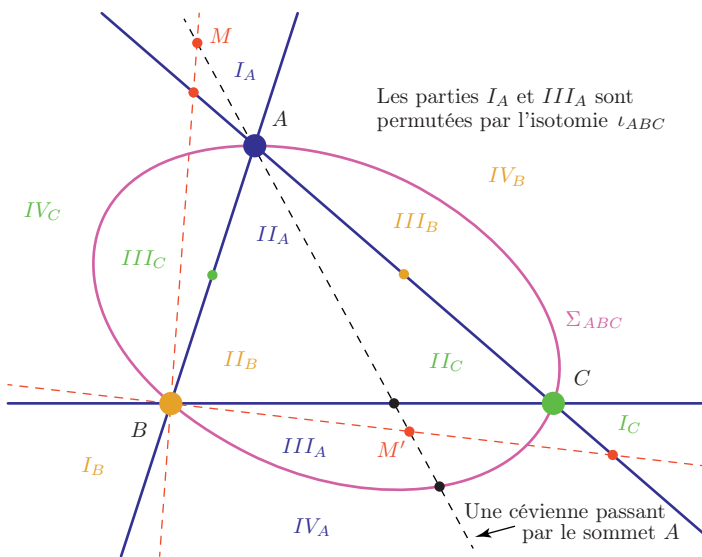
⁶⁸Autrement dit, elles concourent à l'infini, et définissent ainsi un point de la droite de l'infini Δ_∞ , qui se situe dans l'une des trois composantes connexes de Δ_∞ privée des trois points à l'infini marqués par les directions des côtés du triangle ABC . Cela permet de prolonger mentalement ι à l'ellipse de Steiner Σ_{ABC} tri-épointée en l'envoyant sur la droite de l'infini tri-épointée.

d'associativité du barycentre. On remarque maintenant que l'involution affine $(0, Y, Z) \mapsto (0, Z, Y)$ échange B et C et laisse fixe le milieu G_A de BC , c'est donc sur la droite BC la symétrie par rapport au point G_A . Mais en dehors des points B et C , cette application est aussi donnée en coordonnées barycentriques par

$$(0, Y, Z) \mapsto \left(0, \frac{1}{Y}, \frac{1}{Z}\right)$$

(diviser par le produit YZ les coordonnées précédentes). En répétant le raisonnement sur les autres côtés, on voit que le point de coordonnées barycentriques $\left(\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}, \frac{1}{Z}\right)$ est, comme il se doit, sur chacune des trois droites AM'_A, BM'_B et CM'_C , qui sont de ce fait concourantes (à distance finie ou non, suivant que la somme $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z}$ est nulle ou non). \square

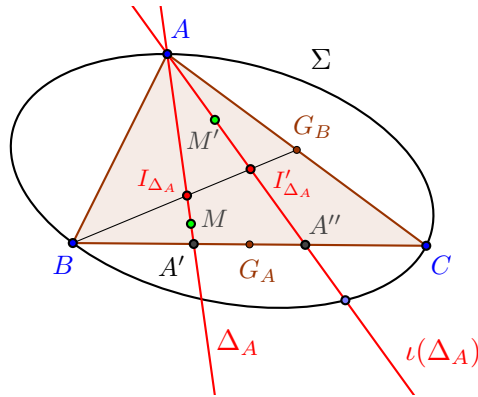
Nous voyons aussitôt grâce à cette construction que l'intérieur du triangle ABC est stable par ι , ce qui n'est évidemment pas une découverte, car les inverses des coordonnées sont tous positifs si les coordonnées le sont au départ. Pour l'action de ι sur les autres composantes de \mathcal{I} , il est bon de remarquer qu'à la lumière de la proposition précédente, *l'image d'une droite cévienne (c'est-à-dire une droite passant par l'un des sommets du triangle) est encore une droite cévienne relative au même sommet!* Pour détecter donc l'effet de ι sur les composantes connexes de \mathcal{I} , il est bon d'examiner l'image par ι des quatre intervalles que délimitent sur une cévienne le sommet dont elle dépend, le côté opposé à ce sommet et l'ellipse de Steiner Σ_{ABC} .



Notons aussi qu'en se limitant aux céviennes passant par le sommet A et traversant l'intérieur du triangle ABC , on comprendra parfaitement l'action de ι sur l'ensemble des composantes connexes de \mathcal{S} , car ce qui se passe au niveau des régions I_A, II_A et III_A et IV_A se transposera aux quatre régions relevant de chacun des deux autres sommets⁶⁹. Annonçons déjà le schéma de la situation. *La partie II est, comme on l'a déjà dit, stable. Il en est de même de la partie IV_A . Quant aux parties I_A et III_A , elles sont échangées par l'inversion isotomique ι_{ABC} .* Les détails suivent.

20.4. Isotomie et droites céviennes

Fixons donc une céviene Δ_A traversant l'intérieur du triangle. Elle rencontre le segment BC en un point que l'on notera A' . La médiane BG_B , qui est stable par ι , marque sur cette céviene un point que l'on notera I_{Δ_A} . Soit $\Delta'_A = \iota(\Delta_A)$ l'image de Δ_A par isotomie. Elle rencontre le segment BC en le symétrique A'' de A' par rapport au milieu G_A de BC . De plus, $\iota(I_{\Delta_A}) = I'_{\Delta_A}$ est à l'intersection de Δ'_A avec BG_B . Un point parcourant le segment délimité par I_{Δ_A} et A' se retrouve avec une image sous ι parcourant le segment délimité par les points I'_{Δ_A} et A . De là, on apprend que lorsque des points se rapprochent du segment BC , leurs images se pressent dans l'angle \hat{A} , tout près du sommet A . On exprimera abusivement cela en disant que l'isotomie applique le côté BC en A et éclate le point A tout au long de BC .



Que se passe-t-il pour les autres intervalles découpés sur la droite Δ_A ? On se contentera d'inviter le lecteur à découvrir cela par lui-même, et pour affiner son étude à marquer sur la céviene Δ_A la trace de la droite invariante qu'est la parallèle issue de B au côté AC . On retient simplement

⁶⁹Noter que $3 \times 4 - 2 = 12 - 2 = 10$, est bien égal au nombre des composantes connexes de \mathcal{S} , puisque $II_A = II_B = II_C$ a été compté trois fois, alors qu'il faut s'en contenter d'une seulement.

que plus le point courant le long de la cévienne Δ_A s'approche de l'ellipse de Steiner, plus son image par l'involution ι s'éloigne à l'infini le long de la cévienne Δ'_A . On invite le lecteur aussi à se souvenir que l'involution ι applique la cévienne Δ'_A sur la cévienne Δ_A . On ne saurait enfin conseiller assez au lecteur de voir tout cela avec un logiciel de géométrie dynamique.

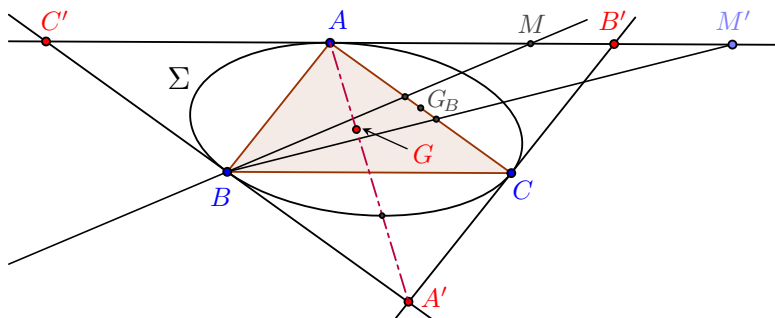
20.5. Points fixes et droites invariantes

L'inversion isotomique ι_{ABC} possède quatre points fixes, donnés par le centre de gravité G et par les sommets du triangle $A'B'C'$ dont notre triangle ABC est le triangle médian⁷⁰. Il suffit pour s'en convaincre de résoudre l'équation

$$(X, Y, Z) = \left(\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}, \frac{1}{Z} \right).$$

Les six droites joignant deux quelconques de ces points étant des droites céviennes sont ainsi stables. Il est facile d'établir que ce sont les seules : il suffit en effet de noter que l'intersection d'une droite stable avec l'une ou l'autre de ces six droites est un point fixe sous l'action de l'involution ι_{ABC} .

Que fait l'inversion isotomique sur la droite stable $B'C'$ (privée du point A), d'équation $X = 1$ (non homogène) ou encore $Y + Z = 0$? Un point de cette droite admet pour coordonnées barycentriques $(X, Y, -Y)$ et admet pour image $(-Y^2, -XY, XY) = (Y, X, -X)$. C'est une involution projective ayant pour points fixes B' et C' (et qui envoie le point A à l'infini). C'est la conjugaison harmonique par rapport aux points B' et C' .



Que fait l'inversion isotomique sur la droite définie par la médiane AG_A ? Le lecteur vérifiera que c'est encore une conjugaison harmonique, et plus précisément la conjugaison harmonique par rapport aux points fixes G et A' (et qui envoie le milieu de GA' , lequel se trouve sur l'ellipse de Steiner, à l'infini)⁷¹.

⁷⁰Ce triangle est appelé par fois le triangle bimédian du triangle ABC .

⁷¹On remarquera aussi que la restriction de l'inversion isotomique à cette médiane

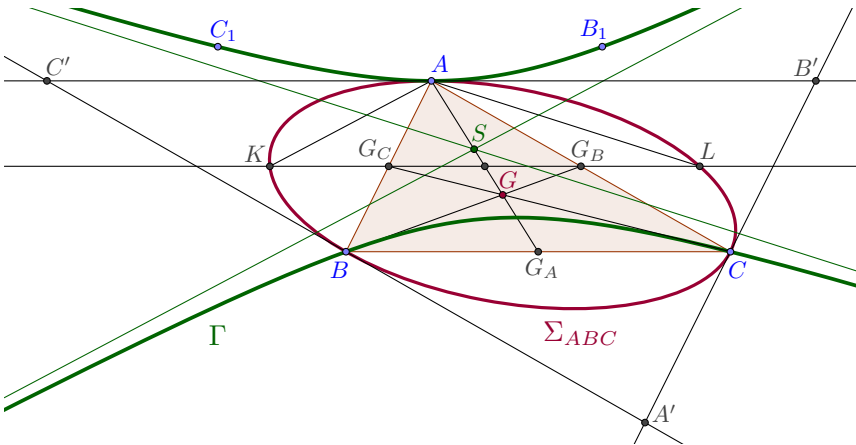
20.6. Inverse isotomique d’une droite non cévienne

C’est là que va apparaître tout l’intérêt de l’inversion isotomique ! En effet, l’inverse sous ι_{ABC} d’une droite non cévienne va s’avérer être une conique circonscrite, et l’image d’une conique circonscrite sera donc une droite non cévienne⁷².

20.6.1. Un exemple suggestif

On serait bien avisé de commencer en regardant le cas particulier de l’image sous ι_{ABC} de la droite des milieux $G_B G_C$ d’équation $X = \frac{1}{2}$, soit aussi $X = Y + Z$. Comme on a $\frac{1}{YZ} - \frac{1}{XZ} - \frac{1}{XY} = 0$, on voit manifestement que le point $(\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}, \frac{1}{Z})$ vérifie l’équation (de la conique) $YZ - XZ - XY = 0$.

Cette conique circonscrite, que l’on désignera par Γ , est clairement une hyperbole, puisque le segment $G_B G_C$ reste par isotomie dans l’intérieur du triangle ABC . Nous allons en déterminer le centre, les asymptotes et moult autres propriétés, à commencer par le fait que cette hyperbole est tangente à la conique de Steiner Σ_{ABC} au point A . En effet, si Γ coupait la droite stable $X = 1$ en un autre point que A (forcément dans \mathcal{S}), l’image de ce point devrait rester sur $X = 1$ et être sur la droite des milieux considérée. On a là une contradiction.



Un argument très similaire et à peine un peu plus compliqué montre de même que l’hyperbole Γ est tangente aux deux médianes BG_B et CG_C en B et C respectivement. Ces propriétés peuvent évidemment être établies

s’étend par continuité de façon à échanger les points A et G_A (qui sont d’ailleurs clairement conjugués harmoniques par rapport aux points G et A' — regarder comment la droite $A'B'$ coupe le faisceau (BA, BG, BG_A, BA')).

⁷²Notons déjà que l’inversion isotomique échange la droite de l’infini avec l’ellipse de Steiner Σ_{ABC} .

par le calcul barycentrique, en calculant les q -orthogonaux respectifs des sommets A , B et C pour la forme quadratique

$$YZ - XZ - XY,$$

ou (ce qui est équivalent) pour la matrice symétrique $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ainsi, par exemple, la condition

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = X - Y$$

donne l'équation du plan tangent au cône dans \mathcal{E}^v le long de la génératrice OC , laquelle est précisément l'équation en coordonnées barycentriques de la droite CG_C .

Un simple regard sur la figure indique que le centre de la conique Γ se trouve sur la droite AG_A et cela se justifie par le fait que les directions de GG_A et de G_CG_B sont conjuguées relativement à Γ (et, soit dit en passant, à l'ellipse de Steiner Σ_{ABC} aussi). Voir à cet effet la deuxième remarque en page 265 ou la deuxième question de l'exercice 19.4. Cela se vérifie aussi⁷³ par le calcul suivant :

$$S^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

qui prouve non seulement que les deux dernières composantes du centre S de Γ sont égales, mais de plus que le point S vérifie

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AG_A}} = \frac{2}{5}.$$

La détermination des asymptotes s'avère intéressante. *Leurs deux directions sont données en effet par les vecteurs \overrightarrow{AK} et \overrightarrow{AL}* , puisque les points K et L de Σ s'envoient par isotomie en les points à l'infini de l'hyperbole Γ et que les céviennes AK et AL sont échangées par ι_{ABC} (comme il résulte simplement du fait que le milieu de la corde KL se trouve sur le diamètre conjugué AG_A).

Vérifions cela par le calcul analytique : le point K de la figure admet pour coordonnées barycentriques un triplet (X, Y, Z) , avec X et Y de mêmes signes, vérifiant à la fois l'équation $X = Y + Z$, l'équation $XY + XZ + YZ$ de Σ et enfin, bien sûr, l'équation $X + Y + Z = 1$.

Cela donne $K = \left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)$. Le point L admet, en revanche, pour coordonnées barycentriques $L = \left(\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$. Il s'ensuit que le vec-

⁷³Cf. le calcul analogue en page 234.

teur $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OA}$ de E est parallèle au vecteur $(2, -1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5})$. De l'autre côté, le vecteur \overrightarrow{AL} est parallèle au vecteur $(2, -1 + \sqrt{5}, -1 - \sqrt{5})$. Cela dit, les deux directions asymptotiques de l'hyperbole Γ sont données par les vecteurs de l'espace E , d'équation $X + Y + Z = 0$, qui sont sur le cône $XY + XZ - YZ = 0$ (définissant la conique Γ). Ces vecteurs vérifient donc $X + Y + Z = 0$ et $YZ = -X^2$, conditions vérifiées aussi bien par le vecteur \overrightarrow{AK} que le vecteur \overrightarrow{AL} !

- Nous laissons en exercice facile au lecteur le soin de vérifier qu'il existe toujours sur une hyperbole \mathcal{H} donnée une infinité de triangles ABC inscrits tels que l'inverse isotomique de \mathcal{H} sous l'effet de ι_{ABC} soit la droite des milieux $G_B G_C$. Il remarquera que le choix de A est libre, et se souviendra du rapport d'homothétie de centre A qui applique S sur G_A . Ce rapport peut être d'ailleurs retrouvé géométriquement en cherchant l'image du milieu du segment $G_B G_C$ par l'involution ι .

- Le lecteur est invité, à moins qu'il ne l'ait déjà fait, à faire parcourir au point M , sur la figure ci-dessus, l'ensemble de la droite $G_B G_C$, en partant par exemple de G_B vers la gauche, et à suivre du regard le parcours correspondant de l'inverse isotomique M' . Quand M parcourt alors le segment $G_B G_C$, le point M' parcourt l'arc de l'hyperbole \mathcal{H} depuis B vers C et lorsque M se déplace de G_C vers K , le point M' parcourt la branche infinie de \mathcal{H} qui démarre en C , ce qui est en accord avec la règle de permutation (sous l'action de ι) des différentes composantes connexes de l'ensemble \mathcal{S} . Nous arrêterons quant à nous notre parcours en compagnie du point M , quand celui-ci aura longé la demi-droite démarrant de K vers la gauche, et nous constaterons alors que le point M' aura, quant à lui, cheminé le long de la branche supérieure gauche de \mathcal{H} , depuis l'infini jusqu'au point A . Nous noterons enfin que sous l'action de ι_{ABC} , l'image de notre droite des milieux (G_B et G_C inclus) couvre toute l'hyperbole \mathcal{H} , sauf le point A , que l'on pourra néanmoins considérer comme l'image du point à l'infini de BC , point à l'infini également commun à notre droite $G_B G_C$.

- La tangente en C à l'hyperbole \mathcal{H} est la droite CG , laquelle est stable par ι . Sous l'action de ι , et au voisinage du point C , l'arc de \mathcal{H} et sa tangente en C s'appliquent sur deux segments portés respectivement par la droite des milieux $G_B G_C$ et la droite CG_C et situés dans un voisinage du point G_C . L'inversion isotomique ne conserve donc pas le contact au voisinage d'un sommet du triangle⁷⁴.

⁷⁴Elle ne le fait que dans les ouverts du plan affine qu'elle envoie difféomorphiquement sur leur image; ces ouverts sont tous inclus dans le plus grand d'entre eux, qui est le complémentaire de la réunion des trois côtés du triangle et de son ellipse de Steiner.

20.6.2. Le cas général d'une droite non cévienne

L'équation barycentrique d'une droite Δ ne passant par aucun sommet est de la forme $pX + qY + rZ = 0$, où p , q et r sont tous les trois non nuls. Précisons en outre que p , q et r ne sont pas tous égaux (sinon, Δ serait la droite de l'infini). Comme $\frac{p}{YZ} + \frac{q}{XZ} + \frac{r}{XY} = 0$, l'image $\iota_{ABC}(\Delta)$ est contenue dans la conique circonscrite Γ_Δ d'équation $pYZ + qZX + rXY = 0$.

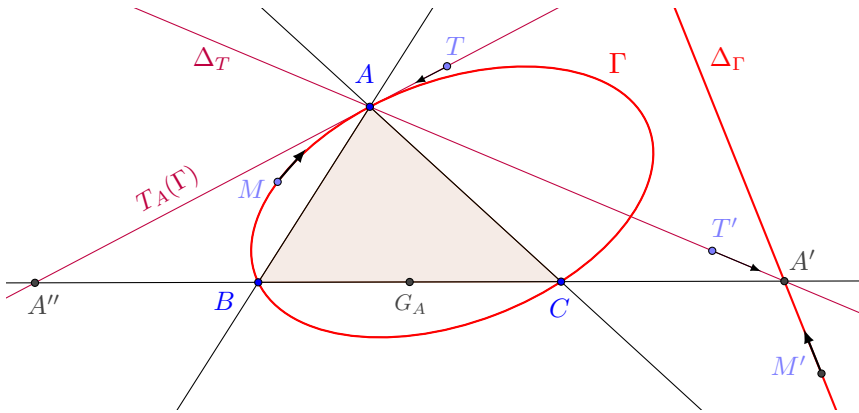
- La droite Δ coupe en général chacun des côtés du triangle ABC (et l'ellipse de Steiner en au plus deux points). On a là au plus cinq points de la droite Δ , auxquels l'on pourrait, du moins en pensée, adjoindre un éventuel dernier point, à savoir son point à l'infini. Lorsque l'on parcourt cette droite, ces points peuvent être considérés comme des bornes de repérage le long de la droite Δ , pour suivre les étapes du parcours de l'image isotomique M' du point M . Quand celui-ci approche l'intersection de Δ avec l'un des côtés, son image M' s'approchera du sommet opposé à la face considérée et si M pouvait venir à proximité immédiate de l'ellipse de Steiner Σ_{ABC} c'est que son image M' aurait alors le loisir de longer une branche infinie de la conique circonscrite image Γ_Δ , qui au quel cas s'avérerait être une hyperbole ou une parabole. Tout cela peut se vérifier par le calcul⁷⁵.

- Réciproquement, l'image par isotomie, qui est une involution, de la conique Γ d'équation $pYZ + qZX + rXY = 0$ est la droite Δ_Γ d'équation $pX + qY + rZ = 0$; là, un approfondissement du comportement de l'isotomie au voisinage de l'un ou l'autre des trois sommets du triangle (ABC) s'impose.

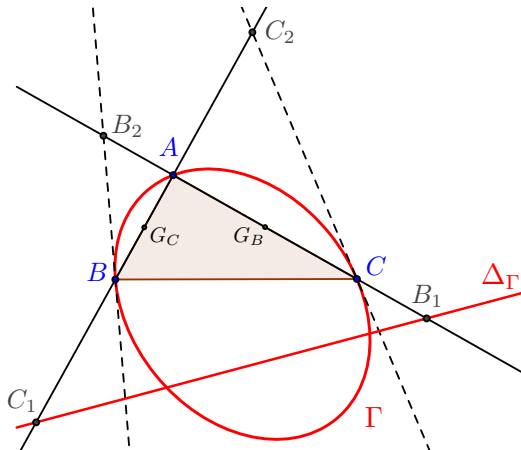
On va s'apercevoir que les isotomiques M' et T' de deux points M et T s'approchant par exemple du sommet A le long de deux courbes tangentes en A approchent à leur tour (le long des courbes isotomiques correspondantes) le même point A' de la droite BC , lequel ne dépend donc que de la tangente commune en A aux courbes de départ. On constatera cela sur le dessin qui suit, où la courbe où se meut le point T est simplement la tangente à la conique Γ où se meut le point M . La tangente $T_A(\Gamma)$ en A à la conique Γ admet pour équation $rY + qZ = 0$ et l'isotomique Δ_T de cette cévienne admet pour équation $qY + rZ = 0$; en d'autres termes, les droites Δ_Γ et Δ_T coupent la droite opposée (BC) en le même point, ayant pour cobars $(0, r, -q)$. En outre, ce point d'intersection est le symétrique par rapport à G_A du point de cobars $(0, r, -q)$, c'est-à-dire du point où $T_A(\Gamma)$ coupe la droite (BC) ⁷⁶.

⁷⁵C'est fait, bien sûr, dans [JDE], pages 128-129.

⁷⁶Cela signifie heuristiquement que, si l'isotomie éclate le point A en la droite portant le côté opposé BC , la naissance en A à une courbe passant par A spécialise en revanche l'image de A en un point bien déterminé de cette droite (BC) .



• Si deux des tangentes à Γ en A, B, C sont déjà tracées, cela permet la détermination de deux points de Δ_Γ ; réciproquement, si Δ_Γ est déjà tracée, on peut en déduire simplement les tangentes à Γ en l'un quelconque des sommets. Une autre conséquence de ce résultat est que, si deux coniques circonscrites ont même tangente en A , leurs isotomiques passent par un même point de BC .



Dans la figure, nous avons déterminé Δ_Γ grâce aux images de deux points (quelconques, mais distincts des sommets) de Γ ; sachant que cette droite coupe AC et AB en B_1 et C_1 respectivement, les tangentes à Γ en B et C sont les droites BB_2 et CC_2 , où B_2 et C_2 se déduisent respectivement de B_1 et de C_1 par symétrie par rapport au milieu du côté correspondant.

• Partant d'une droite non cévienne Δ dans le plan du triangle ABC (et de son ellipse de Steiner Σ_{ABC}) et en en prenant l'image Γ_Δ par l'isotomie ι_{ABC} , nous nous retrouvons avec une figure comportant deux coniques

circonscrites et une droite⁷⁷. L'étude de cette figure est fort instructive, notamment le calcul analytique des points d'intersection des ses courbes deux à deux, ainsi que leur éventuel contact. Nous nous contenterons des résultats.

1. La droite non cévienne Δ a une équation de la forme $pX + qY + rZ = 0$, avec $pqr \neq 0$. Elle rencontre l'ellipse de Steiner dans le cas où les deux équations $pX + qY + rZ = 0$ et $XY + XZ + YZ = 0$ ont une solution commune (x, y, z) non nulle (et même dont toutes les composantes sont non nulles, puisque l'ellipse de Steiner ne coupe les côtés de triangle qu'en les sommets).

En reportant $z = -\frac{px + qy}{r}$ dans l'équation de $\Sigma = \Sigma_{ABC}$, on trouve l'équation $px^2 + (p + q - r)xy + qy^2 = 0$, qui a une solution en $\frac{x}{y}$ ou $\frac{y}{x}$ si, et seulement si, le discriminant

$$\delta = (p + q - r)^2 - 4pq$$

est ≥ 0 , ce qui correspond exactement (et c'est bien normal) à la même condition pour que la conique circonscrite Γ_Δ , image de Δ par ι et d'équation $pYZ + qXY + rXY = 0$, aient des branches infinies⁷⁸.

2. L'ellipse de Steiner Σ_{ABC} et la conique Γ_Δ , d'équations respectives

$$YZ + XZ + XY = 0 \quad \text{et} \quad pYZ + qZX + rXY,$$

passent toutes deux par les sommets du triangle ABC . Elles possèdent en principe un quatrième point⁷⁹, dont les cobars (x, y, z) vérifient donc le système linéaire⁸⁰ suivant en $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ et $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{p}{x} + \frac{q}{y} + \frac{r}{z} = 0.$$

Le vecteur $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$ est donc proportionnel au produit vectoriel formel $(1, 1, 1) \wedge (p, q, r) = (r - q, p - r, q - p)$.

Cela nous donne les cobars du quatrième point d'intersection des coniques Σ et Γ_Δ , savoir

$$\left(\frac{1}{r - q}, \frac{1}{p - r}, \frac{1}{q - p} \right),$$

⁷⁷Nous ne prenons pas en compte les côtés du triangle.

⁷⁸Cf. proposition 12.4, en page 235, où la fonction

$$S = p^2 + q^2 + r^2 - 2pq - 2pr - 2rq$$

coïncide avec notre discriminant δ .

⁷⁹Il est possible néanmoins qu'il n'y en ait que trois, cas où l'un des sommets compte pour deux, ce qui voudra dire alors que nos deux coniques sont tangentes en l'un des sommets du triangle ABC .

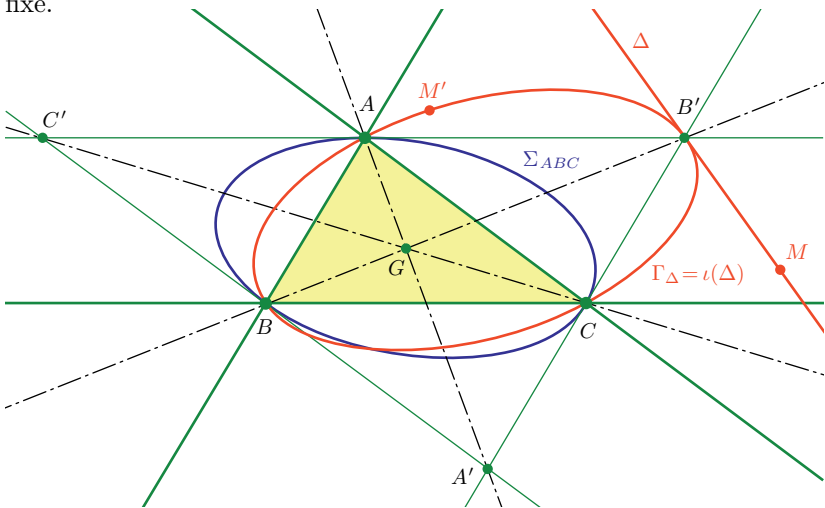
⁸⁰Cette astuce de calcul est exactement l'isotomie!

et subordonne son existence au fait que les coefficients p, q et r sont tous distincts.

Mais que se passe-t-il au cas où $q = r$ par exemple ? Eh bien, l'exemple traité en début de cette section en relève. La droite non cévienne Δ est parallèle à l'un des côtés du triangle ABC !

- Il reste à savoir quand la droite Δ et sa conique isotomique Γ_Δ sont tangentes. Cela se produit lorsque la droite non cévienne Δ passe par un des quatre points fixes A', B', C' et G de l'inversion isotomique ι_{ABC} ! Il suffit pour s'en convaincre de constater que les points d'intersection de Δ et de son image isotomique γ_Δ sont échangés par ι .

Si les deux courbes sont tangentes, on est donc dans le cas d'un point fixe.



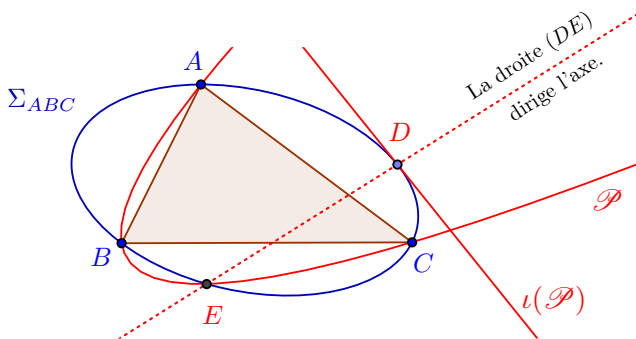
20.7. Exercice. Soit \mathcal{P} une parabole circonscrite au triangle ABC et soit $\iota_{ABC}(\mathcal{P}) = \Delta_{\mathcal{P}}$ son inverse isotomique. On appelle E le point d'intersection de la conique de Steiner $\Sigma = \Sigma_{ABC}$ avec \mathcal{P} et D le point de contact entre $\Delta_{\mathcal{P}}$ et Σ .

- Montrer que la droite (DE) donne la direction de l'axe de la parabole \mathcal{P} .
- En déduire que deux points diamétralement opposés sur la conique de Steiner Σ_{ABC} définissent par isotomie des directions qui lui sont conjuguées.

Corrigé. –

- Cela revient à montrer que le déterminant $\delta := \begin{vmatrix} X & 1/X & 1/(r - q) \\ Y & 1/Y & 1/(p - r) \\ Z & 1/Z & 1/(q - p) \end{vmatrix}$

est nul, sous les trois hypothèses $p^2 + q^2 + r^2 - 2pq - 2pr - 2qr = 0$, $pX + qY + rZ = 0$ et enfin $1/X + 1/Y + 1/Z = 0$.



