Christian LERUSTE

# Topologie algébrique

## Une introduction, et au-delà

Calvage & Mounet

Christian LERUSTE est maître de conférences honoraire à l'université Paris Diderot. Ses travaux personnels concernent principalement la Topologie algébrique et la $K$-théorie. Il est aussi un grand passionné du théâtre de Shakespeare et de la musique de Mozart.

leruste@math.univ-paris-diderot.fr

Mathematics Subject Classification (2010):

01-XX History and biography
  01Axx History of mathematics and mathematicians
    01A40 15th and 16th centuries, Renaissance
13-XX Commutative algebra
  13Cxx Theory of modules and ideals
    13C10 Projective and free modules and ideals
    13C12 Torsion modules and ideals
15-XX Linear and multilinear algebra; matrix theory
  15Axx Basic linear algebra
    15A69 Multilinear algebra, tensor products
18-XX Category theory; homological algebra
  18Axx General theory of categories and functors
    18A30 Limits and colimits (products, sums, directed limits, pushouts, [...], etc.)
    18A40 Adjoint functors (universal constructions, [...], Kan extensions, etc.)
  18Exx Abelian categories
    18E25 Derived functors and satellites
  18Gxx Homological algebra
    18G15 Ext and Tor, generalizations, Künneth formula
51-XX Geometry
  51Axx Linear incidence geometry
    51A05 General theory and projective geometries
  51Mxx Real and complex geometry
    51M20 Polyhedra and polytopes; regular figures, division of spaces
55-XX Algebraic topology
  55Nxx Homology and cohomology theories
    55N10 Singular theory
    55N35 Other homology theories
  55Pxx Homotopy theory
    55P10 Homotopy equivalences
  55Rxx Fiber spaces and bundles
    55R05 Fiber spaces
  55Uxx Applied homological algebra and category theory
    55U15 Chain complexes
    55U20 Universal coefficient theorems, Bockstein operator
57-XX Manifolds and cell complexes
  57Mxx Low-dimensional topology
    57M05 Fundamental group, presentations, free differential calculus
    57M10 Covering spaces
    57M25 Knots and links in $S^3$

ISBN 978-2-916352-53-4

9 782916 352534

∞ Imprimé sur papier permanent

*In memoriam* Peter A. Lees
Mathématicien, ténor,
passionné de football
et de libellules

# Table des matières

*In these days, the angel of topology and the devil of abstract algebra fight for the soul of every individual discipline of mathematics.*
*De nos jours, l'ange de la topologie et le démon de l'algèbre abstraite se disputent l'âme de toutes les disciplines mathématiques sans exception.*

Hermann Weyl (1939)

# Préface

Voilà une phrase qui annonce de l'action, avec vastes espaces et protagonistes hauts en couleur.

Wiki

Wiki

Mais d'abord, pourquoi pas *l'ange de l'algèbre et le démon de la topologie* ? Il ne fait aucun doute que quantité d'étudiants verraient plutôt les choses dans ce sens-là : après avoir goûté aux deux, ils semblent souvent prêts à envoyer la topologie au diable —sans doute sont-ils déroutés par ses concepts, plus éloignés de leurs habitudes de pensée que ceux de l'algèbre.

Ce n'est sûrement pas votre cas, ami lecteur, amie lectrice : en ouvrant ce livre, vous affirmez au contraire que vous vous intéressez autant à l'une qu'à l'autre, et que vous aimeriez voir où et comment elles se rejoignent. Quant à Hermann Weyl[1], il parlerait sans doute, de nos jours, d'une collaboration plutôt que d'un combat : des décennies de compagnonnage les ont rapprochées et mutuellement transformées, souvent de façon inattendue.

Quoi qu'il en soit, il y a bien au départ deux façons de voir nettement différentes. On devine confusément derrière l'ange et le démon un défilé de couples antagonistes : la forme et la structure, le concept et le calcul, l'analogie et l'algorithme... Le souple et le rigide ? Le tableau et le récit ? Le synthétique et l'analytique ? L'imaginaire et le symbolique ? Le cerveau droit et le cerveau gauche ? ? Le *yīn* de la topologie et le *yáng* de l'algèbre ? ? ?

