Au moment où les regards sont, pour ce qui est des choix éducatifs, tournés vers les mathématiques financières, les mathématiques de l'information et celles utiles en intelligence artificielle, aux probabilistes et aux autres statisticiens, il est rassurant de constater qu'il existe encore des personnes passionnées de mathématiques à l'ancienne et en particulier pour la géométrie de nos grands-pères. C'est la première pensée qui me vient face au joli livre dont il est question ici, livre qui traite en effet comme son titre l'indique de formes quadratiques et de géométrie. Je ne fais pas partie personnellement de la communauté « des esprits gémissants en proie aux longs ennuis », qui pleurent sans cesse sur l'état mathématique du monde et sur celui des choix pécuniaires et politiques qui sont faits en haut lieu pour notre discipline reine. Le monde change, et changent avec lui les besoins et les appétences, et force est de constater qu'en matière d'éducation les sociétés stagnantes, qui choisissent l'immobilité contre le changement, sont tôt ou tard laissées pour compte. Vive l'informatique et vive donc les mathématiques appliquées. Mais continuons à faire, même s'il le faut en cachette, des mathématiques désuètes et en particulier de la géométrie à la manière d'Apollonius de Perge et de Jakob Steiner.

Cela dit, précisons d'emblée que le livre qui nous occupe ici est novateur dans l'exposé des thèmes classiques qu'il aborde et qu'il ne s'agit aucunement d'une version remâchée de livres plus anciens concernés par le sujet. Nos auteurs font il est vrai ici de l'ancien, mais avec des idées et des approches nouvelles. Voici donc quelques commentaires au sujet de ce petit camée, écrits en vrac après quelques heures passées en compagnie des quatre artistes qui l'ont scuplté. Je ne m'étendrai pas trop sur l'enchantement premier que procure l'ouvrage par la qualité de sa fabrication et la beauté des très nombreuses figures qui parsèment ses pages. J'avoue ensuite faire partie de ces honnêtes gens qui apprécient fortement la lecture de la préface et/ou de l'avant-propos d'un livre de maths. Je ne puis que me féliciter subséquemment si les mathématiques qui viennent ensuite sont écrites dans un style clair et bien articulé. Allons donc ensemble vers l'introduction, qui est signée par le troisième auteur. Je ne vais pas m'attarder sur cet exercice de style auquel nous a habitué R. Mneimné, d'abord dans ses « éléments de géométrie », puis dans sa « réduction des endomorphismes ». Je laisserai à d'autres que moi le soin de le faire. J'y relève simplement l'inattendu dessin de la « Quadratic City » et de ses quatre portes, que nos compères ont parcouru tour à tour et dans tous les sens [1]. Suit un avant-propos sur les formes quadratiques, qui reprend non sans redondance quelques idées mathématiques évoquées dans la préface. Préface et avant-propos devraient interpeller l'agrégatif tout comme le professeur de prépa, qui n'a d'ailleurs plus à enseigner les « fq » et encore moins la géométrie des coniques.

Le premier tiers du livre est une introduction aux formes quadratiques. L'approche au moyen de la dualité y est privilégiée et défendue avec passion (c'est l'une des portes de la citadelle quadratique). Les auteurs n'en négligent pour autant pas l'approche par congruence matricielle (cela en est une autre). Une fois les fondements solidement pourvus et le problème de la classification formulé, le propos se déroule comme un grand fleuve tranquille, et débouche sur l'étude des groupes de Witt et de Grothendieck-Witt et celle des algèbres de Clifford. Ces noms majestueux ne devraient aucunement effrayer le lecteur débutant, car ce n'est point là où réside l'âme de ce chapitre. Le lecteur pressé comme j'ai été se contentera de comprendre la question subtile de la classification, une fois « neutralisés » les espaces hyperboliques. Il est clair que c'est vers l'orthogonalité, version algébrique de la polarité relativement à une conique, que se tournera plutôt le lecteur intéressé par la géométrie. Les algèbres de Clifford, qui sont des généralisations des algèbres de quaternions et des algèbres de matrices (à coefficients dans des corps pas nécessairement commutatifs) sont introduites et étudiées de façon particulièrement élégante, exemples et commentaires nombreux à l'ap-