En reportant, comme en page 279, $Z = -\frac{pX + qY}{r}$ dans l'équation de Σ , on retrouve l'équation $pX^2 + (p + q - r)XY + qY^2 = 0$, qui admet dans ce cas une racine double en Y/X , et l'on peut supposer par homogénéité que $X = 1$. Cela donne $Y = -\frac{p + q - r}{2q}$, et, en procédant de même, $Z = -\frac{p + r - q}{2r}$, si bien que

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{r - p - q}{2q} & \frac{2q}{r - p - q} & \frac{r - q}{p - r} \\ \frac{q - p - r}{2r} & \frac{2r}{q - p - r} & \frac{r - q}{q - p} \end{vmatrix}.$$

En retranchant la première colonne à la seconde dans ce dernier déterminant, on trouve en tenant compte de la première hypothèse (qui s'écrit comme déjà constaté $(p + q - r)^2 = 4pq$) :

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{r - p - q}{2q} & \frac{2(q - p)}{r - p - q} & \frac{r - q}{p - r} \\ \frac{q - p - r}{2r} & \frac{2(r - p)}{q - p - r} & \frac{r - q}{q - p} \end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la première ligne et l'on trouve, en regroupant ensemble les termes dont les dénominateurs se ressemblent, l'expression

$$\frac{2r(r - q) + (q - p)(p + r - q)}{r(r - p - q)} + \frac{2q(r - q) + (r - p)(r - p - q)}{q(q - p - r)},$$

laquelle vaut $3 - 3 = 0$, au vu encore de la première hypothèse !

2. Soit E' le point diamétralement opposé au point E sur l'ellipse de Steiner $\Sigma = \Sigma_{ABC}$. Les inverses isotomiques des deux tangentes en E et E' à Σ sont deux paraboles passant par le point D , inverse isotomique

de la direction de ces deux tangentes (faire une figure ou voir la figure de la page 339). Les droites DE et DE' interceptant un diamètre de Σ en définissent deux directions conjuguées, mais la première question de l'exercice nous dit que ces directions sont celles des axes de nos deux paraboles, et ces axes ont pour directions respectives les inverses isotomiques de E et E' ! (Voir une autre preuve de ce fait dans 23.2.)

20.8. Exercice. Montrer que la conique \mathcal{C}_I rencontrée à l'occasion de l'exercice 9.1, page 221, est invariante par isotomie, mais également par inversion harmonique. Montrer que les involutions qu'elles induisent sur cette conique commutent⁸¹. Déterminer le triangle autopolaire associé au groupe additif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui en découle⁸². (On trouve le triangle de sommets A , G_A et le point à l'infini dans la direction de BC .)

20.9. Combien de paraboles par quatre points

Nous savons déjà que cinq points définissent en général une conique (unique), et nous avons vu aussi qu'il existe une conique unique passant par quatre points (en position générale) plus l'un qui se trouve sur la droite de l'infini (cf. section 19.7, en page 266). La question de savoir combien de coniques passent par quatre points est toute naturelle et a une réponse quelque peu inattendue, qui s'explique parfaitement au même titre que l'assertion précédente sous l'éclairage de l'isotomie.

La réponse suivante, qui est parfaitement symétrique en les quatre points, s'énonce comme il suit, mais en privilégiant trois.

20.10. Proposition. *Si ABC est un triangle donné et M un point courant de la partie $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{ABC}$, il existe zéro ou deux paraboles passant par ces quatre points selon que M appartient à la réunion $I_A \cup I_B \cup I_C \cup II$ ou n'y appartient pas.*

Autrement dit, il existe des paraboles circonscrites aux quatre points si, et seulement si, aucun n'est dans l'enveloppe convexe des trois autres (c'est-à-dire si leur enveloppe convexe n'est pas un triangle).

⁸¹Deux involutions distinctes qui commutent fournissent une troisième, à savoir leur composée. Inversement, si la composée de deux involutions est une involution, c'est qu'elles commutent. Cela met en évidence à chaque fois un groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

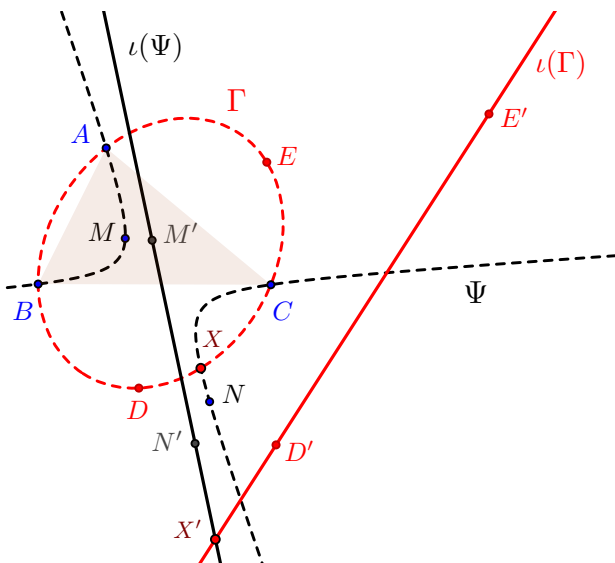
⁸²Une involution est déterminée sur une conique par son point de Frégier. Deux involutions de points de Frégier P et Q commutent si, et seulement si, les points P et Q sont conjugués par rapport à la conique, et le point de Frégier de l'involution produit est alors le pôle de la droite PQ .

Démonstration. Du conjugué isotomique M' de M , menons quand c'est possible une tangente à l'ellipse de Steiner Σ_{ABC} . L'inverse isotomique de cette tangente est une parabole circonscrite à nos quatre points. Pouvoir mener une tangente à Σ équivaut à dire que M' est en dehors de cette ellipse, et c'est le cas si, et seulement si, M est dans la zone indiquée. \square

On notera que lorsque M est sur Σ_{ABC} , le point M' est à l'infini (et définit donc une direction), et nous avons alors deux tangentes à Σ_{ABC} ayant cette direction, dont les inverses isotomiques sont deux paraboles circonscrites au triangle ABC et passant par M .

20.11. Le quatrième point commun à deux coniques

Il s'agit de construire à la règle et au compas le quatrième point d'intersection de deux coniques Γ et Ψ , définies par des familles (A, B, C, D, E) et (A, B, C, M, N) de cinq points, dont trois points sont donc en commun.



Si $l = l_{ABC}$, les images $l(\Gamma)$ et $l(\Psi)$ de nos deux coniques sont les deux droites $(l(D)l(E))$ et $(l(M)l(N))$, respectivement. Génériquement, ces deux droites se coupent en un point $l(X)$, où X est le point cherché!

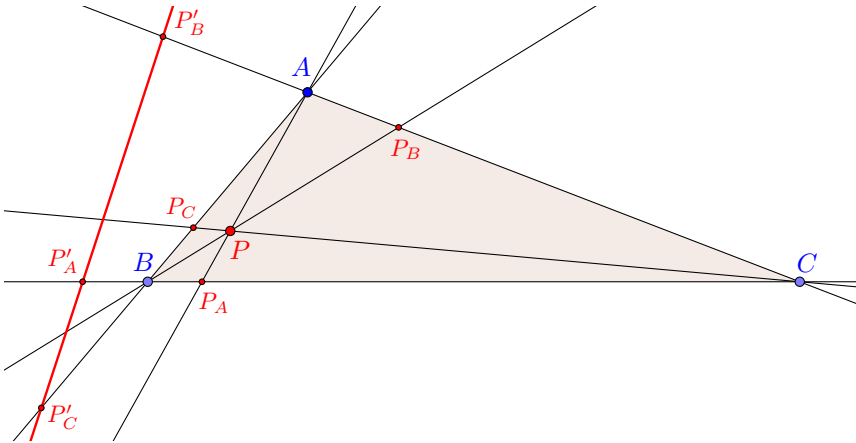
20.12. Exercice. Considérons à nouveau un triangle (ABC) et une droite projective Δ non cévienne, d'équation barycentrique $pX + qY + rZ = 0$, avec $pqr \neq 0$. Si M , de coordonnées barycentriques (X, Y, Z) est sur Δ , on lui associe les droites (AM'_A) , (BM'_B) et (CM'_C) comme au 20.3.

Montrer que les applications qui à $M \in \Delta$ associent respectivement ces trois droites sont des homographies de Δ sur chacun des trois faisceaux formés des droites passant respectivement par A, B, C . Avec la section 14.6, redémontrer que $\iota_{ABC}(\Delta)$ est une conique passant par les trois sommets du triangle.

21. Polaire triangulaire

Si (α, β, γ) sont les coordonnées barycentriques d'un point M du plan affine \mathcal{E} , rapporté au triangle (ABC) , où se trouve alors la droite Δ d'équation $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$? Eh bien, c'est la polaire triangulaire relativement au triangle ABC de l'inverse isotomique $M' = \iota_{ABC}(M)$ du point M !

L'intérêt de la notion de polaire triangulaire est déjà bien présent dans cette question et sa réponse. En fait, l'inverse isotomique d'un point P correspond à une propriété géométrique bien sympathique. Si P_A, P_B et P_C sont les pieds des céviennes définies par P et si P'_A, P'_B et P'_C sont les conjugués harmoniques de ces points relativement aux couples de sommets adéquats, alors les points P'_A, P'_B et P'_C sont alignés, et la droite qui les contient est appelé la polaire triangulaire du point P relativement au triangle ABC .



La preuve est immédiate. Si $P = (X_P, Y_P, Z_P)$, alors $A_P = (0, Y_P, Z_P)$ et $A'_P = (0, Y_P, -Z_P)$, etc. L'alignement des points P'_A, P'_B et P'_C résulte aussitôt de la nullité manifeste du déterminant suivant :

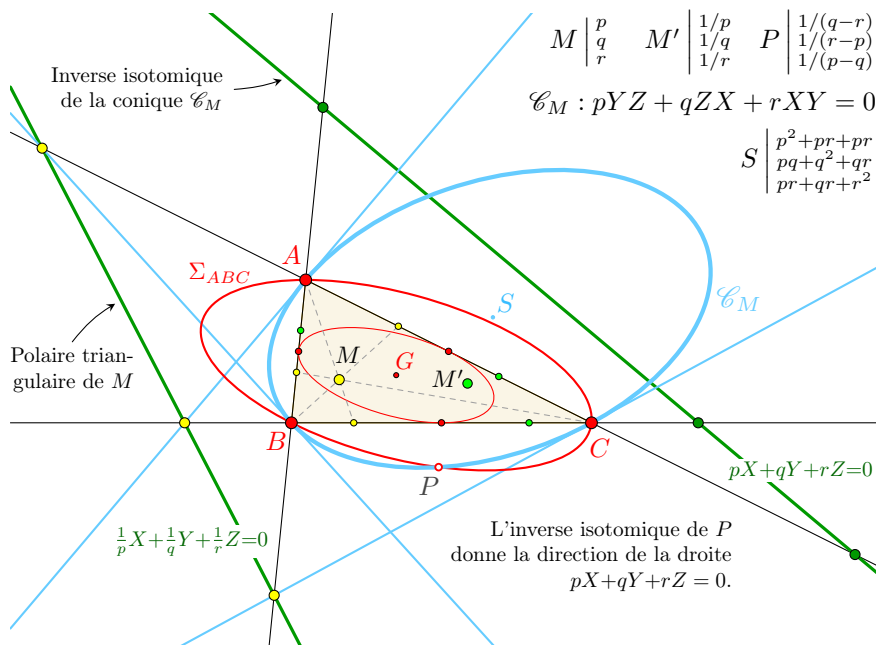
$$\begin{vmatrix} 0 & X_P & X_P \\ Y_P & 0 & -Y_P \\ -Z_P & -Z_P & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de regarder la situation quand le point P est sur l'une des droites médianes, et nous nous contenterons de signaler

que la polaire triangulaire du centre de gravité G est la droite de l'infini. Nous laissons aussi au lecteur le plaisir d'élucider lui-même quelques-uns des alignements mis en évidence par la figure.

21.1. Exercice. Soit M un point du plan affine de coordonnées barycentriques (p, q, r) relativement au triangle ABC . Construire la conique circonscrite \mathcal{C}_M d'équation $pYZ + qZX + rXY = 0$. Partant inversement de la conique circonscrite \mathcal{C} , placer le point M tel que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_M$.

Indication. – La conique \mathcal{C}_M , dont l'équation s'écrit aussi $\frac{p}{X} + \frac{q}{Y} + \frac{r}{Z} = 0$, est visiblement l'inverse isotomique de la droite $pX + qY + rZ = 0$, laquelle est la polaire triangulaire de l'inverse isotomique M' du point M .



On notera également que la droite $\frac{X}{p} + \frac{Y}{q} + \frac{Z}{r} = 0$ est la droite qui passe par les points où la tangente à la conique en chacun des sommets du triangle recoupe le côté opposé!

La conique \mathcal{C}_M du dessin est une ellipse, et le point M est dès lors forcément à l'intérieur de l'ellipse de Steiner inscrite σ_{ABC} .

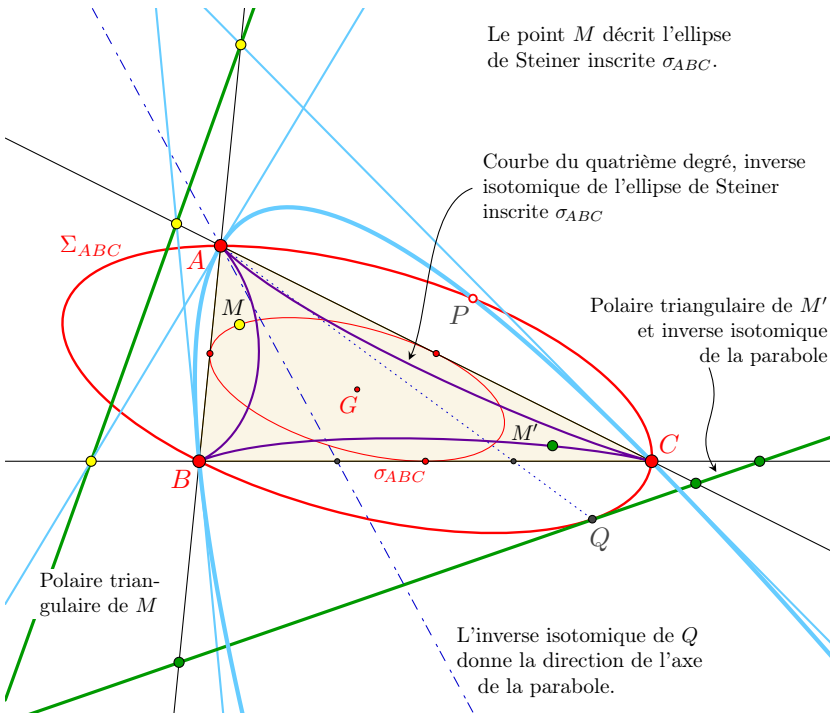
La figure suivante concerne le cas où $M = (p, q, r)$ décrit σ_{ABC} . On verra en particulier qu'un point est sur l'ellipse de Steiner inscrite σ_{ABC} si, et seulement si, la polaire triangulaire de son isotomique est tangente à l'ellipse de Steiner circonscrite Σ_{ABC} .

L'écriture suivante éclairera ce qui suit, tout comme ce qui précède.

$$S(p, q, r) = p^2 + q^2 + r^2 - 2pq - 2qr - 2rp$$

$$= [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} p^2 & -pq & -pr \\ -pq & q^2 & -qr \\ -pr & -qr & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [p \ q \ r] \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}.$$

La première égalité indique quand le centre d'une conique est à l'infini ; la seconde indique que l'équation tangentielle de l'ellipse de Steiner circonscrite Σ_{ABC} est $u^2 + v^2 + w^2 - 2uv - 2vw - 2uw = 0$ et que l'ellipse de Steiner inscrite σ_{ABC} admet $X^2 + Y^2 + Z^2 - 2XY - 2YZ - 2ZX = 0$ pour équation ponctuelle. (Cf. les propositions 12.3 et 16.2 ; cf. aussi page 279.)

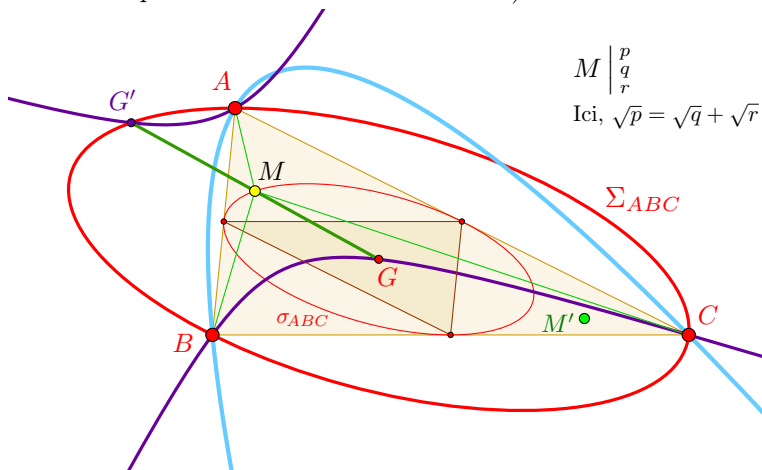


Les calculs de la page 279 montrent maintenant aisément que le point de contact (double) Q de la figure admet pour cobars $Q = (\sqrt{qr}, \sqrt{pr}, \sqrt{pq})!$

La courbe du quatrième degré visible sur le dessin est l'inverse isotomique de l'ellipse de Steiner inscrite. Les polaires triangulaires de ses points enveloppent l'ellipse de Steiner circonscrite Σ_{ABC} , dont le lecteur a déjà établi l'équation tangentielle fournie ci-dessus. Elle présente en les sommets du triangle ABC trois points de rebroussement de première espèce, où les tangentes sont les médianes du triangle ABC .

21.2. Exercice. Si $M = (p, q, r)$ appartient à l'ellipse de Steiner inscrite⁸³, écrire l'équation de la conique circonscrite au triangle ABC et ayant M pour centre.

Constater que cette conique est une hyperbole, qui passe par le centre de gravité G du triangle⁸⁴. Montrer que le point où cette hyperbole recoupe la conique de Steiner circonscrite est le symétrique de G par rapport à M (on se rappellera que les deux ellipses de Steiner se déduisent simplement l'une de l'autre par une homothétie de centre G).



Indication. – Les côtés du triangle médian ont pour équations :

$$X + Y - Z = 0, \quad X - Y + Z = 0 \quad \text{et} \quad X - Y - Z = 0.$$

Les points de l'ellipse de Steiner inscrite se répartissent sur trois arcs, où les formes linéaires précédentes gardent un signe constant. Si $M = (p, q, r)$ est choisi sur l'ellipse de Steiner comme sur la figure, on a $p > q + r$ et l'équation de l'hyperbole circonscrite dont il est le centre⁸⁵ est donnée par

$$\sqrt{p}YZ - \sqrt{q}ZX - \sqrt{r}XY = 0.$$

Pour montrer que l'équation précédente définit bien une hyperbole passant par G et de centre M , on s'aidera des formules (!!) de 12 et de l'identité

$$S(p, q, r) = (\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r})(\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r})(\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r})(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}).$$

⁸³On supposera que le point M n'est pas un milieu.

⁸⁴On trouvera dans la section 23 diverses propriétés intéressantes relatives à ces hyperboles.

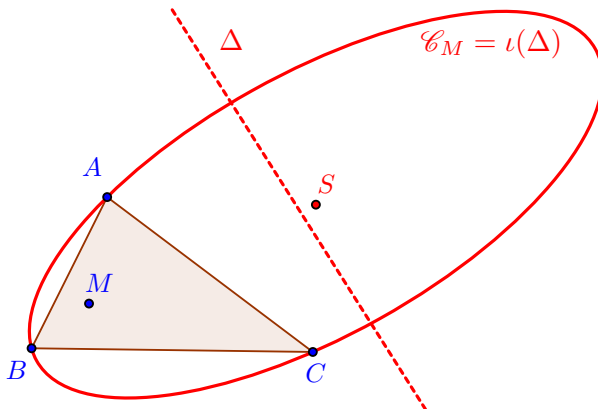
⁸⁵Une fois que l'on introduit une structure euclidienne, cette hyperbole sera équilatère dans le seul cas où M est au point d'intersection du cercle d'Euler et de la conique de Steiner inscrite qui n'est pas un sommet du triangle médian. (Se rappeler en fait que les centres des hyperboles équilatères circonscrites décrivent le cercle d'Euler ; cf. proposition VI-5.5, en page 403.)

21.3. Exercice. Soit ABC un triangle de référence. Montrer que l'application qui à un point $M = (p, q, r)$ du plan affine privé de l'ellipse de Steiner σ_{ABC} inscrite dans ABC associe le centre S de la conique circonscrite \mathcal{C}_M d'équation $pYZ + qZX + rXY = 0$ est involutive.

Indication. – Penser aux formules !! de la section 12 et noter la curieuse égalité

$$\begin{bmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r' & q' \\ r' & 0 & p' \\ q' & p' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} !$$

La conique circonscrite \mathcal{C}_S de centre M admet $p'YZ + q'ZX + r'XY$ pour équation, où (p', q', r') sont les cobars de S .



La droite Δ de la figure est, bien sûr, la polaire triangulaire de l'isotomique M' de M , relativement au triangle ABC .

21.4. Exercice. Étant donnée une base barycentrique (ABC) , montrer que l'application φ définie par $(X, Y, Z) \mapsto (X^2, Y^2, Z^2)$ est bien définie au niveau des coordonnées barycentriques, et déterminer l'image par cette application de la droite de l'infini.

Indication. – On trouve l'ellipse de Steiner inscrite σ_{ABC} ! On pourra commencer par montrer que tout point du plan affine de coordonnées barycentriques (x^2, y^2, z^2) , où $x + y + z = 0$, appartient à cette conique. On pourra aussi remarquer que la restriction de l'application φ à la droite de l'infini n'est autre que la conjugaison isotomique par rapport au triangle médian du triangle (ABC) .

22. Faisceaux ponctuels de coniques

Cette notion est subtile. Aussi lui consacrerons-nous un assez grand nombre de pages ; nous commençons par un exemple.

22.1. Coniques circonscrites passant par G

On étudie les coniques d'équations $pYZ + qZX + rXY = 0$, avec la condition linéaire sur p , q et r donnée par $p + q + r = 0$. Elles fournissent un exemple particulier de ce que l'on appelle communément un faisceau de coniques. Ces coniques passent toutes évidemment par le centre de gravité du triangle de référence (ABC) . Il existe parmi ces coniques trois coniques exactement qui sont dégénérées, correspondant aux cas où $pqr = 0$. Si $p = 0$ par exemple, on trouve la conique d'équation $X(Y - Z) = 0$, réunion des deux droites (BC) et (AG) ; le centre de cette conique est le milieu G_A de $[BC]$.

22.2. Proposition. *Le faisceau de coniques passant dans le plan \mathcal{E} par les quatre points A , B , C et G est formé d'hyperboles, dont trois sont dégénérées. Le lieu des centres de ces coniques est la conique de Steiner σ_{ABC} inscrite dans le triangle ABC .*

22.3. Exercice. Vérifier les propriétés suivantes de la *conique de Steiner inscrite*. Elle est l'homothétique de la conique de Steiner circonscrite dans l'homothétie de centre G et de rapport $1/2$. Son équation tangentielle est donnée par $vw + wu + uv = 0$. C'est le lieu des centres des coniques passant par A , B , C et G . C'est la (seule) conique inscrite dans le triangle ABC et de centre G . Elle touche les côtés en leur milieu ; elle est aussi l'enveloppe des polaires triangulaires des points à l'infini relativement au triangle ABC . Enfin, elle admet pour équation barycentrique

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2XY - 2XZ - 2YZ = 0.$$

22.4. Exercice. Étant donnée une base barycentrique (ABC) , montrer que l'application φ définie par $(X, Y, Z) \mapsto (X^2, Y^2, Z^2)$ est bien définie au niveau des coordonnées barycentriques, et déterminer l'image par cette application de la droite de l'infini.

Indication. – On trouve l'ellipse de Steiner inscrite σ_{ABC} ! On pourra entre autres méthodes commencer par montrer que tout point de coordonnées barycentriques (x^2, y^2, z^2) , où $x + y + z = 0$, appartient à cette conique. On pourra aussi remarquer que la restriction de φ à la droite de l'infini n'est autre que la conjugaison isotomique par rapport au triangle médian du triangle (ABC) .

22.5. Autres exemples de faisceaux

Une conique générale écrite en coordonnées barycentriques relativement au triangle (ABC) dépend de six paramètres définis à un coefficient multiplicatif près. Ces paramètres ne peuvent être tous nuls. L'ensemble des coniques du plan affine s'identifie donc à un espace projectif de dimension 5.

Qu'est ce qu'un faisceau ? *Un faisceau de coniques est une droite projective de cet espace*, autrement dit un faisceau de coniques est un ensemble de coniques dont les équations sont de la forme $\lambda P + \mu Q$, où P et Q sont deux polynômes non nuls de degré ≤ 2 , qui sont non proportionnels, et où $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ dans \mathbb{K}^2 . La famille des coniques d'équations $P + \lambda Q$, où λ décrit \mathbb{K} , s'identifie à la famille précédente, à une conique près (à savoir la conique $Q = 0$ que l'on obtient formellement en pensant à $Q + \frac{1}{\lambda}P = 0$ avec $\lambda = \infty$).

Si l'une des coniques est non dégénérée, soit par exemple Q , on écrit le faisceau comme formé des coniques $P + \lambda Q = 0$ et l'on détermine celles d'entre elles qui sont dégénérées en écrivant que $\det(P + \lambda Q) = 0$, écriture équivalant à $\det(Q^{-1}P + \lambda I_3) = 0$, ce qui donne au plus trois valeurs possibles pour λ (à savoir les valeurs propres de $-Q^{-1}P$).

22.6. Remarque. Pour obtenir l'équation de la conique générique d'un faisceau \mathcal{F} , il suffira très souvent de déterminer les équations $q_1 = 0$ et $q_2 = 0$ de deux coniques particulières de \mathcal{F} (par exemple, grâce à une, ou, mieux, deux coniques dégénérées) et de combiner linéairement ces équations : la conique générique admet alors pour équation $\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 = 0$, avec la condition $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ ⁸⁶.

Ce principe engendre le plus souvent moins de calculs que celui qui consiste à écrire que l'équation générale d'une conique dépend d'un sextuplet de paramètres (à coefficient multiplicatif près) puis de traduire l'appartenance d'une conique au faisceau grâce à des relations linéaires sur les paramètres (en général, il en faut quatre).

Nous laissons en exercice facile la proposition suivante ; elle sera reprise plus en détail dans la section **22.43**.

22.7. Proposition

Soit \mathcal{F} un faisceau de coniques et A un point du plan ; on a alors l'alternative suivante.

- ▷ *Le point A admet les mêmes polaires par rapport à toutes les coniques de \mathcal{F} .*

⁸⁶Comme cela a été signalé, nous ne nous priverons pas d'écrire cette équation sous la forme $q_1 + \lambda q_2 = 0$, qui donne toutes les coniques, mis à part celle d'équation $q_1 = 0$.

- ▷ *Les polaires de A par rapport aux coniques de \mathcal{F} décrivent un faisceau (linéaire) de droites ; en particulier, il existe un point A' et un seul tel que A et A' soient conjugués par rapport à toutes les coniques du faisceau (ce point A' est celui par lequel passent toutes les polaires de A).*

Le calcul de l'exercice qui suit met en œuvre le recours à deux coniques particulières, ici toutes les deux dégénérées. Un coup d'œil sur la figure en page 280 est auparavant le bienvenu.

22.8. Exercice

On donne une base barycentrique A, B, C d'un plan affine \mathcal{E} ; on considère les points G, G_A, G_B, G_C , de coordonnées barycentriques $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ et $(1, 1, -1)$ respectivement, ainsi que le faisceau \mathcal{F} des coniques passant par ces quatre points.

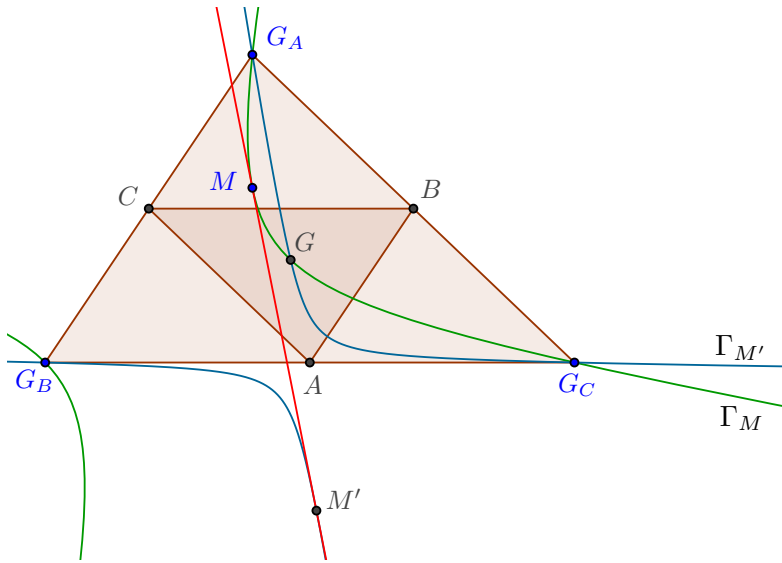
1. Montrer que l'équation barycentrique générale des coniques du faisceau \mathcal{F} est $\lambda(Y^2 - X^2) + \mu(Z^2 - X^2) = 0$, avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.
2. Expliquer comment l'on peut mettre cette équation sous la forme plus symétrique

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0, \quad \text{avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0) \text{ et } a + b + c = 0.$$

3. Soit une conique Γ_M non dégénérée de \mathcal{F} , passant par un point M de coordonnées barycentriques (X_0, Y_0, Z_0) ; montrer que la tangente T en M à Γ_M passe par l'inverse isotomique M' de M , relativement au triangle ABC . Voir figure ci-après.

Indications et éléments de solution. –

1. Une conique dégénérée de \mathcal{F} est la réunion des droites (GG_C) et $(G_A G_B)$; cette conique a donc pour équation $(Y - X) \times (Y + X) = 0$.
2. Il suffit de montrer que l'application linéaire qui au couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ associe $(-\lambda - \mu, \lambda, \mu) \in \mathbb{K}^3$ est une bijection de \mathbb{K}^2 sur l'hyperplan d'équation $a + b + c = 0$.
3. La conique de \mathcal{F} passant par M est définie par un triplet (a, b, c) non nul tel que $a + b + c = 0$ et $aX_0^2 + bY_0^2 + cZ_0^2 = 0$.