[1] Hermann Weyl [Elmshorn (près de Hambourg) 1885 – Zurich 1955].

De ces deux approches il sera question dans les pages qui suivent, à proportion quasi égale. On les verra à l'œuvre séparément et aussi — et surtout — ensemble. Mais pas dans des rôles interchangeables. *Topologie*, c'est le substantif ; *algébrique*, l'adjectif. C'est dire que, fondamentalement, il s'agira d'utiliser l'algèbre pour répondre à des questions de topologie.
Certes, il est vrai que le rapprochement de ces domaines, auquel on vient de faire allusion, est allé, dans un passé encore assez proche, jusqu'à brouiller les pistes et même inverser les priorités — il en est ainsi, par exemple, de la « construction + » de Quillen[2], qui définit par des procédés *topologiques* des « groupes de $K$-théorie *algébrique* ». Mais ces (relatives) nouveautés resteront ici, hélas, hors de portée, et notre *fil rouge* sera celui du développement historique, que l'on peut schématiser de la manière suivante.

Supposant donné un problème de nature topologique, qui est difficile à traiter en raison même de la souplesse des objets sur lesquels il porte :

- le transformer en problème d'algèbre en essayant — c'est un défi ! — de perdre au passage le moins d'information possible ;
- résoudre le problème d'algèbre grâce aux ressources et méthodes que l'on aura pris soin de se constituer ;
- retraduire le résultat dans la langue d'origine.

On peut espérer, si la situation est favorable, qu'un peu d'habileté permettra d'obtenir au moins une réponse partielle à la question posée…

---

Quelques exemples simples donneront une première idée des difficultés qui surgissent souvent très vite, et des méthodes par lesquelles on a appris à résoudre certaines d'entre elles.

La topologie est parfois décrite comme « la géométrie du caoutchouc[3] ». Disons pour l'instant « géométrie de la matière plastique », et partons au bord de la mer avec une bouée et un ballon. Ils n'ont pas la même forme : tous les petits enfants le savent longtemps avant l'âge de raison. Mais qu'est-ce que c'est que cette *forme*, et que signifie *pas la même* ?

Dire que le ballon a pour modèle mathématique la sphère
$$S = \Big\{\big(R(\cos\theta)(\cos\omega), R(\cos\theta)(\sin\omega), R(\sin\theta)\big) \;\Big|\; (\theta,\omega)\in\mathbb{R}^2\Big\}$$
$\big($où $R\in\,]0,+\infty[\big)$, tandis que la bouée est représentée par le tore
$$T = \Big\{\big((R+r\cos\theta)(\cos\omega), (R+r\cos\theta)(\sin\omega), r\sin\theta\big) \;\Big|\; (\theta,\omega)\in\mathbb{R}^2\Big\}$$
$\big($où $R\in\,]0,+\infty[$, et $r\in\,]0,R[\big)$, n'avance pas à grand-chose.

[2] Daniel Quillen [Orange (New Jersey) 1940 – Haven Hospice (Floride) 2011].

[3] Sur l'ambiguïté — ou à tout le moins l'imprécision — de cette expression reçue, voir par exemple la question des plongements du cercle dans l'espace $\mathbb{R}^3$ (*cf.* **VI-9.2.1**).

Et s'il est facile de montrer que ces objets sont respectivement homéomorphes à $\mathbf{S}^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$ et à

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \;=\; \left(\mathbf{S}^1\right)^2 \;&=\; \left(\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}\right)^2 \\ &=\; \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 1\right\},\end{aligned}$$

cette description n'est guère plus éclairante.
Parler d'homéomorphisme suggère au moins un sens raisonnable pour « pas la même forme », à savoir « non homéomorphe » : est-il bien vrai que la sphère et le tore ne le sont pas ? En abrégé : a-t-on bien $\mathbf{S}^2 \not\approx (\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1)$ ? Cela semble certain : le gamin qui remonte de la plage sait parfaitement que, aussi fort qu'il serre son ballon contre lui, son crétin de petit frère n'aura aucun mal à le faire sauter de sous son bras d'un simple coup de poing ; en revanche, sa bouée est en sûreté au creux de l'autre coude. Mais peut-être cela signifie-t-il seulement que $\mathbf{S}^2$ et $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, quoiqu'homéomorphes absolument, peuvent se réaliser physiquement de deux manières différentes, dont une avec un « trou » au travers duquel passer l'avant-bras ?