1. Ces portes sont censées représenter les quatre approches possibles de la théorie des formes quadratiques.

pui. Peu de chose en revanche est dit au sujet des groupes spinoriels correspondants, et ce n'est au fond pas plus mal, vu la taille imposante de l'ouvrage qui voisine les six cents pages. Un court chapitre, qui ne manque point d'élégance, s'intercale dans l'exposé de cette partie et traite des systèmes de Coxeter. Il pourrait servir à l'avenir comme sujet de Tipe pour les élèves qui veulent approcher les systèmes de racines et les diagrammes de Dynkin.

La deuxième partie du livre est un éloge de la géométrie affine, dont les coniques et l'isotomie en sont les ustensiles et les finalités. Éloge funéraire d'une chose inutile ? Non point ! Cette géométrie a encore de beaux jours devant elle, précisément par son côté défraîchi et ubiquiste à la fois. La catégorie Veto qui y révèle ses atours pour la première fois est une façon déguisée de faire de l'ancien avec des tissus et des couleurs modernes [2]. Le calcul analytique avec les coordonnées barycentriques est ici roi. Les faisceaux de coniques variés et multipliés font l'objet d'une étude systématique et d'exercices nombreux et originaux. Deux ou trois dessins utiles, mais pas indispensables, manquent à l'appel. Ils figurent néanmoins dans une version actualisée de cette partie, offerte au public, sur le site de l'éditeur. L'étude des faisceaux de coniques me semble être une excellente introduction à la géométrie algébrique, dans la mesure où elle offre un premier support pour l'intuition et un premier territoire pour appréhender l'idée de dégénérescence.

La troisième partie est consacrée à la géométrie affine euclidienne et aux propriétés correspondantes des coniques, notamment les foyers et les asymptotes quand elles sont orthogonales. Des dessins admirables, exécutés avec soin et en couleurs, viennent soutenir le propos et égayer l'oeil. Il ne fait aucun doute que l'élaboration de cet ouvrage a dû procurer un véritable bonheur au groupe de nos quatre mousquetaires. Le début de cette partie est un peu ardu, mais une fois cet obstacle surmonté, le cheminement est aisé, et un joli dialogue se fait jour entre les figures et les situations rencontrées dans le cadre affine et leurs soeurs en évolution que le cadre euclidien est amené à enrichir et spécialiser. L'isogonalité prend ici la relève, et remplace non sans grâce l'involution isotomique.

Les aspects projectifs avec notamment le birapport closent l'ouvrage. Du nouveau, du subtil. Leur résonance se manifeste à travers l'ensemble du texte avant même qu'ils ne soient étudiés de façon systématique dans ce chapitre, que l'on peut envisager comme une annexe à l'ensemble. Les algèbres de Clifford y sont sollicitées pour définir de manière inopinée le birapport de quatre points distincts sur une conique.

Il reste sans doute à connaître le jugement des maîtres en géométrie, car il subsiste heureusement, après feu Marcel Berger, quelques-uns de très brillants en France. Bref, un livre pour une élite à reconstituer et à faire vivre.

Formes quadratiques et géométrie. Une introduction et un peu plus
Alain Debreil, Jean-Denis Eiden, Rached Mneimné et Tuong-Huy Nguyen.
Prix 59 euros, Calvage & Mounet, décembre 2017.

2. Un corps de base ayant été fixé, les objets de cette catégorie sont les couples (V, τ), où V est un espace vectoriel de diemnsion finie et τ une forme linéaire non nulle sur V. Le lecteur devinera sans peine quelles en sont les flèches… Cette catégorie est équivalente à la catégorie des espaces affines.