De la section 7, il suit que la tangente au point M admet pour équation barycentrique $aX_0X + bY_0Y + cZ_0Z = 0$. Il ne reste plus qu'à vérifier que le point de coordonnées barycentriques (YZ, ZX, XY) satisfait cette équation.

22.9. Remarque. Bien entendu, si l'on considère la conique Γ' du faisceau qui passe par M' , elle admet la même tangente en M' puisque celle-ci passe par l'isotomique de M' , qui est M .

22.10. Faisceau générique et conique des neuf points

Deux coniques projectives non dégénérées distinctes se rencontrent en au plus quatre points (voir par exemple au VII-5.4) ; lorsque le corps de base n'est pas algébriquement clos, le nombre de cas à envisager devient rédhibitoire et, de ce fait, nous nous limiterons à des paires de coniques admettant effectivement quatre points d'intersection distincts, ou, marginalement, trois points (avec contact en l'un d'eux) ou deux points (avec contact en chacun d'eux).

Nous appelons *faisceau générique* tout ensemble de coniques passant par quatre points trois à trois non alignés donnés ; pour commencer, prenons par exemple l'ensemble des coniques d'équations $pYZ + qZX + rXY = 0$, avec $2p - 3q + 5r = 0$. On a là bien un faisceau linéaire, et c'est un faisceau de coniques qui passent par quatre points, en l'occurrence les points

de base et le point $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5})$, comme on le voit manifestement en écrivant l'équation d'une telle conique sous la forme $\frac{p}{X} + \frac{q}{Y} + \frac{r}{Z} = 0$. Cet exemple relève de la sous-section précédente.

Énonçons à présent le résultat essentiel de cette section ; les coordonnées barycentriques font toujours référence à un triangle ABC (à distance finie) d'un plan projectif Π .

22.11. Proposition

1. Soit des scalaires a, b, c tous non nuls et soit \mathcal{F} le faisceau des coniques d'équation barycentrique $pYZ + qZX + rXY = 0$, où $ap + bq + cr = 0$. Le lieu des pôles d'une droite fixée Δ de Π relativement aux coniques du faisceau est une conique.
2. En particulier, les centres des coniques de \mathcal{F} appartiennent à une même conique Γ ; si les quatre points de base sont à distance finie, alors Γ est une conique à centre, centrée au point isobarycentre des points de base.

Démonstration.—

1. Choisissons deux points sur Δ , éventuellement à l'infini : $M_1(X_1, Y_1, Z_1)$ et $M_2(X_2, Y_2, Z_2)$. Si \mathcal{C} est une conique du faisceau \mathcal{F} , le pôle de la droite Δ par rapport à \mathcal{C} existe *en général*, et est alors l'intersection des polaires des points M_1 et M_2 par rapport à \mathcal{C} ; nous réglerons les cas particuliers tout à la fin.

Les polaires D_i des points M_i , où $i \in \{1, 2\}$, ont pour équation

$$(rY_i + qZ_i)X + (rX_i + pZ_i)Y + (qX_i + pY_i)Z = 0,$$

qui dépendent chacune linéairement de (p, q, r) ; puisque le triplet (p, q, r) décrit la droite projective de \mathbb{K}^3 d'équation $aP + bQ + cR = 0$, cela montre que D_i décrit un faisceau \mathcal{D}_i de droites⁸⁷ et que les faisceaux \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont homographiquement liés.

Il résulte alors du 14.6 que le point d'intersection des droites D_1 et de D_2 décrit une conique projective Γ ; il s'agit seulement de vérifier que l'on n'a jamais $D_1 = D_2$: or, c'est bien le cas puisque $M_1 \neq M_2$.

2. Il suffit d'appliquer le 1 au cas où Δ est la droite de l'infini ! À noter que si la conique \mathcal{C} est une parabole, elle est tangente à la droite de l'infini et son centre est le point de contact. \square

Lorsque Δ est la droite de l'infini, la conique Γ est habituellement nommée la *conique des neuf points*, ou *des neuf centres*, car elle passe par les points suivants, en général distincts.

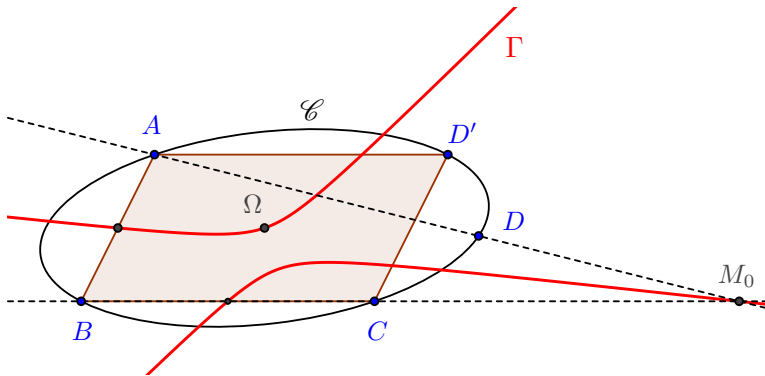
⁸⁷On retiendra que les polaires d'un même point par rapport aux coniques d'un faisceau \mathcal{F} passent toutes par le même point.

1. Les six milieux des segments d'extrémités les points de base, qui sont, avec nos notations, les points A, B, C ainsi que le point $D(1/a, 1/b, 1/c)$. En effet, la conique \mathcal{C}_0 définie par ces quatre points ainsi que par le point $D'(1, -1, 1)$, il est tel que $(ABCD')$ soit un parallélogramme, admet pour centre le milieu Ω de AC : les cordes AB et CD' de \mathcal{C}_0 sont parallèles, de sorte que le centre est sur la droite joignant les milieux de $[AB]$ et de $[CD']$ et de même sur la droite joignant les milieux de $[AD']$ et de $[BC]$.

À noter que, si D est à l'infini, il ne subsiste que trois milieux parmi ces six-là.

2. Les trois points d'intersection des paires de droites joignant les quatre points A, B, C et D deux à deux ; les réunions respectives de ces paires de droites sont en effet des coniques dégénérées du faisceau.

Le dessin qui suit montre la conique \mathcal{C} ayant pour centre le milieu Ω de $[AC]$. Elle passe par D' tel que $(ABCD')$ soit un parallélogramme. La conique des neuf points Γ passe par Ω , mais nous avons aussi placé le milieu de $[AB]$ ainsi que le point M_0 à l'intersection de (AD) et de (BC) .



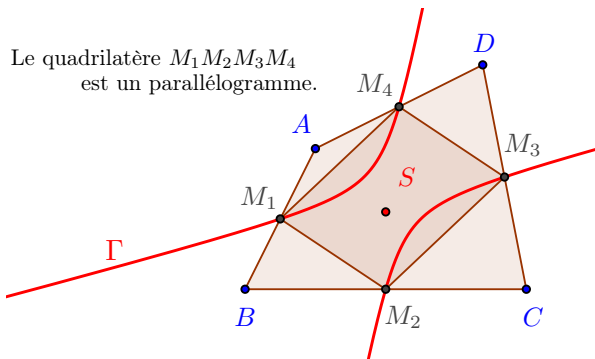
Il se peut toutefois que, soit l'une des deux droites D_i n'existe pas (parce que les trois coefficients $rY_i + qZ_i$, etc., sont nuls), soit les droites D_1 et D_2 soient confondues. Dans les deux cas, cela revient à dire qu'il existe un point $M(x, y, z) \in \Delta$ et (p, q, r) non tous nuls tels que

$$ry + qz = rx + pz = qx + py = 0 \quad \text{et} \quad ap + bq + cr = 0.$$

Montrons que cela se produit si, et seulement si, la droite Δ passe par l'un des points d'intersection tels que $(AB) \cap (CD)$, etc. En effet, puisqu'une forme quadratique non dégénérée met en bijection l'espace vectoriel et son dual, il suffit de se limiter au cas où \mathcal{C} est dégénérée, c'est-à-dire où $pqr = 0$. Nous supposons par exemple que $r = 0$; la conique \mathcal{C} admet alors une équation de la forme $pYZ + qZX = 0$ et est réunion des droites (AB)

et (CD) . On vérifie facilement que le cas exceptionnel se produit seulement en le point $M_0(1/a, 1/b, 0)$, point d'intersection de ces deux droites.

Il reste enfin à envisager la position du centre S de Γ lorsque le point D est également à distance finie. Nous savons que Γ passe par les milieux des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$; or, ces quatre milieux forment un parallélogramme, lequel est inscrit dans Γ .



La conique des neuf points Γ admet donc un centre, qui est le centre de ce parallélogramme, c'est-à-dire l'isobarycentre des quatre points A, B, C, D .

Par exemple, si l'on se donne un triangle (ABC) non rectangle, dans un plan affine euclidien, alors l'orthocentre H est un point distinct des trois autres et toutes les coniques passant par ces quatre points sont des hyperboles équilatères. Le lieu des centres de ces hyperboles est le cercle d'Euler du triangle et le centre de ce cercle, est l'isobarycentre du système A, B, C, H ; c'est donc également le barycentre du système massique $((G; 3), (H; 1))$, mais c'est aussi le milieu de $[OH]$, où O désigne le centre du cercle circonscrit au triangle (ABC) .

22.12. Remarque

Supposons que les quatre points A, B, C, D forment un parallélogramme; la droite de l'infini passe alors par les points d'intersection $(AB) \cap (CD)$ et $(AD) \cap (BC)$, et met donc doublement en défaut les hypothèses précédentes.

Toutefois, si Ω est le centre du parallélogramme, toute conique non dégénérée du faisceau admet pour centre Ω , ainsi que la conique dégénérée $(AC) \cup (BD)$. En revanche, les deux autres coniques dégénérées sont réunions de deux droites parallèles et, dans ce cas, leurs centres de symétrie décrivent respectivement une droite tout entière passant par Ω . Le lecteur pourra vérifier que les *neuf* centres promis sont (malgré tout) bien répartis sur ces deux droites, à ceci près qu'il n'y en a que sept, le point Ω étant obtenu trois fois.

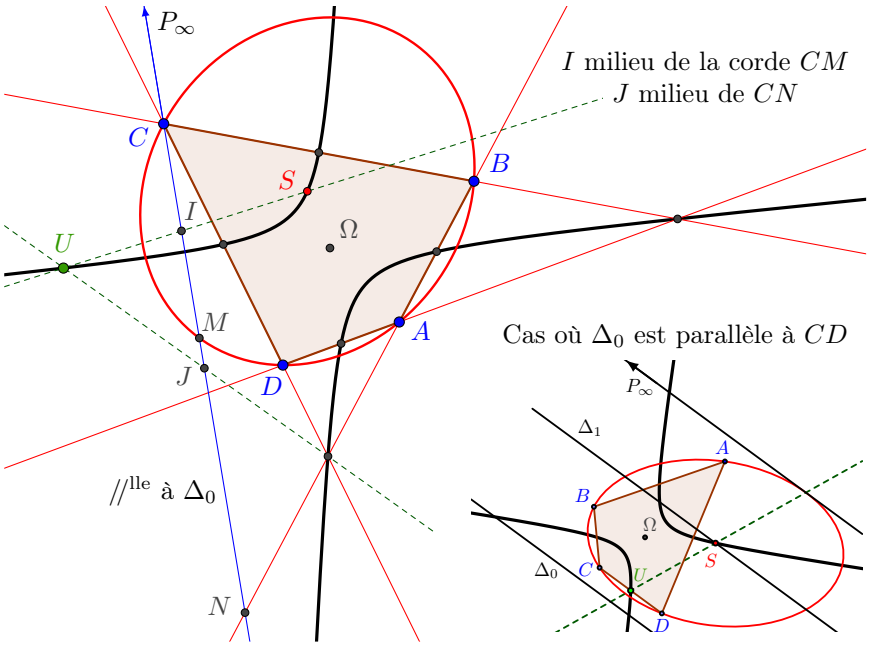
22.13. Exercice

On se donne un faisceau \mathcal{F} de coniques à quatre points de base A, B, C, D et une direction de droites Δ_0 . Montrer que les diamètres des coniques de \mathcal{F} qui sont conjugués à cette direction passent tous par un même point U , situé d'ailleurs sur la conique des neuf points associée à \mathcal{F} .

Indication. – (D'après Poulbot)

Utiliser l'assertion énoncée en note en bas de la page 293. Les diamètres concernés sont en effet les polaires du point à l'infini P_∞ de la direction donnée : ils passent tous par le même point U . Il reste à montrer que U est sur la conique des neuf points ou, ce qui revient au même, que U est centre d'une conique du faisceau. Il suffit pour cela de remarquer que les polaires de U par rapport aux coniques du faisceau sont les droites passant par P_∞ , et l'une d'elles est la droite de l'infini ; la conique correspondante admet le point U comme centre !

Les deux figures regroupées qui suivent distinguent le cas où la direction Δ_0 est générale du cas où elle est parallèle à l'un ou l'autre des côtés du quadrilatère $ABCD$.



22.14. Triangles autopolaires communs

Nous cueillons ici les fruits de la section I-8, page 71 et suivante, en faisant le lien entre l'*orthogonalité* au sens d'une forme bilinéaire symétrique et la notion d'*autopolarité* d'un triangle d'un plan projectif Π relativement à une conique⁸⁸.

Nous disons qu'un triangle (ABC) est autopolaire par rapport à une conique \mathcal{C} si chacun de ses côtés est la polaire, relativement à \mathcal{C} , du sommet qui lui est opposé. Si aucun de ces trois points n'est à l'infini, cela revient donc à dire que l'équation de la conique dans la base barycentrique définie par les sommets A , B et C est de la forme

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 0, \quad \text{où } (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0),$$

ou encore que la base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ du vectorialisé \mathcal{E}^v est q -orthogonale, où q est une forme quadratique dont le cône définit la conique \mathcal{C} .

L'existence d'un triangle autopolaire relativement à une conique est banale, puisqu'elle découle de l'existence d'une base q -orthogonale; en revanche, le cas d'un triangle autopolaire commun à deux coniques mérite le détour⁸⁹. Le cas général nous obligerait à examiner les méandres des faisceaux de coniques sur une extension finie du corps \mathbb{K} , aussi nous limiterons-nous sagement aux deux cas qui suivent.

22.15. Proposition. *Si deux coniques \mathcal{C} et \mathcal{C}' du plan projectif Π ont en commun quatre points⁹⁰, alors elles admettent un triangle autopolaire commun.*

Démonstration.—

En effet, soit A, B, C, D , ces quatre points; il suffit de construire un triangle autopolaire relatif à *toutes* les coniques du faisceau à points de base A, B, C, D . Soit deux formes quadratiques q et q' , avec q non dégénérée, dont les cônes définissent chacun une conique du faisceau, et soit \mathfrak{B} et \mathfrak{B}' les formes bilinéaires symétriques associées.

Il suffit de montrer que l'endomorphisme ψ de \mathcal{E}^v construit comme au I-8 est diagonalisable; or, un scalaire λ est valeur propre de ψ si, et seulement si, la forme quadratique $q' - \lambda q$ est dégénérée. Puisqu'il existe trois coniques dégénérées passant par nos quatre points, par exemple $(AB) \cup (CD)$, il

⁸⁸Le lecteur peu familier avec la notion de triangle autopolaire peut se reporter à la section V-24, où l'on en parle sur un ton tout frais.

⁸⁹Jusqu'à la fin du XIX^e siècle, on a véhiculé l'erreur selon laquelle deux coniques quelconques avaient toujours un tel triangle; renonçons à jeter la pierre, car la plupart des arguments *heuristiques* laissaient prévoir cette existence! D'ailleurs, quoi qu'il en soit, il n'est pas recommandé de jeter des pierres.

⁹⁰Il n'y a bien sûr pas d'obstacle à se restreindre à des points « à distance finie ».

existe au moins trois λ satisfaisant cette condition⁹¹, de sorte que ψ possède au moins trois valeurs propres distinctes.

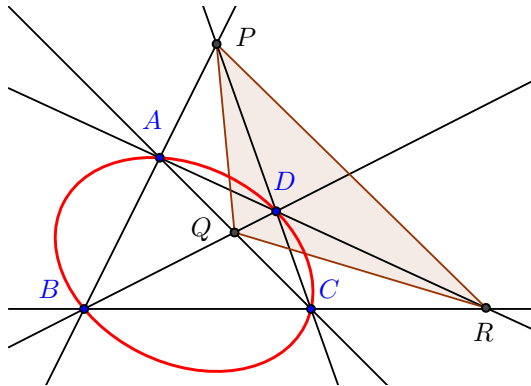
Que demander de plus ? □

22.16. Remarque

Vu la remarque faite au I-8, du fait que ψ admet trois valeurs propres distinctes suit que q et q' possèdent une seule base orthogonale commune, à l'ordre près et à des scalaires multiplicatifs près. En d'autres termes, les coniques du faisceau admettent un seul triangle autopolaire commun, à l'ordre près.

Alors, lequel ? Devinette : quel est ce triplet de points privilégiés du plan Π ? Eh oui, il s'agit des trois centres des coniques dégénérées du faisceau. Petit exercice. . .

La figure qui suit n'a pas besoin de commentaires supplémentaires.



Relevons en passant que l'on peut garder la figure ci-dessus pour illustrer le cas où l'on suppose q' dégénérée : il suffit à cet effet de prendre pour conique Γ' la réunion des deux droites (AB) et (CD) .

22.17. Exercice

On suppose que le triangle (PQR) , choisi en tant que base barycentrique, est le triangle autopolaire commun aux coniques d'un faisceau linéaire \mathcal{F} ; on distingue parmi les coniques de ce faisceau deux coniques distinctes, d'équations barycentriques respectives

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0 \quad \text{et} \quad a'X^2 + b'Y^2 + c'Z^2 = 0.$$

Ces équations sont ainsi non proportionnelles puisque les coniques considérées sont *distinctes*.

⁹¹Le lecteur est invité ici à revoir la remarque 12.6, en page 236.

Montrer que le lieu des centres des coniques de \mathcal{F} a pour équation barycentrique

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ YZ & ZX & XY \end{vmatrix} = 0.$$

Indication. On pourra écrire qu'un point appartient au lieu considéré si, et seulement si, pour au moins un scalaire λ , la polaire de ce point par rapport à la conique d'équation barycentrique

$$(a + \lambda a')X^2 + (b + \lambda b')Y^2 + (c + \lambda c')Z^2 = 0$$

est la droite de l'infini, d'équation barycentrique $X + Y + Z = 0$.

22.18. Remarque. On notera que le lieu obtenu contient comme prévu les points P, Q, R .

22.19. Proposition. *Si deux coniques \mathcal{C} et \mathcal{C}' non dégénérées du plan projectif Π ont en commun deux points, en lesquels elles sont tangentes, alors elles admettent un triangle autopolaire commun.*

Démonstration. Nous adaptons la démonstration précédente à ce cas dégénéré, mais sans entrer dans tous les détails; nous désignons par A, B ces deux points et choisissons deux formes quadratiques q et q' dont les cônes définissent respectivement \mathcal{C} et \mathcal{C}' , et notons \mathfrak{B} et \mathfrak{B}' les formes bilinéaires symétriques associées. Puisque q (au même titre que q') est non dégénérée, il suffit ici encore de montrer que ψ est diagonalisable; désignons par T_A et T_B les tangentes en A et B communes aux deux coniques, par q_1 une forme quadratique définissant la conique dégénérée $T_A \cup T_B$ et par q_2 une forme quadratique définissant la conique dégénérée $(AB) \cup (AB)$, droite double. Remarquons que ces deux coniques sont distinctes, car une même droite ne peut être tangente à une conique en deux points distincts.

On peut montrer que q_1 et q_2 sont combinaisons linéaires de q et q' et, bien sûr, que q_2 est de rang 1 : nous en faisons un exercice que l'on trouvera plus bas, avec des indications. Ainsi, λ est valeur propre de l'endomorphisme ψ si, et seulement si, la forme quadratique $q' - \lambda q$ est dégénérée, ce qui confère à ψ deux valeurs propres seulement : on a un λ_1 tel que $q' - \lambda_1 q = q_1$ et un λ_2 tel que $q' - \lambda_2 q = q_2$. Toutefois, le rang de $\psi - \lambda_2 \text{Id}_{\mathcal{E}^v}$ est 1, et cela suffit pour montrer que ψ reste diagonalisable. \square

22.20. Remarque

La raison qui sous-tend ce que nous n'avons fait qu'esquisser *supra* est la suivante : les coniques tangentes en les points A et à B aux droites T_A et T_B respectivement forment un faisceau dont les quatre points de base

seraient $A, B, C = A$ et $D = B$; il faut alors accepter que les deux droites (AC) et (BD) , qui n'ont plus de légitimité *stricto sensu*, doivent être remplacées par les tangentes T_A et T_B , exactement comme lorsque l'on accepte qu'une tangente à une conique la coupe en deux points *confondus*.

Ainsi, les coniques dégénérées sont $(AC) \cup (BD) = T_A \cup T_B$, $(AB) \cup (CD)$ et $(AD) \cup (BC)$, ces deux dernières étant encore $(AB) \cup (AB)$, ce qui retire tout caractère surnaturel à notre construction.

22.21. Exercice

On peut toujours supposer que les tangentes T_A et T_B se coupent en un point P , à distance finie. Montrer alors que les coniques \mathcal{C} et \mathcal{C}' ont des équations barycentriques (relatives au triangle ABP) de la forme

$$Z^2 + 2aXY \stackrel{(1)}{=} 0 \quad \text{et} \quad Z^2 + 2a'XY \stackrel{(1')}{=} 0.$$

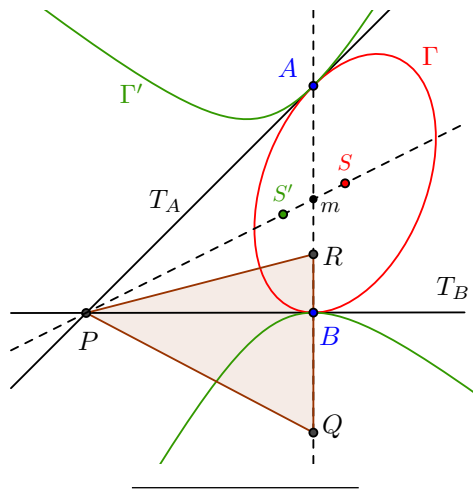
En déduire les résultats attendus en faisant des combinaisons linéaires bien choisies de ces équations.

Court-circuiter ensuite toute la démonstration en construisant directement une base orthogonale commune aux formes quadratiques membres de gauche de (1) et de (1').

22.22. Remarques

1. Court-circuiter une preuve comme cela est suggéré au lecteur est à la fois souhaitable et peu recommandable; en effet, pour laborieuse que soit la preuve par les valeurs propres de ψ , elle n'en est pas moins bien plus instructive que la construction directe.
2. Cette fois, il n'est plus question d'unicité pour le triangle autopolaire commun! On pourra vérifier que, sachant que le point P est à l'intersection de T_A et de T_B , on obtient un triangle autopolaire PQR en choisissant Q *quelconque* sur la droite (AB) , puis R sur (AB) tel que la division (A, B, Q, R) soit harmonique.
3. L'existence d'un triangle autopolaire commun à deux coniques (ou à toutes les coniques d'un faisceau) possède les mêmes avantages que l'existence d'une base orthogonale commune à plusieurs formes bilinéaires symétriques, en particulier celui de simplifier les calculs!

Par exemple, le lecteur pourra, dans le cas de deux coniques se coupant en quatre points, retrouver le fait que le lieu des centres des coniques du faisceau qu'elles engendrent est une conique (passant entre autres par les centres des trois coniques dégénérées) et que, dans celui de deux coniques bitangentes, ce lieu est la réunion de la droite (AB) et d'une droite passant par P .



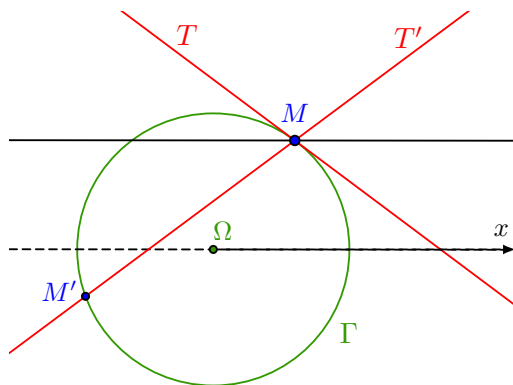
22.23. Un contre-exemple

On ne saurait être complet si l'on ne donnait pas l'exemple d'un faisceau de coniques *sans* triangle autopolaire commun. Un tel exemple se mérite : il faut avoir traité l'exercice I-8.3 ou, du moins, en admettre les résultats.

Par commodité, nous nous plaçons dans le cadre euclidien ; cela n'est pas indispensable pour le contre-exemple en tant que tel, mais ça l'est pour l'intervention du cercle osculateur.

Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(e_1, e_2; \Omega)$, considérons le cercle Γ d'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ et, pour un réel ϑ donné, la conique dégénérée Γ' d'équation

$$(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - 1)(x \cos \vartheta - y \sin \vartheta - \cos 2\vartheta) = 0.$$



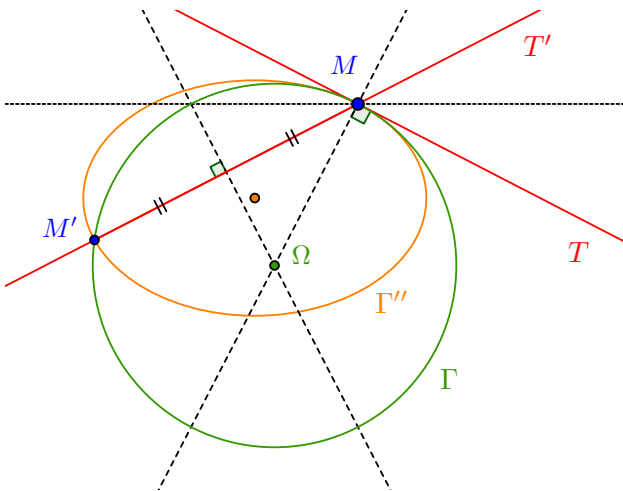
On vérifiera aisément que Γ' est la réunion de la tangente T au cercle Γ en le point $M(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ et de la droite T' passant par ce point et symétrique en direction par rapport à Ωx .

Des résultats de l'exercice cité découle que le faisceau de coniques contenant Γ et Γ' n'admet pas de triangle autopolaire commun.

L'interprétation géométrique explique plus de choses que le simple calcul de l'exercice qui, lui, donnait l'impression que le résultat tombe tout droit du ciel. La droite T coupe Γ en le point M double, alors que T' la coupe en les points M et M' ; au total, les deux coniques se coupent en M triple et en M' . Ainsi, le faisceau ne contient qu'une conique dégénérée, c'est-à-dire Γ' , et il s'ensuit que ψ n'admet qu'une valeur propre, d'ailleurs nulle; puisque ψ n'est pas nul, cet endomorphisme n'est pas diagonalisable.

Au reste, la conique générique Γ'' du faisceau coupe le cercle en le point M triple; c'est mieux que le simple contact : les coniques sont osculatrices, ce que confirmerait un calcul de Géométrie différentielle, de sorte que le centre Ω du cercle osculateur en M à Γ'' est aussi le *centre de courbure* en ce point; à ce titre, il appartient à la droite (ΩM) , qui est la normale en M à la conique Γ'' , et se situe du même côté de la tangente T que les points de Γ'' voisins de M .

Remarquons aussi que, dans l'équation cartésienne de Γ'' , le terme en xy a un coefficient nul; ainsi, les directions des axes de toutes les coniques sont celles des axes du repère.



Le contact entre Γ et Γ'' au point M est en général d'ordre 3, ce qui explique que le cercle traverse localement la conique; toutefois, si ϑ est un multiple de $\pi/2$, le point M est un sommet de Γ'' et l'on a $M' = M$ et $T' = T$; il y a cette fois sur-osculation, c'est-à-dire contact d'ordre 4.

22.24. Faisceau de coniques tangentes et conique des cinq points

Il existe de même encore d'autres types de faisceaux, que l'on obtient en omettant une parmi cinq conditions nécessaires pour définir uniquement une conique. Un tel faisceau est donné à présent au moyen de deux points B et C et d'une droite Δ pointée au point A : il s'agit plus précisément du faisceau des coniques passant par B et C et tangentes à la droite Δ au point A . Un tel faisceau sera dit *faisceau de coniques tangentes* ou mieux *faisceau ponctuel avec contact*.

Prenons pour Δ la droite $pY + qZ = 0$, avec p et q fixés. On a deux coniques dégénérées particulières qui semblent faire partie de ce faisceau : il s'agit de la conique $X(pY + qZ) = 0$, réunion de la droite Δ et de la droite (BC) , et de la conique $YZ = 0$ formée des deux droites (AB) et (AC) . L'ensemble des coniques d'équations $YZ + \lambda X(pY + qZ) = 0$, ou encore $YZ + \lambda pXY + \lambda qXZ = 0$ est bien un faisceau linéaire de coniques. La tangente en A à une telle conique consiste à écrire le gradient en $A = (1, 0, 0)$ et c'est bien la droite $pY + qZ = 0$. Et l'on voit que ce faisceau n'a que deux coniques dégénérées, à savoir celles dont on est parti.

L'ensemble des centres des coniques de ce faisceau est encore une conique, qui est soit une ellipse soit une hyperbole. Il s'agit de la conique qui passe par les centres A et Δ_A des deux coniques dégénérées du faisceau, mais également par les milieux G_A , G_B et G_C des trois côtés du triangle de base. *Le centre de cette conique est le centre du parallélogramme $(AG_A G_B G_C)$, que nous nommons Ω .*

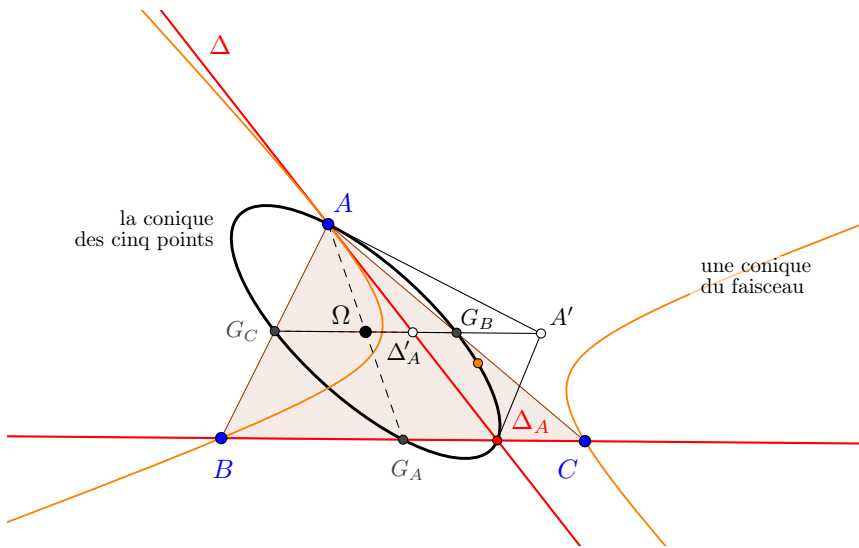
On a perdu par rapport à la situation précédente, car on est passé d'une conique des neuf points à une conique des cinq points, mais là, on compense avec les tangentes en ces cinq points. Les tangentes en les cinq points remarquables de cette conique sont en effet faciles à déterminer. La clé est le résultat suivant.