On vient de voir que la description paramétrée n'est pas prometteuse, ce qui ne surprend pas tellement puisqu'il s'agit de prouver un résultat négatif. La topologie générale ne semble pas offrir beaucoup plus d'espoir : quelle que soit sa formulation, elle est en dernier ressort fondée sur la notion de voisinage, et risque ainsi de conduire à une certaine myopie. Effectivement, vus de tout près, le ballon et la bouée présentent le même aspect : chacun de leurs points possède un voisinage homéomorphe à un disque, ce qui leur confère, à l'un et à l'autre, le statut abstrait de *variété topologique de dimension* 2 (et a pour effet pratique que les mêmes rustines peuvent servir à réparer le ballon et la bouée). Ces variétés sont même *lisses*, propriété qui dépasse la topologie *stricto sensu*[4], mais n'est pas non plus difficile à établir — et qui ne les différencie toujours pas.

Pour une vision plus globale, les dernières ressources de la topologie élémentaire proposent la compacité et la connexité. Or, $\mathbf{S}^2$ et $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ sont compacts et connexes — et même connexes par chemins, si l'on veut raffiner. Faut-il désespérer ? Pas encore ! La connexité, on le sent tout de suite, est justement la piste à suivre. Si la notion de *simple connexité*, qui relève de la topologie un tout petit peu moins élémentaire et n'est en général enseignée que dans le cadre des *fonctions analytiques*, ne surgit pas aussitôt de la mémoire, c'est le moment de la réinventer. Revient avec elle l'*homotopie*, ou déformation continue d'applications continues. Les détails précis seront donnés au **Chapitre V**, mais on soupçonne que l'on tient là le secret de ce fameux « trou » qui n'est pas *dans* le tore (la bouée se dégonflerait), mais *autour duquel* — si l'on ose écrire — le tore s'enroule.

[4] Ce pourquoi nous ne la définirons même pas.

C'est grâce à lui que l'on peut accrocher la bouée à un clou avec une ficelle : on forme un nœud coulant, que rien (sauf une paire de ciseaux) ne pourra déloger. Au contraire, pareil nœud (même équatorial) autour de la sphère glissera à la première occasion et se refermera sur le vide. En termes demi-savants, précisés plus loin : tout *lacet* $\sigma : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^2$ est homotope à (peut être déformé continûment en) un lacet constant sans quitter la surface de $\mathbf{S}^2$ ; alors qu'il existe un lacet $\tau : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ qui n'est homotope à aucun lacet constant à la surface de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$. Ou encore : la sphère $\mathbf{S}^2$ est simplement connexe, $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ ne l'est pas. Comme il est facile de voir que la simple connexité est un invariant d'homéomorphie, la question semble réglée.

Sauf qu'il reste à prouver ces affirmations. Pour la simple connexité de $\mathbf{S}^2$ il suffit d'exhiber une homotopie *ad hoc*, ce à quoi l'on arrive par des moyens élémentaires (quoiqu'un peu pénibles[5]). Mais on se retrouve, en ce qui concerne $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, avec une nouvelle propriété négative sur les bras, et l'on se demande avec angoisse si l'on a tellement fait avancer les choses.

C'est le moment de faire appel à la Topologie algébrique.

Elle propose plusieurs méthodes pour obtenir le résultat. Celle qui exploite le plus directement l'analyse ci-dessus consiste à introduire le *groupe fondamental*, ou *groupe de Poincaré*[6], ou *premier groupe d'homotopie*.
Un tel groupe est attaché à tout espace topologique $X$ muni d'un point-base $x_0 \in X$ : il se note alors $\pi_1(X, x_0)$, et il est en général non abélien. Toutefois, dans le cas qui nous occupe, on trouve $\pi_1(\mathbf{S}^1, x_1) \cong \mathbb{Z}$, quel que soit $x_1 \in \mathbf{S}^1$ ; et $\pi_1(\mathbf{S}^2, x_2) = 0$, quel que soit $x_2 \in \mathbf{S}^2$.
On montre en outre quasi automatiquement l'existence d'un isomorphisme

$$\pi_1\big(X \times Y, (x_0, y_0)\big) \;\cong\; \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)\,,$$