22.25. Proposition. *Les directions de Δ et de (BC) sont conjuguées par rapport à la conique des cinq points.*

Cette chose est évidente, car $G_B G_C$ est un diamètre, qui passe par le milieu Δ'_A de $A\Delta_A$.

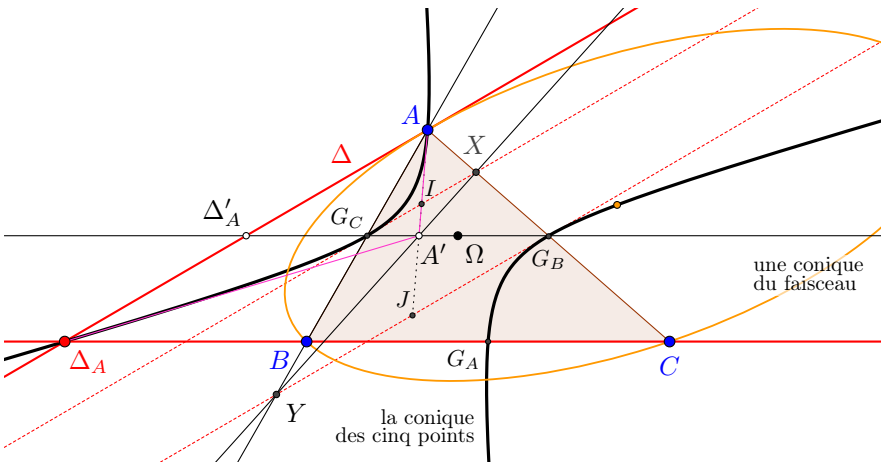
Quand la conique des cinq points⁹² est une ellipse, toutes les coniques du faisceau sont des hyperboles (on s'en souviendra avec l'exemple des coniques de l'exemple des hyperboles du faisceau rencontré en 22.1).

⁹²Cette conique est souvent appelée aussi *conique des cinq centres* du faisceau de nos coniques tangentes.



Quand la conique des cinq points est une hyperbole, deux cas se présentent. Les coniques du faisceau sont des hyperboles ou des ellipses suivant que le centre est sur l'une ou l'autre des deux branches de l'hyperbole.

Il y a deux paraboles dans le faisceau si, et seulement si, la conique des cinq points est une hyperbole. C'est le cas où le point Δ_A est en dehors du segment BC . Les directions d'axe de ces paraboles donnent alors les directions asymptotiques de la conique des cinq points.



22.26. Proposition

On détermine comme il suit les tangentes à la conique des cinq centres en ces cinq points⁹³.

Les tangentes en G_B et G_C sont parallèles à la droite Δ .

Le pôle $\delta := A'$ de la droite Δ est sur le diamètre $G_B G_C$ et la droite AA' coupe les parallèles $G_C X$ et $G_B Y$ à Δ en leurs milieux respectifs I et J ⁹⁴.

De plus, les points X , Y et A' sont alignés⁹⁵.

Cela découle des considérations rencontrées à l'occasion en l'exercice 19.4, mais aussi du résultat classique donné de l'exercice 12.2, appliqué au triangle inscrit $AG_A G_B$.

On indique dans l'exercice V-22.28, qui suit, comment construire les asymptotes de la conique des cinq points quand c'est une hyperbole, ainsi que les deux paraboles du faisceau. Et, signalons avant de clore ce paragraphe que ce faisceau est formé de coniques toutes tangentes entre elles ; il peut être engendré par deux coniques qui sont tangentes.

22.27. Remarques

1. En s'inspirant des techniques de la section précédente, on établit sans peine que deux coniques tangentes en un point et admettant en tout trois points communs n'ont jamais de triangle autopolaire commun.
2. La conique des cinq points comme celle des neuf points ne peut être une parabole, car cela voudrait dire qu'il existe dans le faisceau une unique parabole, mais l'on sait que dans l'un ou l'autre de ces types de faisceaux, il y a zéro ou deux paraboles !
3. Dessiner la conique des cinq points en premier (ce qui est facile avec Cabri, car on en a cinq points) fournit par le choix libre d'un centre S dessus autant de coniques que l'on veut du faisceau. Une difficulté surgit cependant lorsque le centre choisi arrive par exemple en G_A (voir section 22.29, qui vient ci-après) !

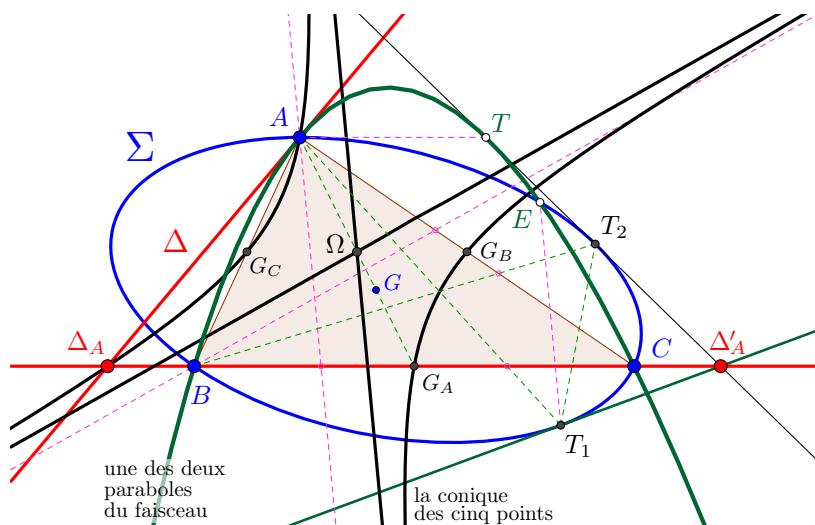
22.28. Exercice

La figure ci-après détaille comment construire les asymptotes de l'hyperbole des cinq points et les deux paraboles du faisceau.

⁹³Cela console de la perte de quatre points en regard de la conique des neuf points.

⁹⁴Remarquer que le faisceau des droites $A\Delta_A$, AG_C , AA' et AG_B est harmonique.

⁹⁵On dispose ainsi de deux manières pour déterminer le point δ , et donc les tangentes δA et $\delta\Delta_A$: on détermine les points X et Y et l'on joint XY , ou bien on se contente de X par exemple et l'on trace la droite AI , avec I milieu de $G_C X$.



Les droites $\Delta'_A T_1$ et $\Delta'_A T_2$, où Δ'_A est le symétrique de Δ_A par rapport à G_A , sont les inverses isotomiques de nos paraboles, et sont comme il se doit les tangentes issues de Δ'_A à la conique de Steiner $\Sigma = \Sigma_{ABC}$ (voir page 278). Les inverses isotomiques des points T_1 et T_2 donnent les directions asymptotiques escomptées, c'est-à-dire aussi les directions des axes de ces paraboles. Les points T et E qui permettent de construire notre parabole verte s'obtiennent comme suit. Le point E de Σ est tel que la droite $T_1 E$ dirige l'axe (voir figure en page 280), et T est l'intersection de $\Delta'_A T_2$ avec la tangente en A à Σ (appliquer la proposition 23.11, avec A et D confondus).

22.29. Faisceau de coniques bitangentes

Après avoir examiné le cas de deux coniques sécantes en quatre points et celui de coniques tangentes, on examine à présent le cas de deux coniques bitangentes. Autrement dit, on s'occupe du faisceau de coniques tangentes à deux droites données en deux de leurs points donnés.

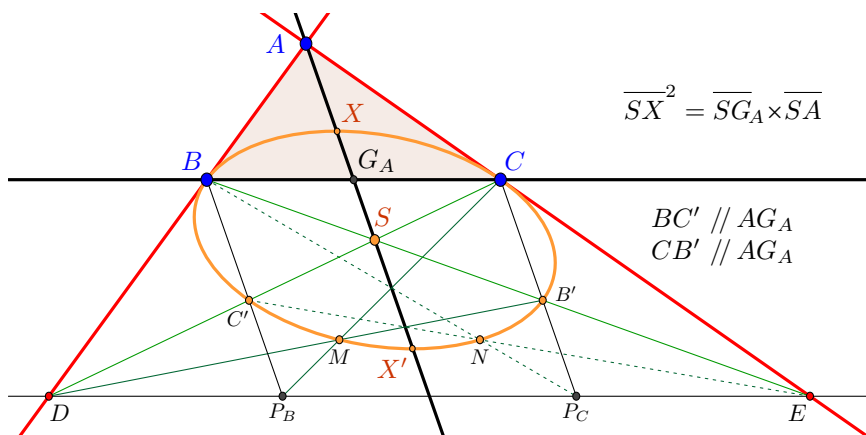
Le lieu de leurs centres devient une conique dégénérée! Prenons donc le faisceau des coniques bitangentes aux droites (AB) et (AC) en B et C . L'équation de la conique générale s'écrit donc⁹⁶ : $X^2 + \lambda YZ = 0$.

⁹⁶L'équation qui suit est affine en λ — rien d'étonnant à cela ; toutefois, l'équation tangentielle de cette conique est $\lambda U^2 + 4VW = 0$, elle aussi affine en λ . Cette double propriété n'est pas générale : dans le cas d'un faisceau à quatre points de base, l'équation tangentielle est de degré 2 en λ .

Le centre d'une telle conique est donné par $(\frac{\lambda}{2}, 1, 1)$, lequel vecteur est bien q -orthogonal au plan $X+Y+Z=0$, où $q(X, Y, Z) = X^2 + \lambda YZ$. Le lieu des centres de ces coniques est donc la droite (AG_A) , où G_A est le milieu de BC , à laquelle on adjoint la droite (BC) ⁹⁷. Nous avons déjà rencontré, en les exercices 9.1 et 20.8, une conique bien sympathique de ce faisceau, en l'occurrence celle qui passe par G .

On a par ailleurs deux coniques dégénérées, à savoir $X^2 = 0$ et $YZ = 0$. Pour dessiner des coniques de ce faisceau, on pourra regarder les figures qui suivent, où l'on a choisi au départ le centre S sur la droite (AG_A) . En faisant glisser le point S le long de cette droite, on voit sur les dessins successifs ci-après la nature de la conique correspondante.

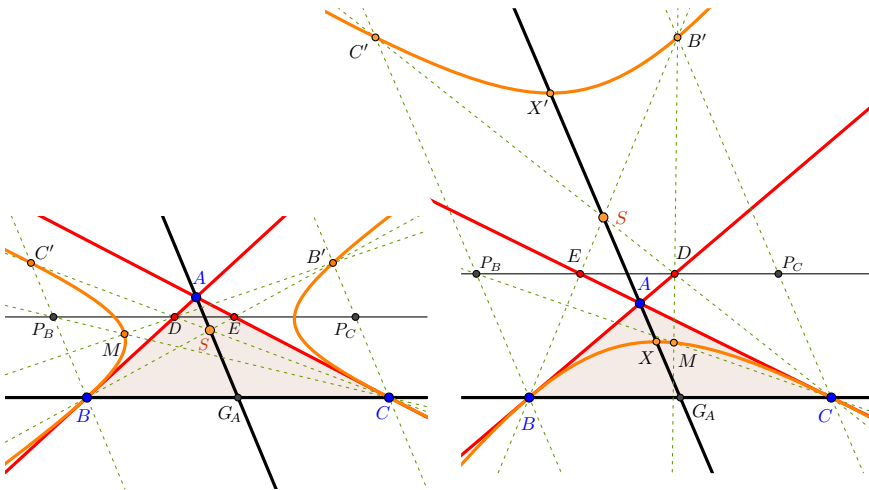
▷ Quand S glisse le long de cette droite en remontant sur la figure de l'infini vers le point G_A , la conique correspondante est une ellipse, qui dégénère en la droite double (BC) lorsque S arrive en G_A .



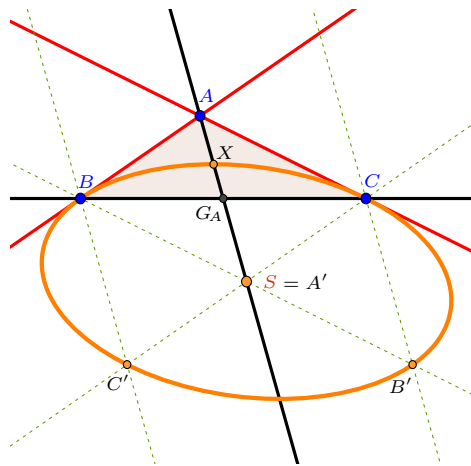
▷ Cette conique devient et reste une hyperbole lorsque S remonte vers A , pour dégénérer en la conique singulière (AB, AC) lorsque S arrive en A .

▷ Elle redevient et reste une hyperbole d'un aspect différent quand S glisse à travers A et va vers l'infini. Elle redevient ellipse une fois qu'elle est passée par le cas de la parabole, lequel correspond au point S à l'infini sur la droite AG_A .

⁹⁷La droite double (BC) est une conique dégénérée du faisceau, qui a un centre en chacun de ses points.



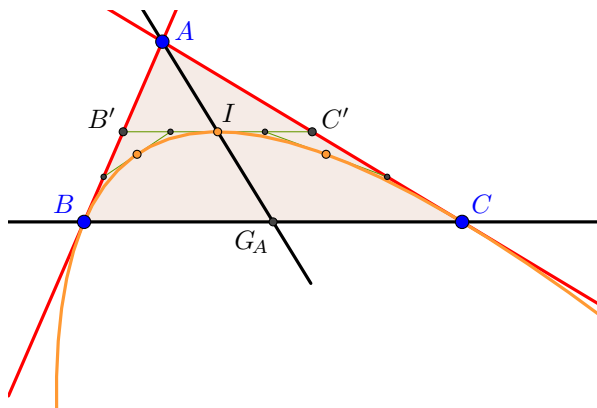
Remarque. La construction aux traits verts donnée sur la page précédente s'écroule quand le point S coïncide avec le symétrique A' de A par rapport à G_A , auquel cas le point E va à l'infini. La conique recherchée existe évidemment encore, et le mystérieux point X de la figure précédente vient à notre secours à cet effet : le conjugué harmonique A' par rapport à G_A est notre cinquième point. Le dessin est indiqué en haut à gauche dans la figure ci-dessus.



▷ Il nous reste à construire point par point la parabole de ce faisceau⁹⁸, c'est-à-dire la vraie, celle qui n'est pas une droite double. L'idée repose sur un argument simple, que nous indiquons ci-après⁹⁹.

⁹⁸Rappelons que cinq points suffisent à un logiciel de Géométrie dynamique pour le tracé d'une conique, et l'on en donne déjà deux ; cinq tangentes suffisent aussi, mais en général au prix d'une macro.

⁹⁹Un autre argument est donné dans l'exercice 22.30, qui suit.



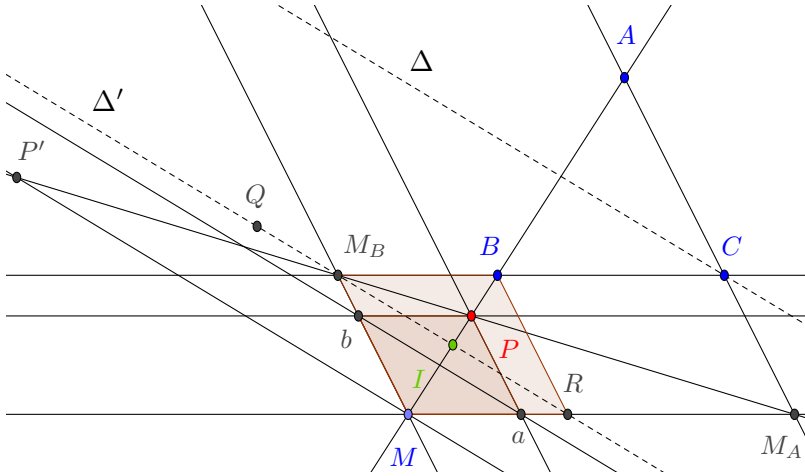
La polaire de A est la droite (BC) . De plus, la droite AG_A donne la direction de l'axe, ce qui fait que le conjugué harmonique de I par rapport à A et G_A est à l'infini, où le point I est au milieu de AG_A . On peut alors construire assez de points de la parabole grâce à cette idée, et c'est ainsi que le dessin ci-dessus a été exécuté.

22.30. Exercice

On donne une base barycentrique (A, B, C) ; il va s'agir de justifier deux constructions, l'une *tangentielle*, l'autre *ponctuelle*, de la parabole Γ tangente en A à (AC) et à B à (BC) . La construction qui suit fournit autant de tangentes à Γ que l'on voudra et, de même, autant de points de Γ que l'on voudra.

1. Montrer qu'une équation barycentrique de Γ est $Z^2 - 4XY = 0$ et que la droite Δ d'équation $uX + vY + wZ = 0$ est tangente à Γ si, et seulement si, $w^2 - uv = 0$ (équation tangentielle de Γ).
2. Soit le point M de coordonnées barycentriques $(t, 1 - t, 0)$, décrivant la droite (AB) . La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en M_A et la parallèle à (AC) passant par M coupe (BC) en M_B . Vérifier que les coordonnées barycentriques des points M_A et M_B sont respectivement $(t, 0, 1 - t)$ et $(0, 1 - t, t)$.
3. Par exemple, en en déterminant une équation barycentrique, montrer que la droite $(M_A M_B)$ est tangente à Γ .
4. La droite $(M_A M_B)$ rencontre la droite (AB) en un point P et touche la parabole Γ en un point P' .
Vérifier que ces deux points sont les barycentres du couple (M_A, M_B) avec les coefficients massiques respectifs $(-t, 1 - t)$ et $(t, 1 - t)$. En conclure que la division (M_A, M_B, P, P') est harmonique.

5. Nous terminons le présent exercice par deux constructions à la règle et au compas du point P' ; elles sont illustrées par la figure suivante, où les traits en pointillés indiquent des lignes auxiliaires servant à la construction.



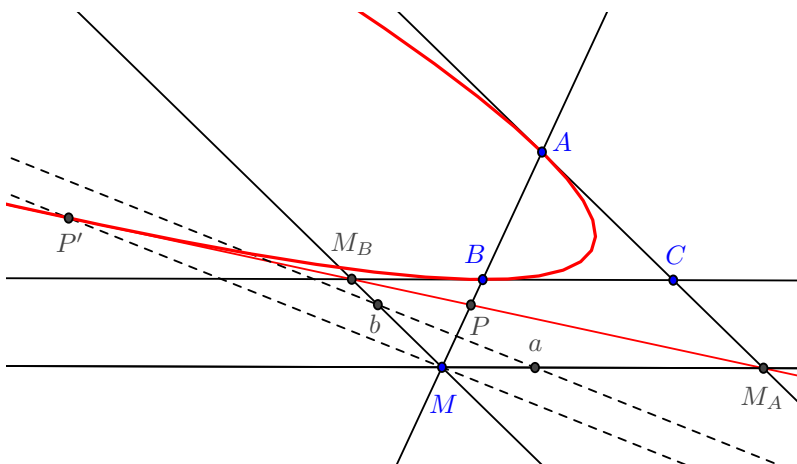
5a. Grâce à des tracés de parallèles, on construit sur $(M M_A)$ et $(M M_B)$ les points a et b tels que $M a P b$ soit un parallélogramme; le point P' est à présent le point d'intersection de $(M_A M_B)$ et de la parallèle à (ab) menée de M .

On pourra remarquer que la droite (ab) coupe le segment $[MP]$ en son milieu p et que, si p' désigne le point à l'infini de (ab) , la division (a, b, p, p') est harmonique.

5b. Montrer que la médiane Δ en C du triangle ABC et la médiane Δ' en M_B du triangle $M_B M B$ sont parallèles et leur direction commune est celle de l'axe de la parabole Γ . La seconde de ces médianes coupe donc le segment $[BP']$ en son milieu Q ; ainsi, le point P' est à l'intersection de $M_A M_B$ et de la parallèle menée de M à Δ .

En outre, la droite Δ' coupe $M M_A$ en un point R . Montrer que le quadrilatère $BR M M_B$ est un parallélogramme, et en déduire que les deux segments $[BM]$ et $[M_B R]$ ont même milieu I . En conclure enfin que la division (M_A, M_B, P, P') est harmonique.

Le croquis définitif est à contempler dans la figure qui suit.



22.31. Remarque. Les applications qui à M associent respectivement M_A et M_B sont homographiques (et même affines) de (AB) dans (AC) , respectivement (BC) ; cela nous fournit une application homographique φ (et même affine) de (AC) dans (BC) .

Or, de même que le point d'intersection des droites de deux faisceaux de droites liés homographiquement décrit une conique, voir le 14.6, la droite joignant les points de deux droites liés homographiquement *enveloppe* une conique, c'est-à-dire reste tangente à cette conique. Ce résultat est en quelque sorte le *dual* du précédent.

Lorsque le point M tend vers l'infini, la droite $(M_A M_B)$ tend vers la droite de l'infini, qui est donc tangente à Γ ; on ne s'étonnera pas que la conique obtenue soit une parabole.

Dans l'exercice qui suit, il s'agit de déterminer l'enveloppe des asymptotes des hyperboles d'un faisceau linéaire \mathcal{F} de coniques bitangentes; pour cela, nous supposons que le repère affine cartésien a été construit de telle sorte que la conique $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{F}$ qui dégénère en une droite double admette pour équation $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1)^2 = 0$, avec $ab \neq 0$, et que celle, notée \mathcal{C}_∞ , qui dégénère en la réunion de deux droites ait pour équation $xy = 0$.

22.32. Exercice

1. Justifier l'existence d'un tel repère et montrer que l'équation de la conique générique \mathcal{C}_λ de \mathcal{F} , autre que \mathcal{C}_∞ , a pour équation cartésienne affine :

$$(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1)^2 + 2\lambda xy = 0.$$

2. En s'aidant de 11.1, montrer que, si la droite Δ d'équation $y = mx + p$ est asymptote à la conique \mathcal{C}_λ , alors

$$\begin{cases} \frac{m^2}{b^2} + 2m\left(\lambda + \frac{1}{ab}\right) + \frac{1}{a^2} = 0 \\ \frac{2mp}{b^2} + 2p\left(\lambda + \frac{1}{ab}\right) = \frac{2}{a} + \frac{2m}{b}. \end{cases}$$

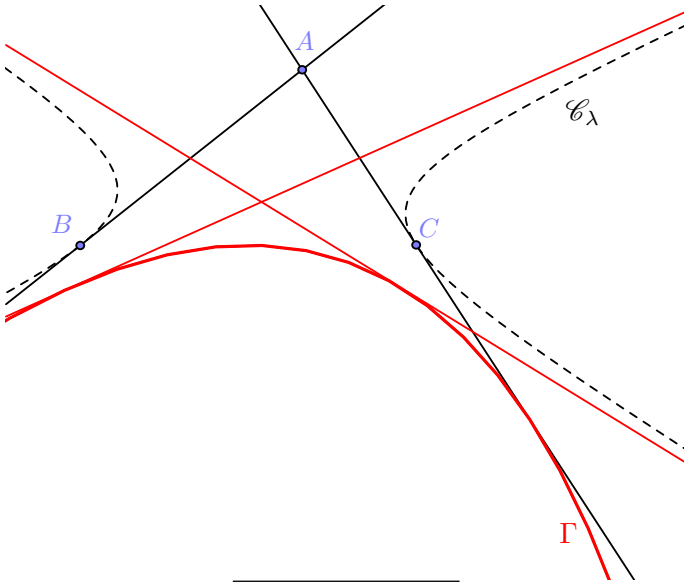
3. En conclure que, si $ma \neq b$, alors $p = \frac{2mab}{ma - b}$ et qu'une équation de la droite Δ est :

$$\underbrace{m(ma - b)}_u \cdot x + \underbrace{(b - ma)}_v \cdot y + \underbrace{2mab}_w = 0.$$

4. Vérifier que le triplet (u, v, w) des coefficients de cette droite satisfait la formule $bvw + awu + 2abuv = 0$; en remarquant qu'il s'agit là de l'équation tangentielle d'une conique, montrer que toutes les asymptotes sont tangentes à la conique Γ d'équation cartésienne

$$(bx - ay)^2 - 4ab(bx + ay) + 4a^2b^2 = 0.$$

5. Vérifier que la conique Γ est tangente aux droites Ωx et Ωy puis enfin que, pour $\lambda = -\frac{2}{ab}$, la conique \mathcal{C}_λ est une parabole et que Γ s'en déduit par une homothétie de centre l'origine.
6. Étudier enfin le cas des droites éventuellement omises par les questions précédentes, à savoir les possibles asymptotes parallèles à Ωy ou bien celles de pente b/a .



22.33. Exercice

Soit BB' un diamètre d'une hyperbole affine (H), ayant pour centre le point S . Les tangentes IC_1 et IC_2 à l'hyperbole issues du milieu I de SB' coupent la tangente en B à l'hyperbole (H) en les points A_1 et A_2 . Montrer que les triangles A_1BC_1 et A_2BC_2 ont même aire et même centre de gravité. Déterminer le lieu des points A_1 et A_2 lorsque B décrit l'hyperbole (H).

Indication. – Remarquer d'abord que le segment A_1S donne la médiane du triangle A_1BC_1 (penser à un faisceau bitangent) relativement au côté BC_1 et que I est le milieu de A_1C_1 (penser à une homothétie de rapport $3/2$ centrée en B et l'appliquer sur la médiane susmentionnée. Le centre de gravité commun est donc S !

Pour comparer les surfaces, noter que B est le milieu de A_1A_2 et que C_1C_2 est parallèle à A_1A_2 (c'est la direction conjuguée du diamètre BB' , qui coupe donc C_1C_2 en son milieu).

Variante. – La forme quadratique donnant le cône au-dessus de (H) dans le vectorialisé \mathcal{E}^v s'écrit de la même façon dans les deux bases associées aux deux triangles A_1BC_1 et A_2BC_2 , à savoir $X^2 + 2YZ$. La matrice de congruence P est donc de déterminant ± 1 . Les tétraèdres correspondants ont donc même volume. Leurs faces figurant dans le même plan affine \mathcal{E} ont donc même surface.

22.34. Remarques

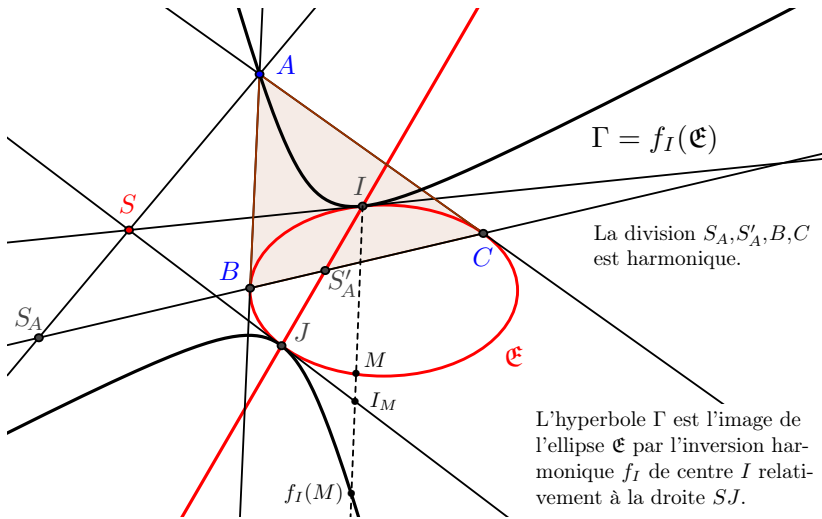
1. Il est conseillé au lecteur d'étudier pour elles-mêmes les coniques associées dans le repère de départ aux formes quadratiques $X^2 + 2\lambda YZ$: quand s'agit-il d'un cercle, d'une parabole, d'une hyperbole équilatère ? Quand le centre est-il le centre de gravité du triangle ?
2. Nous n'examinerons pas en détail d'autres cas de faisceaux ponctuels (coniques osculatrices, surosculatrices, à points de base dans une extension du corps), ni le cas des faisceaux tangentiels¹⁰⁰ et nous nous contenterons de deux mots à ce sujet...

22.35. Exercice

On se donne une ellipse affine \mathfrak{E} et S un point qui lui est extérieur. Soit SI et SJ les tangentes à l'ellipse issues de S .

Déterminer le lieu Γ des points A tels que si AB et AC sont les tangentes à l'ellipse \mathfrak{E} issues de A , alors la polaire triangulaire de S relativement au triangle ABC est précisément la droite IJ .

¹⁰⁰Il est à remarquer que le lieu des centres des coniques *inscrites* à un quadrilatère est la droite de Newton affine de ce quadrilatère!!!



Indications. – Envoyer les points I et J à l’infini. L’ellipse devient une hyperbole \mathfrak{H} de centre S , d’asymptotes SI et SJ . Le problème revient à chercher le lieu des points A tels que si AB et AC sont les tangentes issues de A à l’hyperbole, alors le point S est le centre de gravité du triangle ABC . Le lieu s’avère alors être l’hyperbole déduite de \mathfrak{H} par une affinité de rapport -2 ayant l’une des asymptotes pour axe et l’autre pour direction. L’approche la plus aisée est de rapporter l’hyperbole à ses asymptotes de sorte qu’elle ait $xy = 1$ pour équation cartésienne.

En homogénéisant, nous obtenons $xy - z^2 = 0$, de sorte que la polaire BC du point $A = (x_A, y_A, 1)$ par rapport à notre hyperbole admet alors pour équation (après polarisation) $y_A x + x_A y = 2$. En faisant $y = 1/x$, on obtient que les abscisses des points B et C sont racines du trinôme $y_A x^2 - 2x + x_A = 0$ et de même les ordonnées sont racines du trinôme $x_A y^2 - 2y + y_A = 0$. Il s’ensuit que

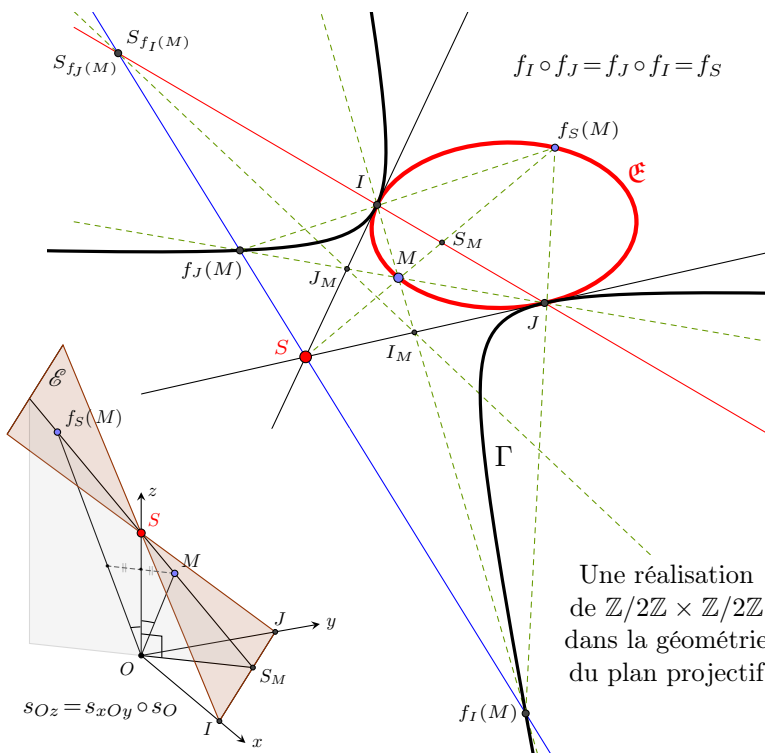
$$0 = x_A + x_B + x_C = x_A + \frac{2}{y_A} \quad \text{et} \quad 0 = y_A + y_B + y_C = y_A + \frac{2}{x_A}.$$

Cela donne la condition nécessaire et suffisante $x_A y_A = -2$.

22.36. Remarques

1. Il est un peu abusif de dire que l’image de l’ellipse \mathfrak{E} par l’inversion harmonique f_I est l’hyperbole Γ , puisque l’on sait qu’il faut être prudent quant au domaine de définition de f_I dans le plan affine. Ainsi, les points de l’ellipse qui sont sur la droite passant par le milieu du segment IJ et parallèle (SI) s’envoient par f_I à l’infini, et donnent en fait les directions des asymptotes de Γ .

2. Les points I et J jouant un rôle symétrique, il est normal de considérer également l'inversion harmonique f_J de centre J relativement à la droite (SI) , qui applique encore l'ellipse \mathcal{E} en l'hyperbole Γ .



Les deux transformations f_I et f_J commutent¹⁰¹, et leur composée, qui est donc encore une involution, conserve l'ellipse \mathcal{E} et s'avère être l'inversion harmonique f_S de centre S relativement à la droite (IJ) !

La figure de la lucarne fait écho aux considérations de l'exercice 5.1, et indique comment le retournement $sOz = s_xOz \circ s_yOz = s_yOz \circ s_xOz$ d'axe Oz se répercute, dans le plan affine \mathcal{E} , en une inversion harmonique, tout comme les symétries planes s_xOz et s_yOz !

22.37. Exercice. Nous reprenons l'exercice précédent dans une formulation différente, et nous le traitons par voie analytique barycentrique. Soit \mathcal{C} une conique bitangente en les points B et C aux droites (AB) et (AC) . Déterminer le lieu des points M du plan affine \mathcal{E} tels que la polaire de M par rapport à \mathcal{C} coïncide avec sa polaire triangulaire par rapport à ABC .

¹⁰¹Attention cependant aux domaines de définition dans le plan affine; le passage au complété projectif s'impose ici, si l'on veut être tranquille.

Indications. – Nous prenons (curieusement) pour repère de départ le repère barycentrique (M, P, Q) (de la figure ci-après), et notons (x, y, z) les coordonnées barycentriques dans ce repère. Le « nouveau » repère est donné par (ABC) et les coordonnées y sont notées (X, Y, Z) . On appelle

$$P = \begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ z_A & z_B & z_C \end{bmatrix}$$

la matrice des vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ et \overrightarrow{OC} relativement à la base $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$.

Comme on l'a appris en L1, on a donc : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$.

On traduit maintenant les hypothèses. La conique \mathcal{C} a pour équations dans ces bases $x^2 + 2\mu yz = 0$ et $X^2 + 2\lambda YZ = 0$, pour λ et μ des réels adéquats¹⁰². Les formes quadratiques correspondantes, ayant le même cône isotrope, sont proportionnelles, de sorte que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix} \doteq {}^tP \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & \mu & 0 \end{bmatrix} P. \quad (*)$$

L'équation de la droite (PQ) est $x = 0$, ou encore $x_A X + x_B Y + x_C Z = 0$, dans le nouveau repère.

On exprime enfin l'hypothèse que (PQ) est la polaire triangulaire du point P relativement au triangle ABC , d'où son équation $\frac{X}{X_M} + \frac{Y}{Y_M} + \frac{Z}{Z_M} = 0$.

On en déduit aussitôt la relation de proportionnalité suivante :

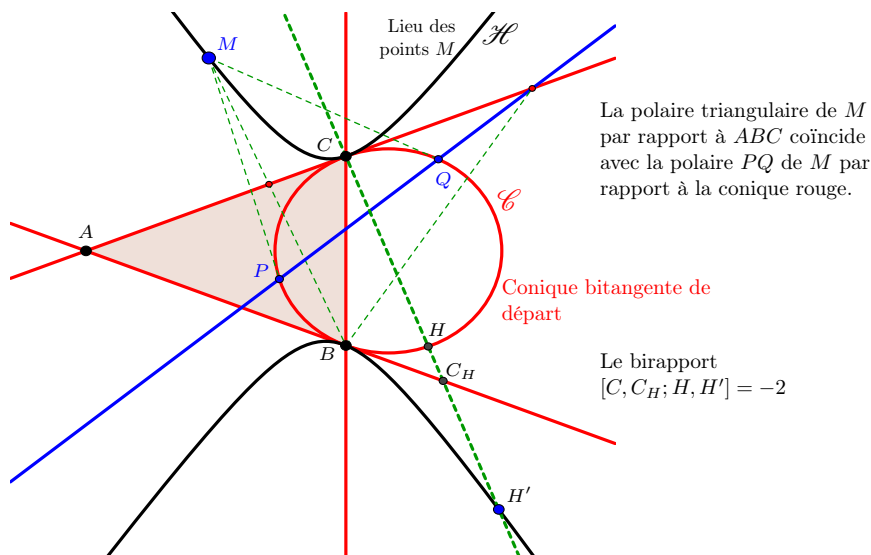
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{X_M} \\ \frac{1}{Y_M} \\ \frac{1}{Z_M} \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{bmatrix}$$

Pour avancer encore, on écrit que $P \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et l'on applique les deux

membres de (*) au vecteur $\begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \end{bmatrix}$; cela donne : $\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} X_M \\ \lambda Z_M \\ \lambda Y_M \end{bmatrix}$.

Des deux dernières proportionnalités suit donc que $X_M^2 - \lambda Y_M Z_M = 0$. *Le lieu du point M est donc une conique bitangente*, que l'on notera \mathcal{H} .

¹⁰²On utilise la forme générale des équations des coniques bitangentes.



En se plaçant dans le vectorialisé, on voit que la dilatation linéaire donnée par $(X, Y, Z) \mapsto (X, -\frac{Y}{2}, Z)$, une fois interprétée dans l'espace affine, montre que la conique \mathcal{H} se déduit de la conique \mathcal{C} par l'homologie $\mathfrak{h} : H \mapsto H'$, ayant comme pôle le point C , de droite fixe la droite AB et de rapport -2 , autrement dit l'on a $[C, C_H, H, H'] = -2$, comme l'indique le dessin (voir aussi, bien sûr, la section 5 (en page 205) sur l'inversion harmonique).

22.38. L'involution de Desargues

Voici en substance l'objet de cette section : si, dans un plan projectif, \mathcal{F} désigne un faisceau linéaire de coniques et Δ une droite générique, nous associons à tout point $M \in \Delta$ la conique de \mathcal{F} qui passe par M puis $M' = h(M)$ le point où cette conique recoupe Δ .

L'application $h : \Delta \rightarrow \Delta$ est alors une homographie¹⁰³ involutive, appelée l'involution de Desargues induite par \mathcal{F} sur Δ . Les points fixes de cette involution (il peut y en avoir zéro ou deux) sont alors les points de contact avec Δ des éventuelles coniques de \mathcal{F} qui lui sont tangentes.

Soit donc, dans le complété projectif $\mathbb{P}(\mathcal{E}^v)$ d'un plan affine \mathcal{E} , deux coniques distinctes, d'équations homogènes respectives $q_0 = 0$ et $q_\infty = 0$ (où q_0 et q_∞ sont deux formes quadratiques); nous considérons, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$, la conique d'équation homogène $\lambda_1 q_0 + \lambda_2 q_\infty = 0$ et désignons par \mathcal{F} le faisceau, ensemble de ces coniques.

¹⁰³Ici, tout particulièrement, un détour par le chapitre VII peut permettre de bien mettre les idées au net.

Pour un scalaire λ , nous désignons par \mathcal{C}_λ la conique d'équation $q_0 + \lambda q_\infty = 0$ et par \mathcal{C}_∞ la conique d'équation $q_\infty = 0$; ainsi, lorsque λ décrit $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$, la conique \mathcal{C}_λ décrit \mathcal{F} tout entier. Les *points de base* de \mathcal{F} sont les points communs à toutes les coniques de \mathcal{F} ; ce sont aussi les points d'intersection de \mathcal{C}_0 et de \mathcal{C}_∞ ; nous appellerons \mathfrak{B} cet ensemble.

Soit alors Δ une droite projective ne passant par aucun point de \mathfrak{B} et qui n'est pas incluse dans une conique dégénérée du faisceau¹⁰⁴; si $M \in \Delta$, il passe par M une conique de \mathcal{F} et une seule¹⁰⁵: c'est \mathcal{C}_λ , où $\lambda = -\frac{q_0(M)}{q_\infty(M)}$ si $M \notin \mathcal{C}_\infty$ et où $\lambda = \infty$ sinon.

Nous savons que cette conique recoupe Δ en un second point, distinct ou non de M .

Pour préciser cela, choisissons un repère affine cartésien tel que Δ soit le complété projectif de l'axe Ωx ; les formes quadratiques q_0 et q_∞ sont respectivement de la forme $ax^2 + bxz + cz^2 + \dots$ et $a'x^2 + b'xz + c'z^2 + \dots$, la dénomination des autres termes étant superflue vu le choix du repère.

Soit $M(x, 0, z) \in \Delta$, avec $(x, z) \neq (0, 0)$, on a alors

$$\lambda = -\frac{ax^2 + bxz + cz^2}{a'x^2 + b'xz + c'z^2}$$

si le dénominateur n'est pas nul, c'est-à-dire si $M \notin \Delta \cap \mathcal{C}_\infty$ et $\lambda = \infty$ sinon. On vérifie tout de suite que $\mathcal{C}_\lambda \cap \Delta$ consiste en les points $M'(x', 0, z')$, avec $(x', z') \neq (0, 0)$ tels que

$$(ax^2 + bxz + cz^2)(a'x'^2 + b'x'z' + c'z'^2) = (a'x^2 + b'xz + c'z^2)(ax'^2 + b'x'z' + c'z'^2).$$

Or, après développement et simplification, on établit facilement que cette équation équivaut à la relation (H) (H comme *homologues*):

$$(xz' - x'z)(Axx' + B(xz' + x'z) + Czz') \stackrel{(H)}{=} 0,$$

où $A = ab' - a'b$, $B = ac' - a'c$ et $C = bc' - b'c$, scalaires non tous nuls¹⁰⁶.

La relation $xz' - x'z = 0$ signifie que $M' = M$, cas sans intérêt; écrivons

¹⁰⁴Le lecteur pourra à bon droit penser que la première hypothèse entraîne la seconde; en réalité, ce n'est le cas que lorsque les coniques du faisceau ont effectivement *quatre* points communs, comptés avec leurs multiplicités.

A contrario, considérons le faisceau constitué des coniques réelles d'équations homogènes $x^2 + y^2 + 2\lambda yz + z^2 = 0$; la conique dégénérée d'équation $yz = 0$ en est élément et elle contient la droite Ωx . Pourtant, on vérifie aisément que $\mathfrak{B} = \emptyset$; il y a pis encore: certaines coniques sont carrément vides, comme l'est \mathcal{C}_0 , quoique par tout point non situé sur \mathcal{C}_∞ passe une unique conique du faisceau.

¹⁰⁵Le contraire signifierait que $M \in \mathfrak{B}$.

¹⁰⁶Le contraire signifierait que Δ est incluse dans une certaine conique \mathcal{C}_{λ_0} .

matriciellement la relation restante :

$$Axx' + B(xz' + x'z) + Czz' \stackrel{(1)}{=} 0 \Leftrightarrow [x' \ z'] \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \stackrel{(1')}{=} 0.$$

Vu nos hypothèses, nous avons $AC - B^2 \neq 0$; sinon, en effet, un choix de $(x, z) \neq (0, 0)$ tel que $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = 0$ montrerait que la relation est satisfaite pour tout $M' \in \Delta$ et donc que cette droite est incluse dans une des coniques du faisceau, ce que nous avons exclu. Cela étant, le seul point M' du plan satisfaisant notre relation est tel que, à un scalaire multiplicatif près,

$$x' = -(Bx + Cz), \quad z' = Ax + Bz.$$

L'application $(x, y) \mapsto (x', z')$ est effectivement homographique, puisqu'elle est linéaire en les coordonnées homogènes de M^{107} ; en outre, elle est involutive : cela se voit par un calcul trivial ou, mieux, grâce à la symétrie des rôles de (x, z) et de (x', z') dans les égalités (1) ou (1'). À noter que, si l'on pose $\Upsilon = \begin{bmatrix} -B & -C \\ A & B \end{bmatrix}$, le caractère involutif de l'application h équivaut à la formule $\Upsilon^2 \in \text{Vect}(\text{Id})$. Or, sachant que Υ n'est pas elle-même une matrice scalaire, son polynôme minimal est $X^2 - \text{tr}(\Upsilon)X + \det(\Upsilon)$; la seule constatation de la nullité de $\text{tr}(\Upsilon)$ suffit donc à notre bonheur.

Pour ce qui suit, nous continuons à désigner par h cette application de Δ sur elle-même et à poser $M' = h(M)$.

Compléments, remarques et cas particuliers.—

1. On suppose toujours que Δ est le complété de Ωx ; on a $M' = M$ si, et seulement si, $Ax^2 + 2Bxz + Cz^2 = 0$; selon que $B^2 - AC$ est un carré ou non, l'homographie h admet deux points fixes, ou aucun. Respectivement, cela signifie que deux coniques du faisceau \mathcal{F} sont tangentes à Δ , ou qu'aucune ne l'est.

Quand h admet deux points fixes distincts F et F' , on a la division harmonique $(F, F', M, h(M))$, pour tout $M \in \Delta$; c'est une propriété générale des homographies involutives admettant deux points fixes¹⁰⁸.

En particulier, l'image M' de M peut être construite comme le conjugué harmonique de M par rapport à la paire (F, F') .

¹⁰⁷Au chapitre VII, nous dirons plus précisément que cette application linéaire est celle qui relève l'homographie en question.

¹⁰⁸Sans attendre le chapitre VII, référons-nous à la remarque 5.3, page 208; prenons la paire $\{F, F'\}$ comme base barycentrique de la droite Δ . Puisque les points F et F' sont fixés par h , il existe des scalaires a, b , où $ab \neq 0$, tels que l'homographie h envoie le point de coordonnées barycentriques (X, Y) sur celui de coordonnées (aX, bY) . On a aussi $a^2 = b^2$ puisque h est une involution mais aussi $a \neq b$ puisque h n'est pas l'identité.

On peut donc supposer que $a = 1$ et $b = -1$, et cela établit notre assertion.

2. Si $z = 0$, le point M est à l'infini, on peut choisir $x = 1$ et alors $(x', y') = (-B, A)$; si $A \neq 0$, cela signifie que la conique \mathcal{C}_λ du faisceau passant par M et M' admet Δ comme direction asymptotique, mais non pas comme asymptote.
3. Si $A = 0$, et donc $B \neq 0$, alors cette conique ne coupe Δ qu'à l'infini : cette droite est donc une asymptote de \mathcal{C}_λ ; dans ce cas, la droite affine Ωx est laissée stable par h et, plus précisément, h induit sur cette droite la symétrie centrale $x \mapsto -x - C/B$. Le centre de cette symétrie est le seul point fixe à distance finie de h , l'autre étant le point à l'infini de la droite Δ .
4. Supposons enfin que Δ est la droite de l'infini tout en conservant nos hypothèses restrictives; pour tout point M à l'infini, il existe une unique conique du faisceau dont M dirige une branche infinie et le point M' est la direction de l'autre branche infinie. On a $M' = M$ si, et seulement si, la conique est une parabole, qui est alors tangente en M à Δ . Cela confirme qu'il y a bien zéro ou deux paraboles dans \mathcal{F} .
5. Nous pouvons donner une expression tout à fait générale de (H) : si la droite Δ est le quotient projectif d'un plan $\text{Vect}(u, v)$, deux points M et M' de Δ sont les projetés de deux vecteurs de la forme $au + bv$ et $a'u + b'v$; si B_0 et B_∞ désignent les formes polaires de q_0 et q_∞ respectivement, alors M et M' se correspondent par l'involution de Desargues si, et seulement si,

$$Paa' + Q(ab' + a'b) + Rbb' = 0,$$

où

$$\begin{cases} P = 2(q_0(u)B_\infty(u, v) - q_\infty(u)B_0(u, v)) \\ Q = q_0(u)q_\infty(v) - q_\infty(u)q_0(v) \\ R = 2(q_\infty(v)B_0(u, v) - q_0(v)B_\infty(u, v)). \end{cases}$$

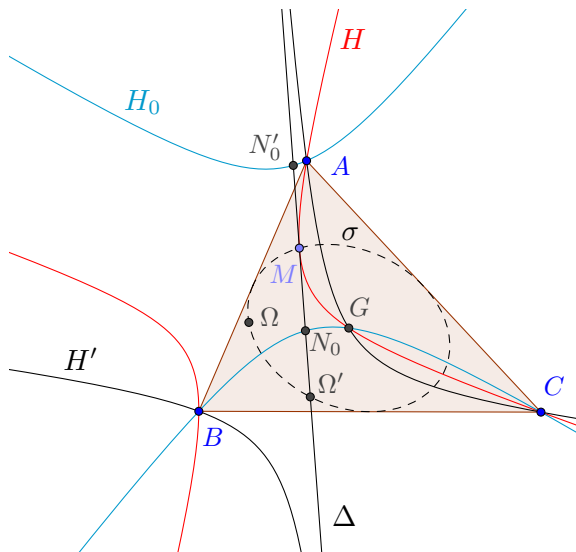
En notation matricielle,

$$\begin{vmatrix} bb' & -\frac{ab' + a'b}{2} & aa' \\ q_0(u) & B_0(u, v) & q_0(v) \\ q_\infty(u) & B_\infty(u, v) & q_\infty(v) \end{vmatrix} = 0.$$

6. Bien entendu, des calculs similaires à tous ceux qui précèdent peuvent être effectués avec des coordonnées barycentriques, qui sont elles aussi des coordonnées homogènes.
7. Les cas que nous avons exclus ne présentent guère d'intérêt; par exemple, si la droite Δ passe par un unique point M_0 de \mathfrak{B} , alors, pour tout point $M \neq M_0 \in \Delta$, la conique passant par M recoupe Δ en M_0 . Notre homographie devient une application constante. Si Δ passe par plus d'un point de \mathfrak{B} , cette application n'est même plus définie.

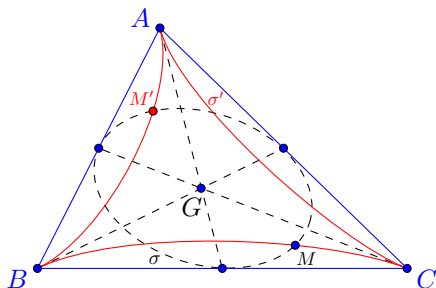
L'exercice qui suit prolonge utilement l'exercice 12.5, page 235.

22.39. Exercice. Dans le complété projectif d'un plan affine *complexe*, on donne un triangle non aplati (ABC) , de centre de gravité G ; on rappelle que la conique des neuf points du faisceau \mathcal{F} à points de base A, B, C, G est la conique de Steiner σ_{ABC} inscrite dans le triangle (ABC) .



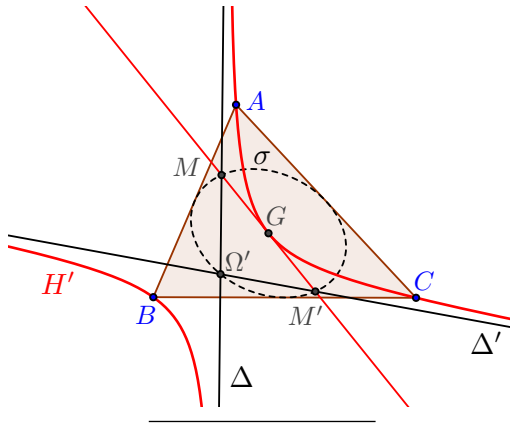
1. On donne un point $M \in \sigma$, autre qu'un milieu d'un côté de (ABC) ; on désigne par H la conique de \mathcal{F} qui passe par M . Soit Δ la tangente en M à H , et soit h l'involution de Desargues induite par \mathcal{F} sur Δ . Justifier que H est non dégénérée puis montrer que $h(M) = M$.
2. Soit H_0 la conique de \mathcal{F} admettant M pour centre; cette conique coupe Δ en deux points N_0 et N'_0 , éventuellement à l'infini. Montrer que $h(N_0) = N'_0$ et en conclure grâce à la question précédente que h est la symétrie centrale par rapport à M .
3. En déduire qu'il existe une conique $H' \in \mathcal{F}$ dont Δ soit une asymptote; si Ω' en désigne le centre, montrer que $\Omega' \in \sigma \cap \Delta$.

Pour la question qui suit, on pourra admettre que l'isotomique σ' — relativement au triangle (ABC) — de l'ellipse de Steiner inscrite σ est une courbe dont les seules tangentes issues de G sont précisément les médianes de ce même triangle.



4. Supposons que Δ soit tangente à σ ; montrer successivement que H est tangente à σ puis que son isotomique est une droite passant par G et tangente à σ' . Conclure alors à une absurdité.
5. Puisque Δ n'est pas tangente à σ , elle la recoupe en un point $\Omega' \neq M$; soit alors \mathcal{H} la conique de \mathcal{F} admettant Ω' pour centre. Si \mathcal{H} coupe Δ en deux points à distance finie N_1 et N'_1 , montrer que le segment $[N_1N'_1]$ admet pour milieu à la fois M et Ω' : penser à h !
Conclure encore une fois à une absurdité et en déduire que $\mathcal{H} = H'$; en déduire enfin que N_0 et N'_0 ne sont pas à l'infini.

En conclusion, si $M \in \sigma$ n'est pas le milieu d'un côté, il existe un conique H du faisceau passant par M ; la tangente Δ en M à H recoupe σ en un point Ω' , et la conique H' du faisceau ayant ce point pour centre admet Δ pour asymptote. On peut d'ailleurs montrer que si l'on effectue la même construction en remplaçant M par son symétrique M' relativement à G , alors la tangente Δ' construite de la même façon est l'autre asymptote de H' . En outre, la droite (MM') est tangente en G à H' et c'est aussi l'isotomique de H' . Ces énoncés sont conséquence de la proposition 23.2, en page 327, par laquelle commence la section qui suit.



22.40. Exercice. On donne, avec les notations habituelles, une base barycentrique A, B, C du plan affine \mathcal{E} et l'on considère l'ensemble \mathcal{F} des coniques projectives ayant une équation barycentrique de la forme

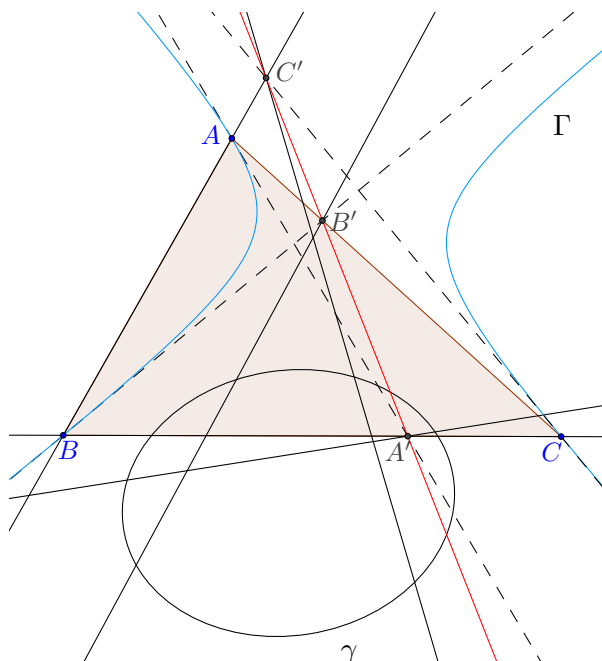
$$pX^2 + qY^2 + rZ^2 = 0,$$

où les trois scalaires p, q, r sont non nuls et satisfont $\alpha p + \beta q + \gamma r = 0$, avec $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

Vérifier que \mathcal{F} est un faisceau de coniques et que le lieu Γ des centres des coniques de \mathcal{F} a pour équation barycentrique $\alpha YZ + \beta ZX + \gamma XY = 0$.

22.41. Remarque. Quand le plan affine \mathcal{E} est *euclidien*, la conique Γ coupe le cercle circonscrit Γ_0 au triangle (ABC) en ses trois sommets. Il y a donc un quatrième point d'intersection : il résulte de la remarque VI-12.2 que ce point est le centre de l'hyperbole équilatère du faisceau \mathcal{F} . Il y a toutefois un cas particulier : si \mathcal{F} ne contient *que* des hyperboles équilatères ; nous verrons alors que $\Gamma = \Gamma_0$, de sorte que la question des points d'intersection *ne se pose plus*.

22.42. Exercice. On donne un triangle (ABC) et une conique γ ; on suppose que les polaires des points A, B, C coupent les côtés opposés en des points uniques, disons respectivement A', B', C' . Montrer que ces trois derniers points sont alignés et qu'il existe une conique Γ tangente en A, B, C respectivement aux droites AA', BB', CC' .



Indications. – On prendra les sommets du triangle (ABC) comme base barycentrique et $aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2(pYZ + qZX + rXY) = 0$ comme équation barycentrique de γ ; la polaire de A a pour équation $aX + qY + pZ = 0$ et elle rencontre (BC) en un point unique si, et seulement si, le couple (p, q) n'est pas nul. Le point A' , éventuellement à l'infini, admet alors pour coordonnées $(0, q, -r)$. On trouvera de même $B'(-p, 0, r)$ et $C'(p, -q, 0)$ si, toutefois, au plus l'un des coefficients p, q ou r est nul ; ces trois points sont alors alignés sur la droite d'équation $qrX + rpY + pqZ = 0$.

Si la conique circonscrite Γ existe, son équation est de la forme

$$uYZ + vZX + wXY = 0;$$

on vérifiera sans difficulté que $(u, v, w) = (p, q, r)$ convient.

Et les faisceaux dans tout ça ? Eh bien, le faisceau \mathcal{F} engendré par nos deux coniques contient aussi celle, disons \mathcal{C} , d'équation $aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0$, par rapport à laquelle la polaire de A est la droite (BC) ; les polaires de ce sommet par rapport à \mathcal{F} forment un faisceau de droites, dont le point de base est donc A' . Si l'on applique le théorème de Pascal à la conique Γ et à l'hexagramme dégénéré $ABCCAB$, on constate que les points A', B', C' sont alignés, ce que confirme notre calcul.

Remarquons que les sommets du triangle ABC sont deux à deux conjugués par rapport à \mathcal{C} ; nous approfondirons cette notion ultérieurement, à la section **24**, mais rappelons que ce triangle est dit *autopolaire* par rapport à la conique \mathcal{C} .

22.43. Exercice. (Faisceaux de coniques et involutions quadratiques)

Soit, dans le complété projectif $\mathbb{P}(\mathcal{E}^v)$ d'un plan affine \mathcal{E} , deux coniques *distinctes*, d'équations homogènes respectives $q_0 = 0$ et $q_\infty = 0$ (où q_0 et q_∞ sont deux formes quadratiques); nous notons B_0 et B_∞ les formes polaires respectives de ces deux formes quadratiques.

Pour un scalaire λ , nous notons \mathcal{C}_λ la conique d'équation $q_0 + \lambda q_\infty = 0$ et par \mathcal{C}_∞ la conique d'équation $q_\infty = 0$; si $M \in \mathbb{P}(\mathcal{E}^v)$, nous désignons par $\mathcal{P}_\lambda(M)$ la polaire de M par rapport à \mathcal{C}_λ . Enfin, nous désignons par \mathcal{F} le faisceau contenant ces deux coniques.

1. *Premier cas.* Si, pour un point M , on a $\mathcal{P}_\infty(M) = \mathcal{P}_0(M)$, alors le point M a même polaire par rapport à toutes les coniques du faisceau. Montrer que cela se produit si, et seulement si, M est le centre d'une conique dégénérée de \mathcal{F} .
2. *Second cas.* Sinon, on désigne par $I(M)$ le point d'intersection des polaires $\mathcal{P}_\infty(M)$ et de $\mathcal{P}_0(M)$; montrer alors que $I(M)$ est conjugué à M par rapport à toutes les coniques du faisceau, et que c'est le seul point à posséder cette propriété.

Montrer que $I(M) = M$ si, et seulement si, M appartient à toutes les coniques du faisceau; montrer que $I(M)$ est un point à l'infini si, et seulement si, M est le centre d'une conique du faisceau¹⁰⁹.

¹⁰⁹Ce dernier point se comprend bien : si M est le centre de la conique \mathcal{C}_λ , la polaire est la droite de l'infini et cette droite contient $I(M)$; inversement, si $I(M)$ est à l'infini, la droite de l'infini fait partie du faisceau de droites de base $I(M)$ et donc le point M est le centre d'une des coniques.