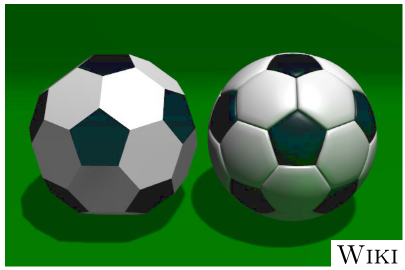
ce qui donne $\pi_1\big(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1, (1,1)\big) \cong \mathbb{Z}^2 \neq 0$. On conclut ainsi que $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ n'est pas homéomorphe à $\mathbf{S}^2$, après avoir prouvé que le groupe fondamental est invariant (à isomorphisme près) par homéomorphisme.

Mais un invariant plus archaïque et moins sophistiqué que le groupe fondamental suffit : la **caractéristique d'Euler**[7], peut-être le plus ancien vestige mis au jour par les archéologues de la Topologie algébrique. En effet, celle-ci ne se constitue véritablement comme discipline autonome, munie de ses concepts, instruments et problématiques, qu'avec Henri Poincaré — sous le nom d'*Analysis situs* d'abord. Cela n'empêche pas, pour peu que l'on soit aux aguets, de repérer dans un passé plus ancien des formes embryonnaires d'idées qui se sont épanouies depuis en théories élaborées. Comme on va le voir, l'occurrence présente est une sorte de *Topologie arithmétique*.

---

[5] Voir l'**Exercice III-6.2**, page 137.
[6] (Jules) Henri Poincaré [Nancy 1854 – Paris 1912].
[7] Leonhard Euler [Bâle 1707 – Saint-Pétersbourg 1783].

Commençons par la sphère. À homéomorphisme près, il n'est pas difficile de la regarder comme un polyèdre convexe. L'exemple le plus familier de nos jours est sans aucun doute le ballon de football.

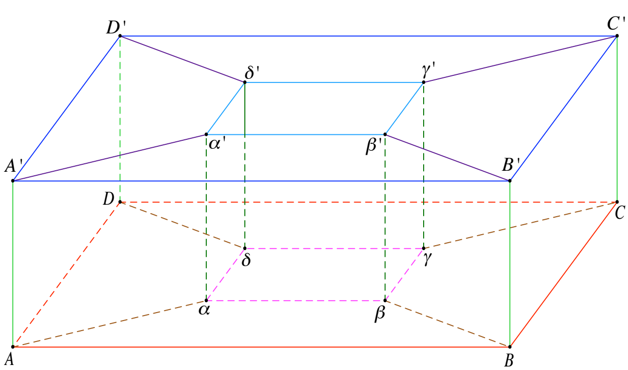


Wiki

Il est constitué de douze pentagones (de couleur noire dans la version élémentaire) et de vingt hexagones (de couleur blanche), ce qui en fait un polyèdre à trente-deux faces (notons $\mathscr{F} = 32$), à quatre-vingt-dix arêtes ($\mathscr{A} = 90$ : chaque arête est commune à deux faces) et à soixante sommets ($\mathscr{S} = 60$ : chaque sommet est commun à trois faces).
On calcule la somme alternée $\mathscr{S} - \mathscr{A} + \mathscr{F} = 60 - 90 + 32 = 2$.

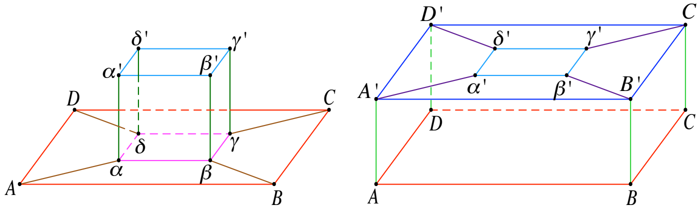
Sous réserve de définition rigoureuse du procédé (dit de *triangulation*, car tout polygone se décompose en triangles), on sait démontrer que les représentations de la sphère sous forme de polyèdre convexe produisent toutes la même somme alternée $\mathscr{S} - \mathscr{A} + \mathscr{F}$. Cette affirmation est en tout cas facile à vérifier sur les polyèdres platoniciens[8] : pour le tétraèdre, $4-6+4$ ; pour le cube, $8 - 12 + 6$, et pour son dual l'octaèdre, $6 - 12 + 8$ ; pour le dodécaèdre, $20 - 30 + 12$, et pour son dual l'icosaèdre, $12 - 30 + 20$.
Cet entier $\mathscr{S} - \mathscr{A} + \mathscr{F}$, généralement noté $\chi$, se nomme *caractéristique d'Euler* : on vient donc de voir que $\chi(\mathbf{S}^2) = 2$.