3. Lorsque $I(I(M))$ a un sens, montrer que $I(I(M)) = M$.
4. *Exemple.* Soit une base barycentrique A, B, C et soit \mathcal{F} le faisceau constitué des coniques projectives ayant une équation barycentrique de la forme $pX^2 + qY^2 + rZ^2 = 0$, où p, q, r sont des scalaires non nuls satisfaisant $\alpha p + \beta q + \gamma r = 0$, avec $\alpha\beta\gamma \neq 0$ ¹¹⁰.
- a. Montrer que seuls les points A, B, C ressortissent au premier cas et que, si $M \notin \{A, B, C\}$ a des coordonnées barycentriques (X, Y, Z) , celles, notées (X', Y', Z') , du point $I(M)$ satisfont la relation \mathcal{R}

$$\frac{XX'}{\alpha} = \frac{YY'}{\beta} = \frac{ZZ'}{\gamma}.$$

- b. Que dire de $I(M)$ lorsque $X = 0$ et $YZ \neq 0$? Lorsque $XYZ = 0$, montrer que $I(I(M))$ a un sens et vérifier que $I(I(M)) = M$.

22.44. Remarques

1. L'application I est appelée l'*involution quadratique* associée au faisceau de coniques \mathcal{F} ; le substantif *involution* est justifié par la formule $I(I(M)) = M$, même si elle n'est que partielle, et l'épithète *quadratique* est justifiée par le fait que, pour satisfaire \mathcal{R} , on peut choisir

$$(X', Y', Z) = (\alpha YZ, \beta ZX, \gamma XY).$$

Cette involution conserve une bonne partie des propriétés essentielles de l'involution isotomique : l'image d'une céviennne est une céviennne, l'image d'une autre droite est une conique passant par les points A, B, C et en particulier l'image de la droite de l'infini est la conique, lieu des centres des coniques du faisceau.

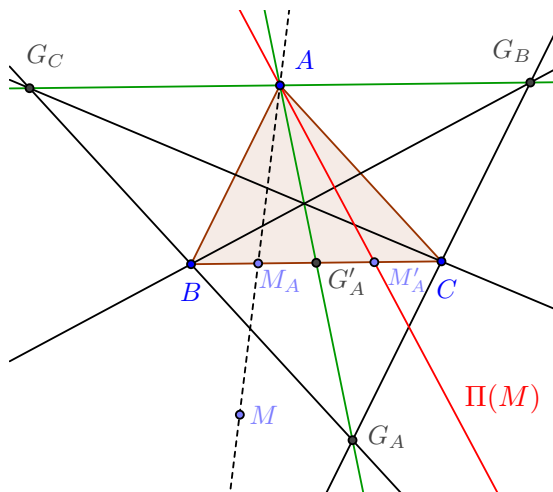
2. L'inversion isotomique relative à un triangle (ABC) est un cas particulier d'involution quadratique. Elle correspond au cas d'un faisceau dont les points de base sont G, G_A, G_B, G_C , où les points donnés ont pour coordonnées barycentriques $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ et $(1, 1, -1)$ respectivement. L'isotomique de la droite de l'infini est effectivement le lieu des centres, ici l'ellipse de Steiner circonscrite à (ABC) .

Dans le cadre de la question 4, cela correspond au cas où $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Comme on le voit, le triangle $(G_A G_B G_C)$ est le triangle *bimédian*, c'est-à-dire celui dont le triangle initial est le médian; en revanche, le point G n'a sans doute plus besoin d'être présenté.

Si l'on choisit parmi les coniques de \mathcal{F} celle qui est la réunion des droites (GG_A) et $(G_B G_C)$, la polaire du point M est la droite $\Pi(M)$ apparaissant sur la figure : elle passe par A , centre de la conique, ainsi que par le point M'_A , symétrique du point M_A par rapport au milieu

¹¹⁰Voir l'exercice 22.40.

du segment $[BC]$; c'est bien la construction de la droite $\Pi(M)$ telle que la division $((GG_A), (G_B G_C), (AM), \Pi(M))$ soit harmonique¹¹¹.



Par définition, le conjugué isotomique M' de M appartient à la cévienne (AM'_A) , c'est-à-dire à $\Pi(M)$; continuer la construction avec la cévienne issue de B (deux céviennes en tout devraient suffire) donne effectivement *in fine* le conjugué isotomique attendu.

Remarque. L'exercice 22.8 peut être à présent démystifié¹¹² : puisque la conique Γ de notre faisceau \mathcal{F} à points de base G, G_A, G_B, G_C passe par M et que, de plus, M' , l'isotomique de M , est conjugué avec M par rapport à toutes les coniques du faisceau, cela entraîne que M' est sur la tangente T en M à *cette* conique.

3. L'*inversion isogonale* relative à un triangle (ABC) , que nous rencontrerons dans le cadre euclidien à partir du VI-6, est aussi un exemple d'involution quadratique.

Si nous appelons a, b, c les longueurs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, elle correspond au cas d'un faisceau dont les points de base ont pour coordonnées barycentriques (a, b, c) , $(-a, b, c)$, $(a, -b, c)$ et $(a, b, -c)$ respectivement¹¹³. Dans le cadre de la question 4, cela correspond au cas où $\alpha = a^2$, $\beta = b^2$ et $\gamma = c^2$.

¹¹¹Si l'on coupe cette gerbe de quatre droites par la sécante (BC) , l'on obtient les points $(G_A, (BC)_\infty, M_A, M'_A)$, où $(BC)_\infty$ désigne le point à l'infini de la droite (BC) ; sachant que le deuxième d'entre eux est à l'infini, ces quatre points sont effectivement en division harmonique puisque le premier est le milieu du segment formé par les deux derniers.

¹¹²Ou *démystifié*; l'un ou l'autre se dit (ou se disent).

¹¹³Ces points sont respectivement le centre du cercle inscrit et les centres des cercles exinscrits dans les angles \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} .

Une fois familiarisé avec cette nouvelle involution, le lecteur est invité à vérifier cette assertion comme cela vient d'être fait avec l'isotomie. D'ailleurs, dans le texte à venir, il constatera qu'il est fait *mutatis mutandis* référence aux mêmes divisions harmoniques qu'à l'instant.

23. Compléments sur l'isotomie

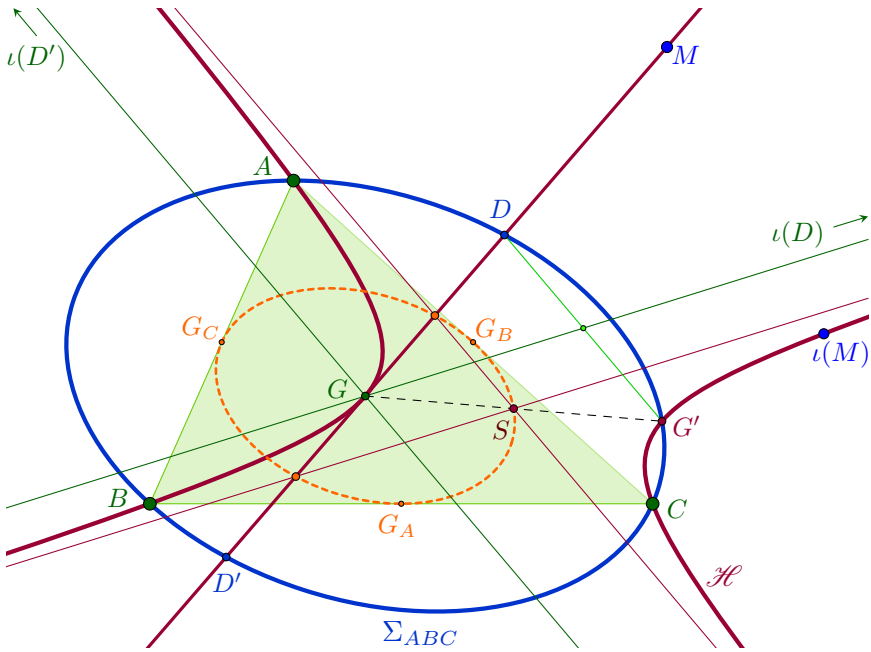
23.1. Isotomie et diamètres de l'ellipse de Steiner

Les points de l'ellipse de Steiner Σ_{ABC} (circonscrite au triangle ABC) sont envoyés à l'infini par l'isotomie $\iota = \iota_{ABC}$. Deux questions naturelles se posent alors. Qu'en est-il des directions associées à deux points diamétralement opposés sur l'ellipse de Steiner ? Que peut-on dire alors de l'image d'un diamètre de cette ellipse sous l'action de ι ?

23.2. Proposition

1. Deux points diamétralement opposés D et D' sur l'ellipse de Steiner circonscrite $\Sigma = \Sigma_{ABC}$, distincts des sommets du triangle, ont pour isotomiques deux directions conjuguées de Σ .
2. De plus, l'image isotomique du segment diamétral $[DD']$ est la branche contenant G de l'hyperbole circonscrite \mathcal{H} passant par G et tangente au diamètre (DD') au point G . Le centre de cette hyperbole est le milieu du segment GG' , où G' est le quatrième point d'intersection de l'ellipse de Steiner Σ avec l'hyperbole \mathcal{H} , et les directions de ses asymptotes sont conjuguées par rapport à Σ .
3. Les points où l'ellipse de Steiner inscrite $\sigma = \sigma_{ABC}$ coupe le diamètre (DD') appartiennent aux asymptotes de \mathcal{H} ; autrement dit, les droites $(G'D)$ et $(G'D')$ sont parallèles aux asymptotes de \mathcal{H} .
4. Les images isotomiques des droites $(G'D)$ et $(G'D')$ sont des hyperboles circonscrites au triangle (ABC) , admettant la droite (DD') comme direction asymptotique. En outre, chacune des deux coupe (DD') en un point de Σ .

Démonstration. Le lecteur ne manquera pas de remarquer la parenté entre la situation examinée ici et celle de l'exercice 21.2, où une approche différente a suscité des calculs d'un type différent de ceux proposés ci-après. De plus, la première assertion de la proposition a été déjà vérifiée lors de l'exercice 20.7, en page 280 ; nous en donnons ici une autre preuve.



1. *Images isotomiques conjuguées.* Soit (X, Y, Z) les coordonnées barycentriques de D , avec $X + Y + Z = 1$; celles de D' sont alors

$$\frac{1}{3} \times (2 - 3X, 2 - 3Y, 2 - 3Z).$$

Par hypothèse, puisque les points D et D' ne sont pas des sommets, on a bien sûr $XYZ \neq 0$ ainsi que $(2 - 3X)(2 - 3Y)(2 - 3Z) \neq 0$ et, puisque D et D' sont sur Σ , on a

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z} = \frac{1}{2 - 3X} + \frac{1}{2 - 3Y} + \frac{1}{2 - 3Z} = 0.$$

En polarisant la forme $YZ + ZX + XY$, on voit tout de suite que vérifier que les isotomiques de D et de D' sont deux directions conjuguées revient à vérifier que

$$\sum_{\text{circ}} \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} \right) \times \frac{1}{2 - 3Z} = 0,$$

où le symbole \sum_{circ} signifie que l'on fait la somme des termes obtenus

par permutation circulaire dans l'expression souhaitée (dans ce qui suit, nous abrègerons certaines formules dont les termes se déduisent ainsi du premier d'entre eux). Or, $1/X + 1/Y + 1/Z = 0$ et il suffit de vérifier

que $\sum_{\text{circ}} \frac{1}{Z} \times \frac{1}{2 - 3Z} = 0$, ce qui est immédiat puisque l'on a, dans le

corps des fractions rationnelles,

$$\frac{1}{T} \times \frac{1}{2-3T} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{T} + \frac{3}{2-3T} \right).$$

En exercice, on pourra vérifier que, si D et D' sont deux points de Σ ayant des images isotomiques conjuguées par rapport à Σ , alors ils sont diamétralement opposés. Pour cela, on pourra introduire l'opposé diamétral D_1 de D et montrer que $\iota(D_1) = \iota(D')$; on pourra alors conclure.

Pour l'alinéa à venir, nous utilisons le résultat suivant, que l'on trouvera au 11.1 : *si une droite affine D rencontre une hyperbole \mathcal{H} non dégénérée en un seul point (à distance finie), cette droite est, soit une tangente à \mathcal{H} , soit une parallèle à une asymptote de \mathcal{H}* ¹¹⁴.

2. *Tangente à \mathcal{H} au point G .* La droite (DD') n'est pas parallèle à une asymptote de $\mathcal{H} = \iota(DD')$; vu le résultat précédemment admis, il suffit de vérifier qu'elle ne peut rencontrer \mathcal{H} en un point M autre que G . Or, si c'était le cas, de l'égalité $(DD') \cap \iota(DD') = \{G, M\}$, on déduirait par application de ι que $\iota(DD') \cap (DD') = \{\iota(G), \iota(M)\}$. Puisque $G = \iota(G)$, alors M serait un autre point fixe de ι et (DD') passerait par un des sommets du triangle.
3. *Centre de \mathcal{H} et point G' .* Comme elle passe par G , l'hyperbole circonscrite \mathcal{H} admet pour équation $pYZ + qZX + rXY = 0$ avec $p+q+r = 0$. Son centre S a donc pour cobars $(-p^2 + pq + pr, pq - q^2 + qr, pr + qr - r^2)$ ou encore (p^2, q^2, r^2) (cf. page 234). Quant aux cobars (X, Y, Z) de son quatrième point d'intersection G' avec l'ellipse de Steiner, elles vérifient les deux équations

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{p}{X} + \frac{q}{Y} + \frac{r}{Z} = 0,$$

de sorte que l'on peut prendre pour $(\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}, \frac{1}{Z})$ les coordonnées du produit vectoriel formel $(1, 1, 1) \wedge (p, q, r)$, et donc

$$(X, Y, Z) = \left(\frac{1}{r-q}, \frac{1}{p-r}, \frac{1}{q-p} \right) \equiv ((p-q)(p-r), \text{circ}),$$

ou encore $(2p^2 - qr, 2q^2 - pr, 2r^2 - pq)$, puisque $p + q + r = 0$ ¹¹⁵.

¹¹⁴Nous laissons au lecteur le plaisir et le soin d'adapter cela, respectivement, au cas des paraboles ou des ellipses.

¹¹⁵Dans la formule précédente, circ signifie que l'on reconstitue le triplet complet par permutation circulaire des noms de variables :

$$((p-q)(p-r), \text{circ}) = ((p-q)(p-r), (q-r)(q-p), (r-p)(r-q)).$$

Il suffit dès lors pour établir que le centre S est le milieu de GG' de montrer que les points G , S et G' sont tels que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & p^2 & 2p^2 + qr \\ 1 & q^2 & 2q^2 + pr \\ 1 & r^2 & 2r^2 + pq \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & p^2 & qr \\ 1 & q^2 & pr \\ 1 & r^2 & pq \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & p^2 & P/p \\ 1 & q^2 & P/q \\ 1 & r^2 & P/r \end{vmatrix},$$

où $P = pqr$, est nul.

Cela revient à établir que le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & p & p^3 \\ 1 & q & q^3 \\ 1 & r & r^3 \end{vmatrix}$ est nul (toujours

sous l'hypothèse $p+q+r=0$). On a là un déterminant de Vandermonde lacunaire, qui apparaît (au signe près) comme le coefficient de X^2 dans le polynôme

$$\begin{vmatrix} 1 & p & p^2 & p^3 \\ 1 & q & q^2 & q^3 \\ 1 & r & r^2 & r^3 \\ 1 & X & X^2 & X^3 \end{vmatrix} = (q-p)(r-q)(r-p)(X-p)(X-q)(X-r),$$

et vaut donc $(q-p)(r-q)(r-p)(p+q+r)$.

4. *Des asymptotes conjuguées.* Pour cela, nous allons introduire deux involutions sur la droite de l'infini et constater qu'elles coïncident en deux paires de points : elles sont par conséquent égales (cf. un peu plus loin l'exercice 23.4).

Notre première involution consiste en ce qui suit : à une direction $\iota(D)$ à l'infini, on associe dans un premier temps son inverse isotomique D (appartenant à l'ellipse de Steiner $\Sigma = \Sigma_{ABC}$), que l'on applique ensuite sur son symétrique D' par rapport au centre G et que l'on renvoie enfin à l'infini par isotomie sur la direction $\iota(D')$ ¹¹⁶. La deuxième involution sur la droite de l'infini Δ_∞ , notée ε_Σ , est celle qui associe tout simplement à une direction sa direction conjuguée par rapport à l'ellipse de Steiner Σ .

Le lecteur pourra vérifier sans difficulté que ces deux involutions coïncident en les trois paires de directions définies par un quelconque côté du triangle ABC et sa médiane correspondante¹¹⁷.

¹¹⁶En résumé, pour le lecteur qui n'aurait pas lu la section concernant l'*involution de Desargues* : l'ensemble des coniques passant par les quatre points A , B , C et G est un faisceau linéaire de coniques, et induit donc sur une droite Δ quelconque évitant les dits points (et en particulier sur la droite de l'infini Δ_∞) une involution $\delta_{\Delta, \mathcal{F}}$, dite involution de Desargues (associée à la droite Δ relativement au faisceau $\mathcal{F} := \mathcal{F}(A, B, C, G)$: de façon pratique, on prend un point M sur Δ et on lui associe l'autre point d'intersection M' de Δ avec la conique du faisceau qui passe par M . Notre première involution est donc l'involution de Desargues $\delta_{\Delta_\infty, \mathcal{F}}$. (On aura noté, bien sûr, que les inverses isotomiques des directions asymptotiques d'une hyperbole \mathcal{H} du faisceau sont évidemment les points de l'ellipse de Steiner qui appartiennent à l'inverse isotomique de \mathcal{H} .)

¹¹⁷Ces cas correspondent aux coniques dégénérées de notre faisceau \mathcal{F} .

L'égalité de ces deux involutions se traduit sur notre dessin par le fait que les asymptotes de l'hyperbole \mathcal{H} sont conjuguées par rapport à l'ellipse.

5. *Direction des asymptotes.* Nous prenons comme base affine (cartésienne) du plan \mathcal{E} le triplet (G', D, D') ; puisque les points D et D' sont diamétralement opposés sur Σ , les directions des droites $(G'D)$ et $(G'D')$ sont conjuguées par rapport à cette ellipse. En outre, Σ passe par G' , de sorte qu'elle admet une équation cartésienne de la forme

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy = 0, \quad \text{avec } ab \neq 0.$$

La nullité du coefficient en xy et celle du coefficient constant découlent respectivement des deux arguments précédents.

Le point G , centre de Σ , admet pour coordonnées $(-c/a, -d/b)$ et, puisque $G \notin \Sigma$, on a $bc^2 + ad^2 \neq 0$.

L'hyperbole \mathcal{H} admet pour centre S , milieu de GG' et a donc une équation cartésienne de la forme

$$A\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 + B\left(x + \frac{c}{2a}\right)\left(y + \frac{d}{2b}\right) + C\left(y + \frac{d}{2b}\right)^2 + D = 0.$$

Nous allons démontrer, après la fin de la preuve complète de cette longue proposition, que la conjugaison par rapport à Σ des directions des branches infinies de \mathcal{H} se traduit par la formule $bA + aC \stackrel{(1)}{=} 0$.

En outre, les coordonnées de D et de D' sont respectivement $(-2c/a, 0)$ et $(0, -2d/b)$, de sorte que l'équation cartésienne de la droite (DD') est $adx + bcy + 2cd = 0$. Puisque, sur \mathcal{H} , les points G et G' sont diamétralement opposés, ils admettent des tangentes parallèles et donc la tangente à \mathcal{H} en G' est parallèle à (DD') ; cela se traduit¹¹⁸ par la formule

$$\frac{c}{a} \times \left(A \frac{c}{a} + B \frac{d}{b}\right) = \frac{d}{b} \times \left(B \frac{c}{a} + C \frac{d}{b}\right).$$

Après simplification, cela implique que $Ac^2b^2 - Ca^2d^2 \stackrel{(2)}{=} 0$; les formules (1) et (2) reviennent à un système linéaire homogène en (A, C) dont le déterminant $ab(bc^2 + ad^2)$ est non nul, et l'on a donc $A = C = 0$. C'est bien dire que l'hyperbole \mathcal{H} a ses asymptotes parallèles aux axes de notre repère affine.

6. *Images des droites $(G'D)$ et $(G'D')$.* Le point G' est, dans le complété projectif du plan affine \mathcal{E} , l'image par ι du point à l'infini D'' de (DD') . L'image $\iota(G'D)$ est donc une hyperbole \mathcal{H}' passant par D'' et circonscrite au triangle (ABC) .

De ce fait, cette hyperbole admet (DD') comme direction asymptotique; enfin, puisque \mathcal{H} et $(G'D)$ se coupent au point G' et au point

¹¹⁸Voir par exemple en 10.7.

à l'infini G'' de (GD') , on en déduit effectivement que leurs isotomiques (DD') et \mathcal{H}' se coupent au point $\iota(G'')$, qui appartient à Σ .

On raisonne de la même façon avec $\mathcal{H}'' = \iota(G'D')$; à noter que \mathcal{H}' et \mathcal{H}'' coupent Σ en deux points diamétralement opposés (pourquoi?).

Il reste un résultat en suspens : l'égalité $bA + aC = 0$; désignons par Q et Q' des formes quadratiques dont les cônes isotropes coupent \mathcal{E} selon Σ et \mathcal{H} respectivement, par q, q' leurs restrictions à E et par $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ les formes bilinéaires polaires de q, q' .

Puisque q est non dégénérée, il existe un endomorphisme u de E tel que l'on ait toujours $\mathcal{B}'(x, y) = \mathcal{B}(u(x), y)$; nous allons montrer que u est de trace nulle.

En effet, les branches infinies de \mathcal{H} sont dirigées par des vecteurs e_1 et e_2 qui sont, d'après ce que nous savons, q -orthogonaux et q' -isotropes; dans la base (e_1, e_2) de E , les matrices de q et de q' sont respectivement de la forme

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{bmatrix} 0 & \alpha' \\ \beta' & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice de u est alors $M^{-1}M'$, qui est de trace nulle (et même de diagonale nulle).

Enfin, faisons le calcul de la trace de u grâce à sa matrice par rapport à la base vectorielle $(\overrightarrow{G'D}, \overrightarrow{G'D'})$; avec les notations précédentes, les matrices de q et de q' sont cette fois

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}' = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}.$$

La trace de u , nulle, est $\frac{A}{a} + \frac{C}{b}$ et l'on conclut ainsi. □

23.3. Remarques

1. On donnera à l'occasion de l'exercice VI-5.10 une version et une preuve euclidiennes de cette proposition (voir alors en priorité la remarque figurant à la page 360, ou penser à introduire une transformation affine qui applique notre triangle en un triangle équilatéral).
2. Si u est un automorphisme de trace nulle d'un *plan* vectoriel, son inverse est aussi de trace nulle (résultat propre à la dimension 2; le vérifier matriciellement).

En d'autres termes, on a l'assertion : *si les directions asymptotiques d'une conique à centre sont conjuguées par rapport à une seconde conique à centre, celle de la seconde le sont aussi par rapport à la première.*

Cet argument prend tout son sens si le corps de base est algébriquement clos ; ainsi, si l'on complexifie un plan affine euclidien, l'énoncé précédent, appliqué à une hyperbole et à un cercle, montre que l'hyperbole est équilatère si, et seulement si, les points cycliques sont conjugués par rapport à l'hyperbole. En effet, une hyperbole est équilatère si, et seulement si, elle a des asymptotes orthogonales (relativement au produit scalaire).

Relativement à un repère orthonormé, on obtient ainsi la caractérisation des hyperboles équilatères : une conique d'équation cartésienne

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \dots = 0$$

est une hyperbole équilatère si, et seulement si, on a $A + C = 0$.

23.4. Exercice. On se donne deux automorphismes u et u' d'un espace vectoriel de dimension 2 et deux paires distinctes (D_1, D'_1) et (D_2, D'_2) de droites.

On suppose que ces automorphismes échangent à la fois les droites d'une même paire ; montrer qu'ils sont proportionnels.

Indication. – Trois au moins parmi les quatre droites sont distinctes et l'automorphisme $u' \circ u^{-1}$ laisse ces droites invariantes. Ayant un peu trop de droites propres, il est forcément scalaire.

23.5. Exercice

Nous reprenons d'une autre façon la preuve de la direction des asymptotes de l'hyperbole \mathcal{H} apparaissant dans les pages précédentes ; la démonstration n'en est pas plus courte pour autant.

1. Sachant que les cobars du point G' sont $(x_{G'} = (p - q)(p - r), \text{circ})$, montrer que la tangente (T) en ce point à l'ellipse de Steiner Σ admet pour équation barycentrique

$$(y_{G'} + z_{G'})X + \text{circ} \stackrel{(1)}{=} 0.$$

2. Montrer que l'équation (1) équivaut à $(q - r)^2 X + \text{circ} = 0$.
3. Montrer que la conique dégénérée $\mathcal{C}_0 = (T) \cup (DD')$ a pour équation

$$((q - r)^2 X + \text{circ}) \times (pX + qY + rZ) = 0.$$

4. Montrer que le faisceau linéaire contenant Σ et \mathcal{C}_0 contient une unique autre conique dégénérée \mathcal{C}_1 ; montrer que \mathcal{C}_1 , admet, pour un certain λ ,

une équation de la forme

$$((q-r)^2X + \text{circ}) \times (pX + \text{circ}) - \lambda(YZ + \text{circ}) = 0.$$

Montrer que cette autre conique est la réunion $(G'D) \cup (G'D')$; nous appellerons pour la suite Q_λ le polynôme membre de gauche de cette équation.

5. Le faisceau linéaire contenant \mathcal{H} et \mathcal{C}_1 est formé de coniques notées $\mathcal{C}'_{\lambda, \mu}$ ayant une équation de la forme

$$Q_\lambda(X, Y, Z) + \mu(pYZ + qZX + rXY) = 0.$$

On pose

$$\lambda = 9pqr, \quad \mu = 3(p^2 - qr) = 3(q^2 - rp) = 3(r^2 - pq);$$

montrer que cette définition multiple de μ est cohérente et que, pour ce choix de λ et de μ , que la conique $\mathcal{C}'_{\lambda, \mu}$ dégénère en une conique ayant une équation de la forme

$$(X + Y + Z) \times (\alpha X + \beta Y + \gamma Z) = 0.$$

6. En conclure alors que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{H}$ contient effectivement deux points à l'infini¹¹⁹ et que cela démontre le résultat attendu.
7. Vérifier enfin que l'on obtient $\alpha = p(q-r)^2$, $\text{circ} \dots$ et que la droite d'équation $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$ n'est autre que la tangente en G' à \mathcal{H} ¹²⁰.

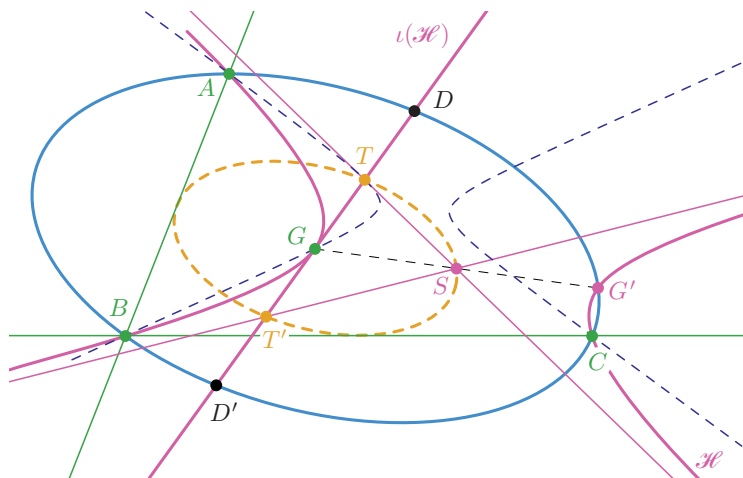
23.6. Remarques

1. Les points D et D' , à l'intersection d'un diamètre et de Σ , forment une *paire* de points *indiscernables*. Dans cet exercice, nous avons fait appel à la conique dégénérée $(G'D) \cup (G'D')$ qui respecte totalement la symétrie des rôles de ces deux points.
2. Nous avons fini par considérer des coniques dont une équation était combinaison linéaire de celles des *trois* coniques Σ , \mathcal{H} et \mathcal{C}_0 ; ces coniques forment ce que l'on appelle un *réseau*. En regardant l'intersection de nos trois coniques, nous constatons qu'un réseau de coniques n'est pas nécessairement l'ensemble des coniques passant par *trois* points (alors qu'un *faisceau* de coniques est en général l'ensemble des coniques passant par *quatre* points).

¹¹⁹Ce sont les points d'intersection de l'hyperbole \mathcal{H} avec la droite de l'infini, d'équation $X + Y + Z = 0$.

¹²⁰Intuitivement, d'ailleurs, parce que la droite d'équation $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$ coupe l'hyperbole au point G *double*.

23.7. Exercice. Nous reprenons la figure de la proposition 23.2 et nous y marquons les points d'intersection T et T' du diamètre DD' de l'ellipse de Steiner circonscrite avec l'ellipse de Steiner inscrite. Le segment TT' est ainsi un diamètre d'icelle et les points T et T' appartiennent aux asymptotes de l'hyperbole \mathcal{H} . Montrer que les deux coniques du faisceau défini par A, B, C et G et passant respectivement par T et T' sont tangentes respectivement aux asymptotes ST et ST' .



Indication. – L'involution de Desargues que définit notre faisceau sur l'asymptote ST , par exemple, fixe son point à l'infini (considérer à cet effet l'hyperbole \mathcal{H}) : c'est donc une symétrie centrale. La conique du faisceau ayant T pour centre découpe sur l'asymptote ST un segment dont T est évidemment le milieu : l'involution de Desargues en question est donc la symétrie centrale par rapport à T , si bien que la conique du faisceau passant par T se révèle tangente à notre asymptote en T . Le lecteur alerte aura relevé le lien de parenté flagrant du présent exercice avec l'exercice 22.39.

23.8. Remarque. L'argument précédent requiert un certain rodage puisqu'il s'appuie sur l'involution de Desargues qui n'est plus à proprement parler dans le fonds commun des étudiants en Géométrie. Voyons toutefois quels calculs pénibles il nous a épargnés : supposons que nous voulions vérifier que la symétrie affine de centre T représente l'involution de Desargues induite par notre faisceau sur la droite (ST) ; nous ne donnons que les étapes des calculs, forcément assez laborieux.

Si nous trouvons deux paires de points (de la droite) symétriques par rapport à T , la forme générale de l'involution obtenue au 22.38 nous dit immédiatement que h est la symétrie centrale espérée. Or, parmi les coniques du

faisceau, nous connaissons trois coniques dégénérées, ce qui est largement suffisant ; l'une d'entre elles est la réunion des droites (AB) et (GC) et nous allons montrer que ces droites coupent (ST) en deux points symétriques par rapport à T (dès lors, nous pouvons conclure puisque les mêmes calculs conviennent pour toute autre conique dégénérée).

Si A' et B' se déduisent de A et de B par l'homothétie de centre G et de rapport 2, nous pouvons aussi couper (DG') par les droites $(A'B')$ et (GC) et vérifier que les points d'intersection sont symétriques par rapport à D .

Supposons que les coordonnées barycentriques normalisées du point D soient (X, Y, Z) , avec $X + Y + Z \stackrel{(1)}{=} 1$ et $YZ + ZX + XY \stackrel{(1')}{=} 0$; celles de G' sont $(1/(3X - 1), \text{circ})$ et la droite (DG') a pour équation barycentrique $aX + bY + cZ = 0$, avec $a = \frac{Y}{3Z - 1} - \frac{Z}{3Y - 1}$, circ.

La droite $(A'B')$, d'équation barycentrique $X + Y + 4Z = 0$, coupe (DG') en le point de coordonnées barycentriques $\mathcal{C}_1 = (c - 4b, 4a - c, b - a)$ tandis que la droite (GC) , d'équation barycentrique $X - Y = 0$, coupe (DG') en le point de coordonnées barycentriques $\mathcal{C}_2 = (-c, -c, a + b)$ (à noter que ces points peuvent être à l'infini).

Si $(a - b)(a + b - 2c) \neq 0$, ces deux points sont à distance finie et il suffit de montrer que $\frac{\mathcal{C}_1}{3(a - b)} + \frac{\mathcal{C}_2}{a + b - c}$ est égal à $2(X, Y, Z)$: c'est précisément là qu'intervient le calcul *laborieux* (mais victorieux) annoncé, et dont nous vous faisons grâce. Bien entendu, il aura fallu tenir compte des relations (1) et (1').

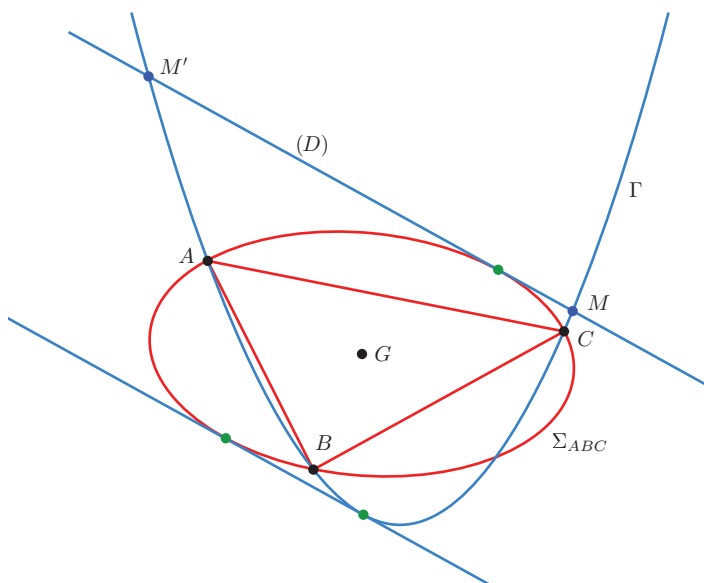
Le cas où $a - b = 0$ équivaut à $Z \in \{-1/3, 2/3\}$ et, de même, le cas où $a + b - 2c = 0$ équivaut à $X = Y$ ou $Z = 2/3$. Ces deux éventualités correspondent à $D \in \{A, B, C, A'', B'', C''\}$, où les points A'', B'', C'' sont les symétriques de A, B, C par rapport à G . Invariablement, la droite (GD) est à chaque fois une céviennne, et son image n'est plus à proprement parler une conique.

Cela ne nous interdit pas de faire preuve d'un peu de bonne volonté : si D est par exemple en A ou en A'' , la droite (GD) a pour équation $Y - Z = 0$ et, à bon droit, on peut convenir que son isotomique admet pour équation $ZX - XY = 0$, c'est-à-dire la conique dégénérée du faisceau, réunion de (BC) et de (AG) . En même temps, les points S et T se confondent en le milieu du segment $[BC]$ et la droite non définie (ST) a pour *position limite* la tangente en S à l'ellipse inscrite, c'est-à-dire la droite (BC) .

Cette dernière étant incluse dans la conique, il nous est loisible de considérer que le contact a encore lieu dans ce cas particulier dégénéré.

23.9. Une propriété affine remarquable de la parabole

Soit Γ une parabole et soit ABC un triangle qui y est inscrit. On note G le centre de gravité de ce triangle. Soit (D) l'inverse isotomique $\iota_{ABC}(\Gamma)$ de la parabole Γ (relativement au triangle ABC). La droite symétrique de (D) par rapport à G est tangente à Γ ; c'est donc une tangente commune à Γ et à l'ellipse de Steiner Σ_{ABC} .



Le calcul analytique en fait voir davantage et pousse à énoncer autrement le résultat.

23.10. Proposition. *Soit une conique \mathcal{C} circonscrite à un triangle ABC . Alors, elle est tangente au symétrique par rapport au centre de gravité G de ABC de son isotomique si, et seulement si, soit c'est une parabole, soit elle passe par G .*

Démonstration. Nous allons utiliser des coordonnées barycentriques relatives au système (A, B, C) . Notre conique \mathcal{C} , circonscrite à ABC admet une équation de la forme $pYZ + qXZ + rXY = 0$. Son inverse isotomique est une droite \mathcal{D} , d'équation $pX + qY + rZ = 0$. Déterminons l'équation de l'image \mathcal{D}' de \mathcal{D} par la symétrie de centre G , de matrice $2J - 3I$, où J est la matrice pleine de 1. Un calcul direct fournit (après réarrangement des termes) :

$$(2\sigma_1 - 3p)X + (2\sigma_1 - 3q)Y + (2\sigma_1 - 3r)Z = 0.$$

Cette droite \mathcal{D}' est tangente à la conique \mathcal{C} si, et seulement si, le vecteur

$$((2\sigma_1 - 3p), (2\sigma_1 - 3q), (2\sigma_1 - 3r))$$

est isotrope pour la forme quadratique définie par la matrice symétrique

$$\begin{bmatrix} p^2 & -pq & -pr \\ -pq & q^2 & -qr \\ -pr & -qr & r^2 \end{bmatrix}.$$

Notons Z l'expression obtenue :

$$\begin{aligned} Z &= p^2(2\sigma_1 - 3p)^2 + q^2(2\sigma_1 - 3q) + r^2(2\sigma_1 - 3r)^2 \\ &\quad - 2pq(2\sigma_1 - 3p)(2\sigma_1 - 3q) \\ &\quad - 2pr(2\sigma_1 - 3p)(2\sigma_1 - 3r) \\ &\quad - 2qr(2\sigma_1 - 3q)(2\sigma_1 - 3r). \end{aligned}$$

Développons :

$$\begin{aligned} Z &= 4\sigma_1^2(p^2 + q^2 + r^2 - 2pq - 2pr - 2qr) \\ &\quad - 12\sigma_1(p^3 + q^3 + r^3) \\ &\quad + 12\sigma_1((p+q)pq + (p+r)pr + (q+r)qr) \\ &\quad + 9(p^4 + q^4 + r^4) - 18(p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2). \end{aligned}$$

Nous utilisons alors les relations suivantes (où S_k désigne la k -ième somme de Newton) :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\ S_3 &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 \\ S_4 &= \sigma_1^4 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 \\ p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2 &= \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 \\ (p+q)pq + (p+r)pr + (q+r)qr &= \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3. \end{aligned}$$

L'expression Z devient :

$$\begin{aligned} Z &= 4\sigma_1^2(S_2 - 2\sigma_2) \\ &\quad - 12(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) \\ &\quad + 12(\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) \\ &\quad + 9(\sigma_1^4 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3) - 18(\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

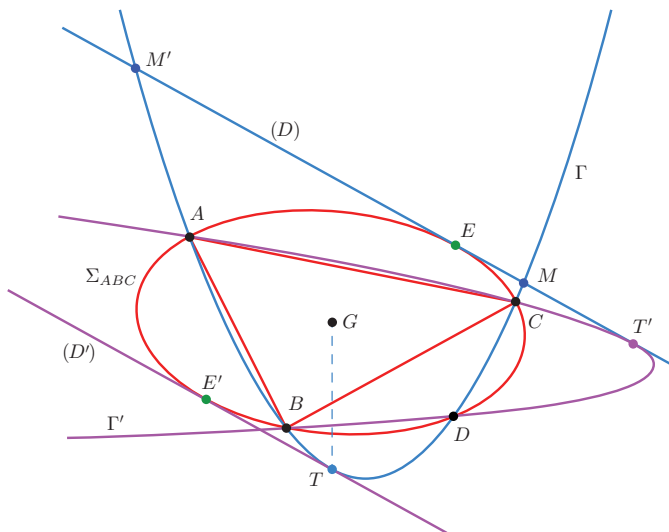
$$\begin{aligned} Z &= 4\sigma_1^2(\sigma_1^2 - 4\sigma_2) \\ &\quad - 3\sigma_1^4 + 12\sigma_1^2\sigma_2 + 0\sigma_1\sigma_3 + 0\sigma_2^2. \end{aligned}$$

D'où,

$$Z = \sigma_1^2(\sigma_1^2 - 4\sigma_2).$$

Ainsi, $Z = 0$ si, et seulement si, $p + q + r = 0$ ou $\sigma_1^2 - 4\sigma_2 = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, \mathcal{C} passe par G ou \mathcal{C} est une parabole. \square

23.11. Proposition. *Soit D un point de l'ellipse de Steiner Σ_{ABC} circonscrite d'un triangle ABC . Alors, les deux paraboles passant par les quatre points $ABCD$ ont leurs directions d'axes conjuguées par rapport à Σ_{ABC} . Les isotomiques de ces deux paraboles sont des droites parallèles. De plus, chacune de ces deux paraboles est tangente à l'inverse isotomique de l'autre. Si l'on appelle les points de contact T et T' , alors GT et GT' sont des diamètres conjugués de l'ellipse de Steiner parallèles aux axes de nos deux paraboles. Enfin, la droite TT' est tangente en D à l'ellipse de Steiner, ce qui revient à dire que la conique circonscrite au triangle ABC et passant par T et T' est une parabole.*



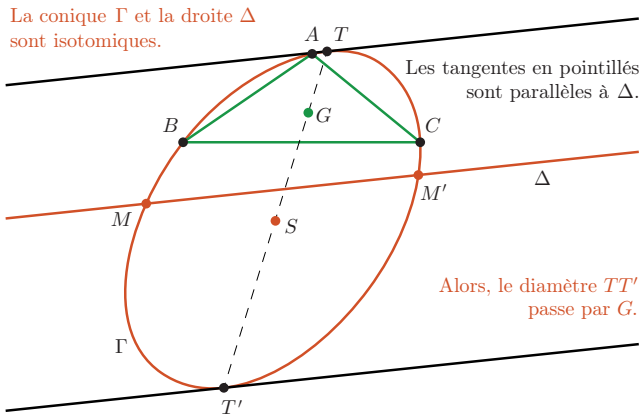
Démonstration. La première assertion a déjà été rencontrée à l'occasion de l'exercice 20.7, en page 280. Il s'agit tout d'abord d'établir ici que la droite GT donne la direction de l'axe de la parabole Γ . Cela revient à établir que la polaire du point à l'infini que définit D par isotomie, laquelle passe par T et le milieu de MM' , passe également par G . Mais cela va découler d'un calcul élémentaire sur les coordonnées barycentriques relatives au triangle ABC . Si $pYZ + qXZ + rXY = 0$ désigne toujours l'équation de Γ , l'équation de son isotomique MM' est bien entendu $pX + qY + rZ = 0$ et le point à l'infini de cette droite a ainsi pour coordonnées celles du produit vectoriel formel de (p, q, r) avec $(1, 1, 1)$, soit $(q - r, r - p, p - q)$.

Or, ce dernier triplet, écrit en colonne, est visiblement dans le noyau de la la jacobienne en $G = (1, 1, 1)$, donnée par la matrice ligne $2[q+r \ r+p \ p+q]$ ¹²¹.

Passons à la dernière assertion de la proposition. La polaire de T par rapport à Σ passe d'une part par E' et d'autre part par l'autre point d'intersection¹²² de Σ et de l'homothétique de la droite GT dans l'homothétie de centre E' et de rapport 2. Mais l'on sait que cette droite homothétique est la droite ED (voir encore l'exercice 20.7). Il s'ensuit que TD est tangente en D à Σ . On fait de même du côté de T' , si bien que TT' est tangente en D à l'ellipse de Steiner. L'inverse isotomique de la droite TT' est donc une parabole circonscrite, laquelle passe par T et T' puisque T et T' sont inverses isotomiques l'un de l'autre (pourquoi?). \square

23.12. Remarques

1. La parabole circonscrite passant par T et T' rencontre chacune des droites (D) et (D') en un seul point. Pourquoi?
2. Quel énoncé précis est sous-jacent au dessin suivant ?

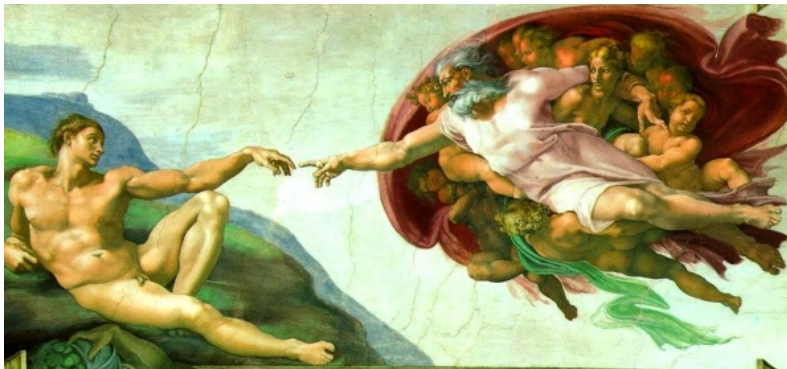


3. Le lecteur impétueux et pressé de se poser, en rapport avec ces questions, des problèmes de nature euclidienne devra patienter encore un peu, ou du moins se reporter dès à présent aux sections où se mêlagent l'anne et l'euclidien et où il pourra donner libre cours à sa verve géométrique pour faire de la géométrie à l'ancienne, où affine et euclidien

¹²¹Nul besoin que Γ soit une parabole ! Voir d'ailleurs le dessin qui suit.

¹²²Autre que le point E' , qui lui est diamétralement opposé sur Σ .

se donnent la main dans la danse cosmique¹²³.



Ce qui suit est copié mot pour mot dans Wikipedia, et ne figure pas dans le livre imprimé.

« La Création d'Adam est l'une des neuf fresques inspirées du livre de la Genèse, peintes par Michel-Ange sur la partie centrale de la voûte du plafond de la chapelle Sixtine, dans la cité du Vatican. Elle constitue la quatrième histoire de cette série de neuf, précédée par la Séparation de la Terre et des Eaux, et suivie par la Création d'Ève. Bien qu'évoquée relativement tôt dans la Genèse, donc dans la séquence des fresques ornant la voûte, la Création d'Adam n'a été achevée par Michel Ange que tardivement, vers 1511, alors que l'exécution de la voûte centrale dura de 1508 à 1512.

La Création d'Adam est une illustration du texte biblique du livre de la Genèse : 1, 26-27 : « Dieu créa l'homme à son image, à l'image de Dieu il le créa ». L'œuvre est particulièrement célèbre par le détail dans lequel l'index de Dieu, rejoignant celui d'Adam sans le toucher, donne vie à l'Homme.

⋮

Par sa force symbolique et esthétique, le geste liant Adam à Dieu est devenu l'une des références les plus célèbres du monde de l'art occidental, réutilisé dans d'autres œuvres sous une forme dérivée ou parodique. Il illustre le thème de la rencontre ou du don, par exemple dans le film E.T. l'extra-terrestre (1982) ou dans la religion fictive qu'est le Pastafarisme.

Le tableau est évoqué lors de l'épisode final de la saison 1 de la série Westworld. Le personnage de Robert Ford joué par Anthony Hopkins le décrit comme le tableau favori de son collègue décédé Arnold Weber, et reprend à son compte la théorie décrivant le cerveau humain autour de Dieu. »

¹²³ Ainsi pourra-t-il, entre autres, apprendre alors que les deux paraboles circonscrites au triangle ABC et passant par $D \in \Sigma_{ABC}$ auront leurs axes orthogonaux si, et seulement si, le point D est en le point de Steiner du triangle ABC , c'est-à-dire au point commun de l'ellipse de Steiner avec le cercle circonscrit (ABC).

24. Triangles autopolaires et triangles harpons

La notion de triangle autopolaire relativement à une conique, que nous retrouvons dans cette section¹²⁴, est, rappelons-le, la version géométrique en dimension 3 de la notion de base orthogonale pour une forme quadratique q . Nous allons voir, en particulier, que deux bases q -orthogonales vivent sur le cône isotrope d'une même forme quadratique q' . Commençons cependant par l'étude d'un problème moins familier pour les étudiants en géométrie, celui des triangles harpons relativement à une conique.

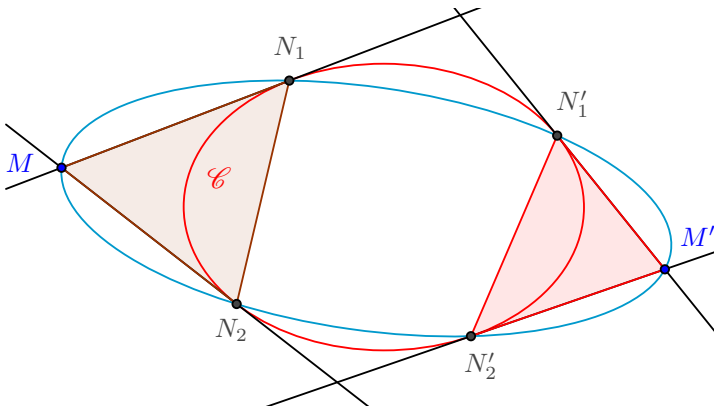
24.1. Deux triangles harpons à une même conique

Soit un espace vectoriel réel E dimension 3 et $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée ; une base q -bisotrope est une base relativement à laquelle la matrice de q prend la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est clair que q possède une base bisotrope si, et seulement si, la signature de q est $(2, 1)$. Nous allons montrer que dans ce cas aussi, *deux bases q -bisotropes de E vivent toujours, de même, sur un même cône isotrope*.

Cela se traduit géométriquement par le fait que, relativement à une conique non dégénérée \mathcal{C} , *les six sommets de deux triangles harpons sont coconiques*, où *triangle harpon* veut dire triangle dont deux sommets sont sur la conique et dont le troisième est le pôle de la droite qui les joint¹²⁵.



¹²⁴Qui est de nature essentiellement projective.

¹²⁵On pourrait aussi envisager pour ces triangles associés à une conique non dégénérée les vocables de « triangles nageoires » ou bien « triangles pilotes ». En tout cas, le sommet d'un tel triangle qui n'est pas sur la conique se distingue des deux autres ; on l'appellera le sommet du triangle harpon.

Nous allons donner une première preuve analytique de ce résultat, et en indiquerons plus loin (voir la sous-section V-24.5) une preuve plus savante, qui nous servira également à mieux comprendre une figure apparentée à celle, ci-après, de nos deux triangles harpons (en l'occurrence la deuxième figure de l'exercice de la page 345).

Démonstration

La conique \mathcal{C} admet, dans le repère ABC , pour équation barycentrique $X^2 + \alpha YZ = 0$, où α est un réel adéquat (cf. 22.29). L'équation de la tangente au point $A_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ est donnée par

$$2X_1X + \alpha Z_1Y + \alpha Y_1Z = 0,$$

qui s'écrit aussi en divisant par X_1^2 et en tenant compte de l'équation de \mathcal{C} , vérifiée par les coordonnées barycentriques de A_1 ,

$$\frac{2}{X_1}X - \frac{1}{Y_1}Y - \frac{1}{Z_1}Z = 0.$$

De même, l'équation de la tangente en A_2 s'écrit

$$\frac{2}{X_2}X - \frac{1}{Y_2}Y - \frac{1}{Z_2}Z = 0.$$

Il s'agit maintenant de démontrer que si un point $M = (X, Y, Z)$ est à l'intersection de ces deux tangentes, il appartient à la conique circonscrite passant par A_1 et A_2 , qui admet pour équation (cf. page 241) :

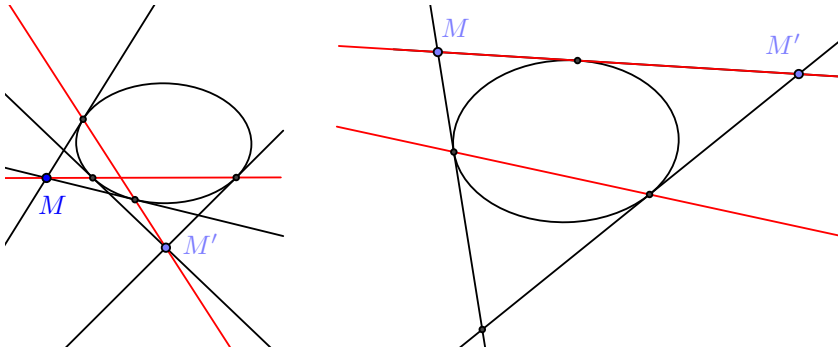
$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{X} & \frac{1}{Y} & \frac{1}{Z} \\ \frac{1}{X_1} & \frac{1}{Y_1} & \frac{1}{Z_1} \\ \frac{1}{X_2} & \frac{1}{Y_2} & \frac{1}{Z_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Or, une manipulation facile sur les colonnes du déterminant précédent montre que

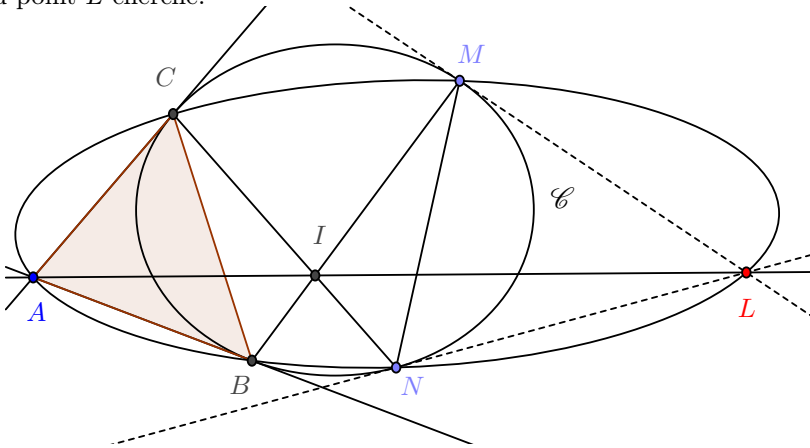
$$2X\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{Y} & \frac{1}{Z} \\ \frac{2X}{X_1} - \frac{Y}{Y_1} - \frac{Z}{Y_1} & \frac{1}{Y_1} & \frac{1}{Z_1} \\ \frac{2X}{X_2} - \frac{Y}{Y_2} - \frac{Z}{Z_2} & \frac{1}{Y_2} & \frac{1}{Z_2} \end{vmatrix},$$

et le reste est immédiat. \square

Il n'est pas inutile de remarquer que la conique circonscrite à nos deux triangles harpons dégénère si leurs deux sommets sont conjugués par rapport à \mathcal{C} ou bien se trouvent sur une même tangente à \mathcal{C} .

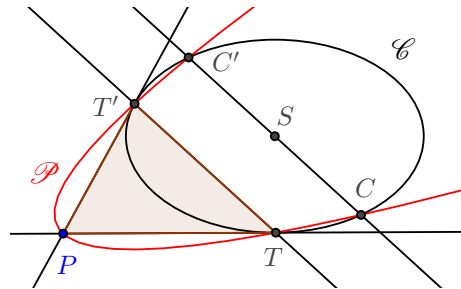


Il est aussi bon de noter que la donnée d'un triangle ABC harpon relativement à \mathcal{C} rend le dessin du pôle d'une corde quelconque MN facile avec Cabri. En effet, on joint le point A au point d'intersection I de BN et CM . La droite AI recoupe la conique passant par les points A, B, C, M et N au point L cherché.



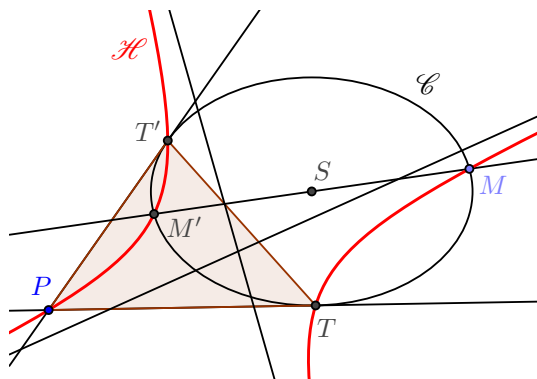
24.2. Exercice

- On se donne une conique \mathcal{C} . Soit PTT' un triangle harpon relativement à \mathcal{C} et soit un diamètre CC' de cette conique, parallèle à TT' . Montrer que la conique \mathcal{P} passant par P, T, T', C et C' est une parabole.



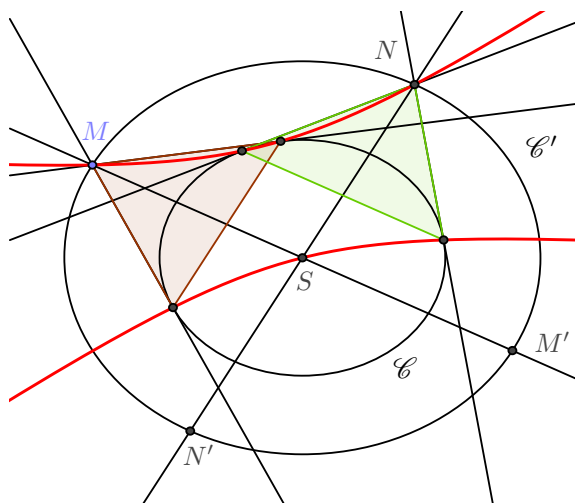
Indication. – Si α est le point à l'infini défini par la direction de CC' et β le pôle de ce diamètre, autre point à l'infini, alors la droite $\alpha\beta$ est tangente en β à la conique \mathcal{P} .

2. On considère maintenant un diamètre quelconque MM' de \mathcal{C} , distinct de CC' . Montrer que la conique \mathcal{H} passant par les points P, T, T', M et M' est toujours une hyperbole (facile), et en tracer les asymptotes.

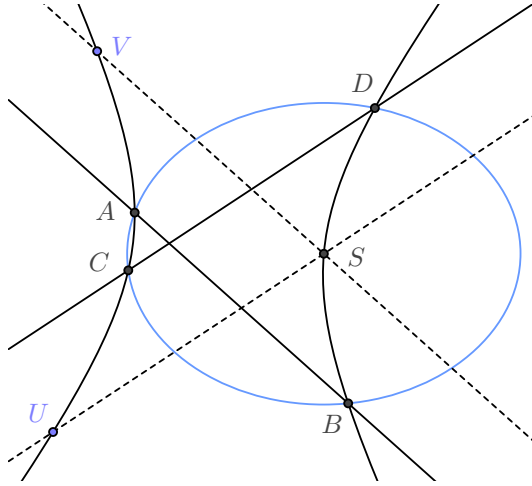


Indication. – Commencer par tâtonner avec Cabri : l’une des directions asymptotiques est donnée par le pôle de la droite MM' , qui est à l’infini et qui appartient à la conique \mathcal{H} ; l’autre est celle de la direction PS , conjuguée de celle de TT' . (On pourra utilement se reporter à la remarque 24.8, plus loin.)

24.3. Exercice. Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux coniques homothétiques ayant un même centre S , et soient MM' et NN' deux de leurs diamètres conjugués. Montrer que la conique circonscrite aux triangles harpons de sommets M et N passe par le centre S .

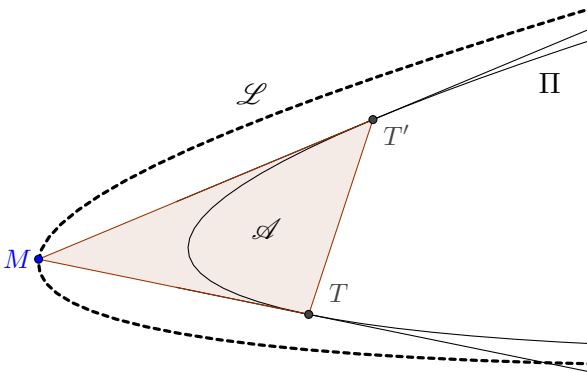


À quelle condition l'hyperbole apparaissant sur le dessin affine qui suit devient-elle une parabole? Les points U et V sont choisis sur deux diamètres conjugués, si bien que leurs polaires respectives (AB) et (CD) par rapport à l'ellipse bleue sont de directions conjuguées, et la conique passant par A, B, C, D et le centre O passe également par U et V (d'après Poulbot).



La réponse est qu'il est nécessaire et suffisant que le produit $OU \cdot OV$ des longueurs concernées soit égal à 2, une fois que l'on a choisi sur chacun des axes OU et OV comme unité de mesure les demi-diamètres correspondants.

24.4. Exercice. Chercher le lieu \mathcal{L} des sommets M des triangles harpons relativement à une parabole Π d'un plan affine réel et qui sont d'aire \mathcal{A} donnée.



Indication. – Il est commode de choisir un repère orthonormé dans lequel la parabole Π ait une équation de la forme $x^2 = 2py$; on pourra remarquer alors que le point courant de Π est $M(t)$, de coordonnées $(2pt, 2pt^2)$. Si t et u , avec $u > t$, sont deux scalaires, on trouvera que le sommet M du triangle harpon $M(t)MM(u)$ admet pour coordonnées $(p(t+u), 2ptu)$, puis que l'aire de ce même triangle (convenablement orienté) est $2p^2(u-t)^3$.

En posant $\mathcal{A} = 2p^2\alpha^3$, on se ramène visiblement à la condition nécessaire et suffisante $u = t + \alpha$, de sorte que le lieu du sommet M est paramétré par $t \mapsto p \times (2t + \alpha, 2t(t + \alpha))$. On montrera alors que \mathcal{L} est l'image de Π par une certaine translation.