Or, le même procédé appliqué au tore donne $\chi(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1) = 0$.




[8] Platon (*Πλάτων*) [Athènes (−428/427) (?) – *ibid.* (−348/347)].

Cela se voit, par exemple, sur la figure précédente, précisée ci-dessous.




On trouve en effet $\mathscr{S} = 16$, $\mathscr{A} = 32$ et $\mathscr{F} = 16$ (soit 4 trapèzes horizontaux inférieurs, 4 supérieurs ; 4 rectangles verticaux intérieurs, 4 extérieurs[9]). Comme on se convainc facilement que la caractéristique d'Euler est invariante par homéomorphisme, le problème est réglé arithmétiquement.

Nous verrons enfin que la solution moderne sans doute la plus simple consiste à utiliser l'*homologie singulière à coefficients entiers*. À tout espace topologique $X$, celle-ci associe une suite $\big(\mathrm{H}_k(X;\mathbb{Z})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ de groupes abéliens[10]. On saura établir que

- $\mathrm{H}_k(\mathbf{S}^2;\mathbb{Z}) = 0$, à deux exceptions près : $\mathrm{H}_0(\mathbf{S}^2;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}_2(\mathbf{S}^2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ ;
- $\mathrm{H}_k(\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1;\mathbb{Z}) = 0$, à trois exceptions près :
$$\mathrm{H}_0(\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}_2(\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mathrm{H}_1(\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2.$$

Comme on aura montré que l'homologie est invariante par homéomorphisme, la question est tranchée en comparant les groupes $\mathrm{H}_1(-;\mathbb{Z})$ :
$$\mathrm{H}_1(\mathbf{S}^2;\mathbb{Z}) = 0, \qquad \text{tandis que} \qquad \mathrm{H}_1(\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2 \neq 0\,.$$

Noter que la caractéristique d'Euler est cachée dans ce résultat, même s'il faut en toute rigueur la rebaptiser *caractéristique d'Euler-Poincaré*. En effet, hormis un nombre fini d'entre eux, les groupes abéliens ci-dessus sont nuls ; et ceux qui ne le sont pas sont des $\mathbb{Z}$-modules libres et de type fini. C'est-à-dire que, lorsque $X = \mathbf{S}^2$ ou $X = \mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1$, et pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe un $m\in\mathbb{N}$ tel que $\mathrm{H}_k(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^m$. Cet $m$ est noté $\dim \mathrm{H}_k(X;\mathbb{Z})$. Comme indiqué, $\dim\mathrm{H}_k(X;\mathbb{Z}) = 0$, sauf pour un nombre fini d'entiers $k$. On peut donc calculer la somme alternée $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dim\mathrm{H}_k(X;\mathbb{Z})$ dans les deux cas. On retrouve sans trop d'étonnement, pour la sphère,
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dim\mathrm{H}_k(\mathbf{S}^2;\mathbb{Z}) \;&=\; \dim\mathrm{H}_0(\mathbf{S}^2;\mathbb{Z}) + \dim\mathrm{H}_2(\mathbf{S}^2;\mathbb{Z})\\ &=\; 1+1 \;=\; 2 \;=\; \chi(\mathbf{S}^2)\,.\end{aligned}$$
La même démarche, dans le cas du tore, conduit à
$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dim\mathrm{H}_k(\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1;\mathbb{Z}) = 1-2+1 = 0 = \chi(\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1)\,.$$

[9] Noter que les rectangles tels que $A\alpha\alpha'A'$ ne constituent pas des faces.

[10] Que nous aurons tendance — pour des raisons qui apparaîtront vite — à appeler plutôt par leur autre nom : $\mathbb{Z}$-modules. (Voir le **Chapitre IV**.)