Indication (variante plus généreuse). – Choisir un repère affine $(\vec{e}_1, \vec{e}_2; \Omega)$, où Π admet une équation de la forme $y = x^2$. Le vecteur $(1, 2x)$ est alors un vecteur directeur de la tangente à Π en $M(x, y)$. Si $M(x_0, y_0)$ est le sommet d'un des triangles harpons et $M_1(x_1, x_1^2)$ et $M_2(x_2, x_2^2)$ ses points d'appui sur la parabole, les abscisses x_1 et x_2 vérifient chacune l'équation

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & 1 \\ x^2 - y_0 & 2x \end{vmatrix} = x^2 - 2xx_0 + y_0 = 0,$$

et l'on a aussi

$$\pm 2\mathcal{A} = \det_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}) = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ x_1^2 - y_0 & x_2^2 - y_0 \end{vmatrix}.$$

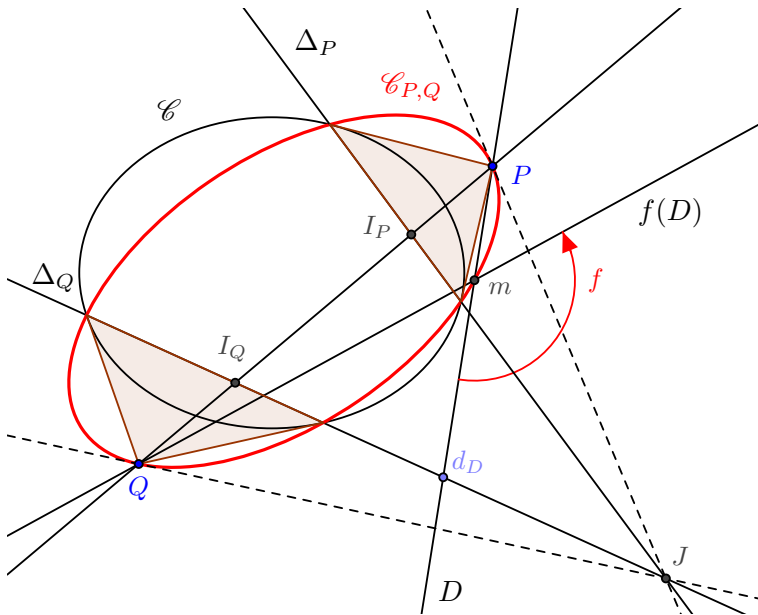
On a donc $x_1 + x_2 = 2x_0$, $x_1x_2 = y_0$ et $(x_2 - x_1)^2 = 4x_0^2 - 4y_0$, si bien que

$$\pm \mathcal{A} = (x_1 - x_2)(x_0^2 - y_0), \quad \text{ou encore } \mathcal{A} = 2|x_0^2 - y_0|^{3/2}.$$

Le lieu cherché est donc une parabole image de Γ par translation, dans la direction de son axe.

24.5. Caractérisation homographique de la conique circonscrite à deux triangles harpons

On démarre avec deux points P et Q et une conique \mathcal{C} ne passant pas par l'un ou l'autre de ces points. L'ensemble \mathcal{D}_P des droites passant par P , tout comme l'ensemble \mathcal{D}_Q des droites passant par Q , est un espace projectif de dimension 1. On se propose de définir, avec les données en présence, une homographie du premier espace dans le second. Si donc (D) est une droite quelconque passant par P , on lui associe la polaire $f(D)$ du point d_D , intersection de la droite (D) et de la polaire Δ_Q de Q par rapport à la conique \mathcal{C} . Cette droite $f(D)$ passe évidemment par le point Q .



Commençons par remarquer que l'application f ainsi définie est bien une homographie¹²⁶. Il est d'usage de se contenter dans pareil cas de l'argument suivant : l'application $f : \mathcal{D}_P \rightarrow \mathcal{D}_Q$ est algébrique et bijective, et f^{-1} est aussi algébrique¹²⁷ ; donc, f est homographique ! D'ailleurs, on obtient la dite application réciproque en inversant les rôles de P et de Q !

24.6. Proposition. *Le lieu du point d'intersection m de la droite D_P et de son image $f(D_P)$ par l'homographie f est une conique, que l'on notera $\mathcal{C}_{P,Q}$. Plus précisément, cette conique est la conique circonscrite aux deux triangles harpons de sommets respectifs P et Q relativement à la conique \mathcal{C} .*

24.7. Remarque. On vérifie assez facilement que la tangente en Q à $\mathcal{C}_{P,Q}$ n'est autre que $f(PQ)$ et que la tangente en P est $f^{-1}(PQ)$; ces deux tangentes, ainsi que les droites Δ_P et Δ_Q , concourent en le point J , pôle commun de (PQ) par rapport à nos deux coniques.

¹²⁶Nous ne saurons conseiller assez l'excellent livre de Bruno Ingrao...

¹²⁷Mmmmmouais... enfin, si l'on veut être rigoureux, on montrera que f de \mathcal{D}_P vers \mathcal{D}_Q conserve les birapports. Pour ce faire, on l'écrira sous la forme $f_2 \circ f_1$, où f_1 envoie D sur d_D et où f_2 envoie d_D sur sa polaire. L'une et l'autre se relèvent en des applications linéaires entre des sous-espaces du vectorialisé.

24.8. Remarque. Décidons de faire du point d_p le centre S de la conique $\mathcal{C}_{P,Q}$, ce qui revient simplement à prendre pour droite à l'infini la droite polaire de ce point relativement à \mathcal{C} , c'est-à-dire la droite $f(D_P)$. La droite Δ_Q devient alors un diamètre MM' de \mathcal{C} et la conique $\mathcal{C}_{P,Q}$ devient une hyperbole, dont les directions asymptotiques sont les points Q et m . Le point Q est le pôle du diamètre MM' et le point m est la direction à l'infini de la droite joignant P au centre $S = d_p$ de la conique \mathcal{C} . On a là la justification qui manquait dans la question 2 de l'exercice 24.2.

24.9. Deux triangles autopolaires sont sur une même conique

Nous nous contenterons sur ce sujet assez classique du strict minimum. Rappelons qu'un triangle ABC est autopolaire par rapport à une conique \mathcal{C} si chacun de ses côtés est la polaire, relativement à \mathcal{C} , du sommet qui lui est opposé. Cela revient donc à dire que l'équation de la conique dans la base affine définie par les sommets A, B et C est de la forme

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 0, \quad \text{où } (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0),$$

ou encore que la base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ du vectorialisé \mathcal{E}^v est q -orthogonale, où q est une forme quadratique dont le cône définit la conique \mathcal{C} .

Nous allons montrer ci-après que *deux bases q -orthogonales de E vivent toujours sur un même cône isotrope*, ce qui se traduit géométriquement par le fait que, relativement à une conique non dégénérée \mathcal{C} , *les six sommets de deux triangles autopolaires sont coconiques*.

Démonstration.— On choisit le premier des deux triangles, soit ABC , comme base affine, et désignons par $M_1M_2M_3$ le second. L'équation de la conique \mathcal{C} s'écrit donc $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 0$. Il s'agira alors d'établir, sous l'hypothèse que $M_1M_2M_3$ est autopolaire, que le déterminant des inverses des coordonnées barycentriques des sommets M_1, M_2 et M_3 est nul (cf. exercice 18.6). En polarisant, nous avons les trois conditions

$$\begin{aligned} \alpha X_1 X_2 + \beta Y_1 Y_2 + \gamma Z_1 Z_2 &= 0 \\ \alpha X_2 X_3 + \beta Y_2 Y_3 + \gamma Z_2 Z_3 &= 0 \\ \alpha X_1 X_3 + \beta Y_1 Y_3 + \gamma Z_1 Z_3 &= 0. \end{aligned}$$

Comme $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_1 X_2 & Y_1 Y_2 & Z_1 Z_2 \\ X_2 X_3 & Y_2 Y_3 & Z_2 Z_3 \\ X_1 X_3 & Y_1 Y_3 & Z_1 Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{X_1} & \frac{1}{Y_1} & \frac{1}{Z_1} \\ \frac{1}{X_2} & \frac{1}{Y_2} & \frac{1}{Z_2} \\ \frac{1}{X_3} & \frac{1}{Y_3} & \frac{1}{Z_3} \end{vmatrix}$$

est nul, et cela est exactement la condition de coconicité évoquée juste plus haut ! □

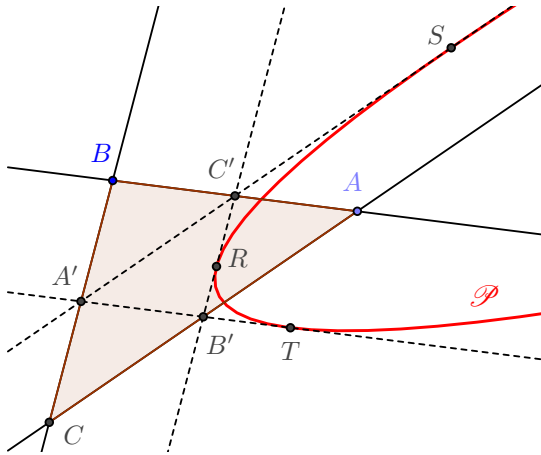
Nous terminons cette section par un résultat qui ne manque pas d'intérêt. Nous introduisons auparavant un vocable qui nous en facilitera l'énoncé : quand un triangle ABC est autopolaire relativement à une conique \mathcal{C} , on dira reconvencionnellement que la conique \mathcal{C} est autopolaire relativement à ABC .

24.10. Proposition. *Les paraboles autopolaires relativement à un triangle ABC forment un faisceau, qui coïncide avec le faisceau linéaire (tangentiell¹²⁸) des coniques tangentes aux trois côtés du triangle médian et à la droite de l'infini.*

Démonstration.—

L'équation tangentielle d'une conique autopolaire est

$$\alpha U^2 + \beta V^2 + \gamma W^2 = 0, \quad \text{avec } \alpha\beta\gamma \neq 0.$$



Une telle conique sera donc tangente à la droite de l'infini si, et seulement si, la condition $\alpha + \beta + \gamma = 0$ est vérifiée ; vu l'équation tangentielle, cela équivaut au fait que les quatre droites (dont l'une est effectivement la droite de l'infini), de coordonnées tangentielles $(1, \pm 1, \pm 1)$, sont tangentes à la conique.

Comme cela a été annoncé dans notre brève présentation des faisceaux *tangentiels*, nous vérifions par acquit de conscience que l'ensemble des formes quadratiques de la forme obtenue engendre bien un plan. \square

¹²⁸Nous connaissons les faisceaux constitués des coniques passant par quatre points ; un faisceau *tangentiell* est à présent l'ensemble des coniques tangentes à quatre droites. Leurs équations tangentielles engendrent un plan de l'espace vectoriel des formes quadratiques sur le *dual* de \mathcal{E}^v . Il y a là tout un monde à découvrir, mais, à notre grand regret, nous nous contenterons d'en entrebâiller une porte dérobée, à la faveur de cette note de bas de page ou, de loin en loin, à l'occasion de telle ou telle remarque.

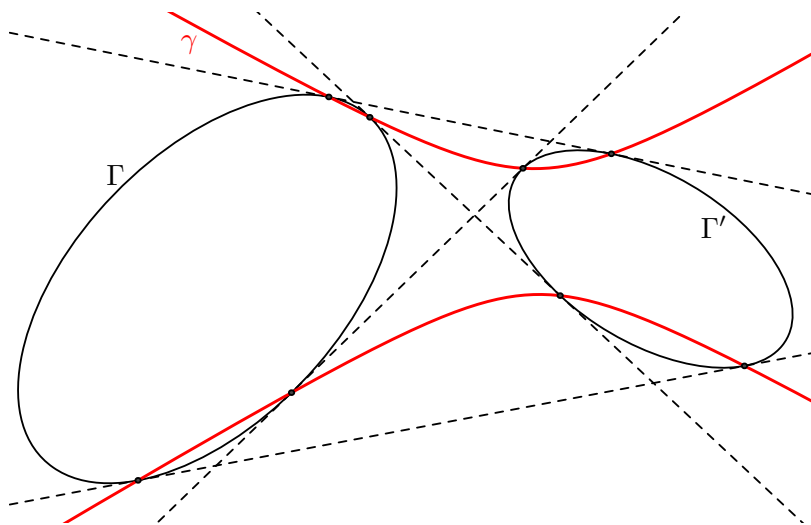
24.11. Remarque. La construction d'une telle parabole, qui plus est tangente, par exemple, en R au côté $B'C'$ du triangle médian est facilitée par les faits suivants et par les considérations rencontrées en 19.7. Les trois droites AR , BS et CT sont parallèles et donnent la direction de l'axe de la parabole. De plus, le triplet (T, R, B) est formé de points alignés, tout comme les triplets (S, A, T) ou (S, R, C) ; nous notons enfin, au passage, que la division $[S, s, C', A']$ est harmonique.

On trouvera un récapitulatif sur les familles de coniques autopolaires par rapport à un triangle donné au VII-9, page 546.

24.12. Exercice. Soit un triangle (ABC) , et soit $\Gamma = \Sigma_{ABC}$ son ellipse de Steiner circonscrite. Si C' est le pôle de (AB) , montrer que l'équation barycentrique de Γ par rapport au triangle harpon (ABC') est $Z^2 = XY$. Inversement, si une conique Γ admet cette équation barycentrique par rapport à un triangle harpon (ABC') , alors il existe C élément de la conique tel que $\Gamma = \Sigma_{ABC}$.

Indication. — Les points A et B étant donnés, les points C et C' se déduisent l'un de l'autre par une application affine simple.

25. Huit points coconiques



Que nous montre cette figure? Les deux coniques noires, non dégénérées et en position générale, admettent quatre tangentes communes — les droites en pointillés — qui touchent nos coniques, en tout en deux points chacune. Ainsi, les huit points obtenus sont *coconiques*.

Limitons-nous au cas générique où deux coniques Γ et Γ' admettent un triangle autopolaire commun dans le complété projectif du plan complexe. Elles ont alors des équations ponctuelles (quadratiques non dégénérées) de la forme $AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 0$ et $A'X^2 + B'Y^2 + C'Z^2 = 0$, et donc des équations tangentielles, respectivement $aU^2 + bV^2 + cW^2 = 0$ et $a'U^2 + b'V^2 + c'W^2 = 0$ (avec $a = 1/A$, etc.).

Les tangentes communes ont une équation $uX + vY + wZ = 0$ dans laquelle les triplets (u, v, w) satisfont les deux équations (tangentielles) ci-dessus. En d'autres termes, (u^2, v^2, w^2) sont proportionnels au produit vectoriel formel des triplets (a, b, c) et (a', b', c') ¹²⁹.

La droite d'équation $uX + vY + wZ = 0$ touche Γ en le point de coordonnées homogènes (au, bv, cw) ; montrons que ce point appartient à la conique γ d'équation

$$(bc' + b'c)X^2 + (ab' + a'b)Y^2 + (ca' + c'a)Z^2 \stackrel{(1)}{=} 0.$$

Il suffit pour cela de vérifier que

$$a^2(b^2c'^2 - b'^2c^2) + b^2(c^2a'^2 - c'^2a^2) + c^2(a^2b'^2 - a'^2b^2) = 0.$$

Ainsi, les quatre points de contact de nos tangentes avec Γ sont sur γ , et il en va de même des points de contact avec Γ' .

25.1. Remarques

- ▷ Il n'est pas nécessaire dans la pratique de faire l'effort de déterminer un triangle autopolaire commun à Γ et Γ' , l'on peut aussi procéder comme il suit : les équations *tangentielles* des coniques étant définies par des matrices M et M' (symétriques, de format $(3, 3)$), l'équation *ponctuelle* de γ est alors définie par la matrice $C(M + M') - C(M) - C(M')$, où la notation $C(A)$ désigne la transposée de la comatrice de A . Il est conseillé de vérifier que l'équation (1) ci-dessus est effectivement un cas particulier de cette formule lorsque les matrices M et M' sont diagonales.

L'intérêt de cette formule et sa généralité : l'existence d'un triangle autopolaire commun n'est plus supposée; le lecteur est invité à vérifier que, lorsque la conique tangentielle Γ' dégénère en la réunion des faisceaux linéaires de droites de bases respectives M et M' , on retrouve le fait que *les triangles harpons menés à partir des deux points M et M' à Γ sont coconiques*; voir la section V-24 et, plus précisément, la figure de la page 342.

- ▷ Comme le lecteur s'en doute, on a aussi l'énoncé dual qui suit : *si deux coniques, non dégénérées et en position générale, admettent quatre*

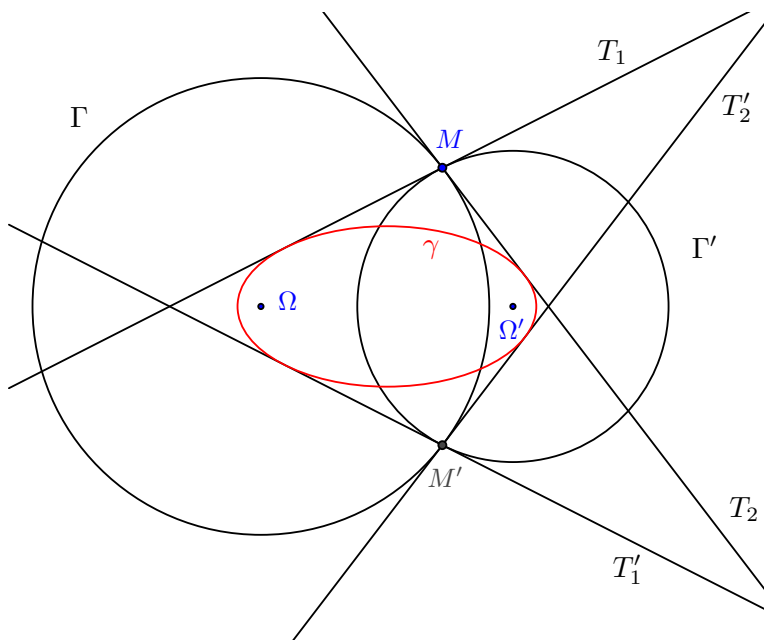
¹²⁹Comme (u, v, w) et $(-u, -v, -w)$ définissent une même droite, cela fait bien en général quatre droites, comme nous l'avions annoncé.

points communs, les huit tangentes qu'ils ont en tout avec les deux coniques sont tangentes à une même conique.

C'est la situation miroir de la précédente : si les équations *ponctuelles* des deux coniques sont définies par des matrices M et M' (symétriques, de format $(3, 3)$), l'équation *tangentielle* de la conique γ est définie par la matrice

$$C(M + M') - C(M) - C(M').$$

- ▷ À titre d'exemple¹³⁰, considérons deux cercles Γ et Γ' , de centres respectifs Ω et Ω' , sécants en deux points M et M' ; en ces deux points, ces cercles admettent à eux deux quatre tangentes T_1, T_2, T'_1, T'_2 . Il existe alors une (unique) conique γ de foyers Ω et Ω' tangente à ces quatre droites¹³¹.



En effet, les coniques Γ et Γ' se coupent, outre les points M et M' , en les points cycliques I et J . En plus des quatre tangentes à ces coniques déjà définies, il faut compter les deux droites isotropes passant par le point Ω et celles passant par Ω' . Dire qu'une conique γ est tangente à ces isotropes revient à dire que Ω et Ω' en sont les foyers.

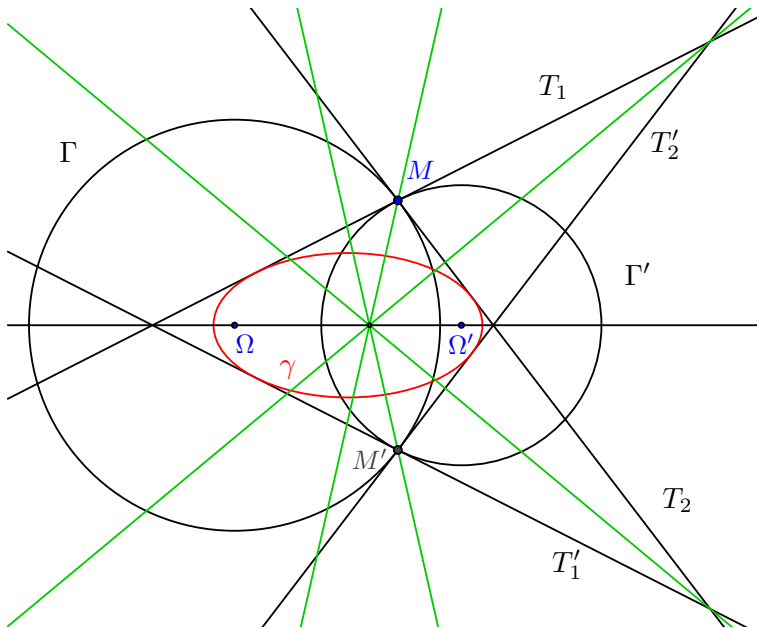
¹³⁰Nous nous permettons « une toute dernière » et rare fois de considérer une situation qui relève du cadre *affine euclidien*, et qui en toute logique devrait trouver sa place naturelle dans le chapitre suivant.

¹³¹La donnée des deux foyers et d'une tangente suffit pour déterminer une conique. Ici, nous avons trois informations supplémentaires du fait de la présence de quatre tangentes connues.

25.2. Remarque. Donner un foyer F d'une conique revient à en donner deux tangentes, savoir les droites isotropes FI et FJ ; en d'autres termes, donner deux foyers et une tangente revient à donner *cinq* tangentes, ce qui suffit amplement pour définir la conique. En fait, si l'on impose deux foyers F, F' et trois tangentes T, T', T'' formant un triangle \mathcal{T} , il existe une conique admettant ces deux foyers *et* ces trois tangentes si, et seulement si, les points F et F' sont *isogonaux* par rapport à \mathcal{T} .

Dans la figure suivante, de mystérieuses droites vertes concourent en un point de la droite joignant les centres des cercles; si un point P non situé sur $(\Omega\Omega')$ est à l'intersection de deux de nos quatre tangentes (par exemple $P = M$, mais il y en a trois autres), on prend comme droite verte une certaine bissectrice de la paire de droites $((P\Omega), (P\Omega'))$.

Le lecteur est invité à lever le voile... On rappelle à toutes fins utiles que, si l'on mène d'un point P du plan deux tangentes à une conique de foyers F, F' , alors cette paire de tangentes a les mêmes bissectrices que la paire de droites (MF, MF') ¹³² — c'est un théorème de Poncelet. Il eût été possible de tracer quelques droites vertes de plus, toujours concourantes, mais la figure n'y eût rien gagné en lisibilité.



¹³²Cette indication ne suffit pas, bien sûr, ce serait trop facile! Il faut encore noter que la figure est symétrique par rapport à $(\Omega\Omega')$ et voir en le point de concours le centre du cercle inscrit à certain triangle.

26. Un sujet d'examen : l'isothymie

Le problème qui suit est la grosse moitié d'un problème de fin de semestre de L2, adapté aux notations du présent ouvrage ; on en trouvera la seconde partie, indépendante, à la fin du chapitre VI.

Problème.—

On se place dans le complété projectif $\mathbb{P}(\mathcal{E}^v)$ d'un plan affine réel \mathcal{E} et l'on suppose donnée une base barycentrique (A, B, C) . Nous étudions l'analogie dual de l'isotomie : l'*inversion isothymique*, qui à une droite projective en associe une autre.

1. Soit Δ la droite projective d'équation barycentrique

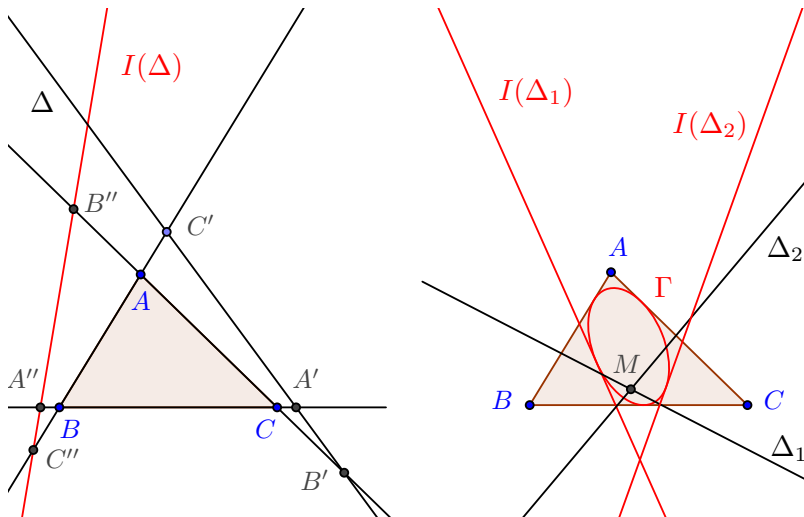
$$uX + vY + wZ = 0;$$

on lui associe la droite $\Delta' = I(\Delta)$, dite *inverse isothymique* de Δ , d'équation barycentrique

$$vwX + wuY + uvZ \stackrel{(1)}{=} 0.$$

On vient de mettre en évidence une application I définie sur les droites.

- a) Quelles sont les droites Δ à exclure de cette définition, c'est-à-dire pour lesquelles le membre de gauche de l'équation (1) est identiquement nul ?
 - b) Sachant que le triplet (u, v, w) n'est défini qu'à un scalaire multiplicatif près, vérifier que cette définition ne dépend pas du choix qui s'ensuit.
 - c) Quelles sont les droites Δ pour lesquelles $I(\Delta)$ est un des côtés du triangle (ABC) ?
 - d) Quelles sont les droites Δ pour lesquelles $I(\Delta) = \Delta$?
 - e) Préciser pour quelles droites Δ les droites $I(\Delta)$ et $I(I(\Delta))$ sont bien définies ; vérifier alors que $I(I(\Delta)) = \Delta$.
2. a) Montrer que $I(\Delta)$ est la droite de l'infini si, et seulement si, Δ est la droite de l'infini.
 - b) Pour une autre droite Δ , donner de $I(\Delta)$ une construction géométrique ; on pourra examiner les intersections de ces droites avec les côtés du triangle (ABC) et s'inspirer de l'inversion isotomique.



- c) Retrouver alors les solutions de l'équation $I(\Delta) = \Delta$.
3. On donne un point $M(X_0, Y_0, Z_0)$, avec $X_0 Y_0 Z_0 \neq 0$, et l'on désigne par \mathcal{F}_M l'ensemble des droites projectives passant par M .
- Lorsque Δ décrit \mathcal{F}_M , montrer que $I(\Delta)$ reste tangente à une conique Γ inscrite dans (ABC) ¹³³.
 - Quelles sont les droites Δ de \mathcal{F}_M pour lesquelles $I(\Delta)$ est un des côtés du triangle ?
 - Montrer que Γ est une parabole si, et seulement si, M est un point à l'infini. Quelle est alors la direction de l'axe de Γ ?
 - La conique Γ touche les trois côtés (BC) , (CA) et (AB) en des points P_A , P_B et P_C ; montrer que les droites (AP_A) , (BP_B) et (CP_C) sont les céviennes du point $M' = \iota(M)$, l'inverse isotomique de M .
 - Pour quel point M la conique Γ est-elle la conique de Steiner inscrite du triangle (ABC) ?
 - Pour quels points M la conique Γ admet-elle M pour centre ?

Indications et éléments de solution.—

- Il faut et il suffit pour cela que deux des trois coefficients u, v, w soient nuls. Nous excluons donc les trois côtés du triangle.
 - Par exemple, on obtient le côté (BC) du triangle, d'équation barycentrique $X=0$, si, et seulement si, $u = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, Δ passe par le sommet opposé A .

¹³³On dit que $I(\Delta)$ enveloppe la courbe Γ .

d) On prouvera facilement que $I(\Delta) = \Delta$ si, et seulement si, $u^2 = v^2 = w^2$ et l'on obtiendra alors *quatre* droites fixes, la droite de l'infini et les droites passant par les milieux de deux des côtés du triangle.

e) La droite $I(I(\Delta))$ est bien définie si, et seulement si, Δ ne passe par aucun des trois sommets; la fin est alors immédiate.

2. a) Cela résulte de 1.d) et 1.e).

b) Nous pouvons nous restreindre aux droites non céviennes : soit Δ , d'équation barycentrique $uX + vY + wZ = 0$; elle coupe le côté (BC) en le point $(0, -w, v)$ alors que $I(\Delta)$ le coupe en $(0, -v, w)$ qui est le symétrique du précédent par rapport au milieu de $[BC]$.

Nous énonçons donc : *la droite $I(\Delta)$ est celle qui passe par les symétriques des points d'intersection de Δ avec les côtés par rapport aux milieux respectifs de ces côtés.*

Remarques.— Cet alignement des trois points est plaisant à constater, mais la construction de *deux* des trois points suffit pour une construction effective.

Il est suggéré au lecteur de retrouver l'alignement grâce au théorème de Ménélaüs.

3. a) Une droite Δ est dans \mathcal{F}_M si, et seulement si, son équation barycentrique est de la forme $uX + vY + wZ = 0$, avec $uX_0 + vY_0 + wZ_0 = 0$. Les droites $I(\Delta)$ sont alors tangentes à la conique Γ d'équation tangentielle

$$vwX_0 + wuY_0 + uvZ_0 = 0,$$

et cette conique est inscrite dans le triangle.

b) Le faisceau de droites \mathcal{F}_M contient trois droites dont les isothymiques sont les côtés : ce sont les droites (AM) , (BM) et (CM) ; cela explique que Γ soit tangente à ces trois images.

c) Le faisceau \mathcal{F}_M contient la droite de l'infini si, et seulement si, le point M est lui-même à l'infini.

d) En passant par exemple par l'équation barycentrique (ponctuelle) de Γ , que l'on obtient par inversion de la matrice de la forme quadratique $vwX_0 + wuY_0 + uvZ_0$ (en (u, v, w)), on trouve que Γ touche (BC) en le point $P_A(0, Y_0, Z_0)$ et l'on vérifie tout de suite que $P_A \in (AM')$, avec $M' = \iota(M)$.

e) Le centre S de Γ étant le pôle de la droite de l'infini, il a pour coordonnées barycentriques $(Y_0 + Z_0, \dots)$, et l'on vérifie¹³⁴ immédiatement qu'il coïncide avec M si, et seulement si, M est le point G ou est à l'infini.

¹³⁴Écrire $S = M$ revient à chercher les vecteurs propres réels d'une matrice de taille 3×3 .