Philippe Caldero et Jérôme Germoni

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries

Tome second

Calvage & Mounet

Philippe Caldero est ancien élève de l'ÉNS de Saint-Cloud, agrégé de mathématiques et docteur. Il est maître de conférences à l'université Lyon 1 et ses travaux de recherche concernent la théorie des représentations. Il assume actuellement la responsabilité du master de mathématiques et celle de l'agrégation interne.

caldero@math.univ-lyon1.fr

Jérôme Germoni est ancien élève de l'ÉNS, agrégé de mathématiques et docteur. Il est maître de conférences à l'université Lyon 1. Passionné de questions d'enseignement et de diffusion de la culture mathématique, il a dirigé l'Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) de Lyon.

germoni@math.univ-lyon1.fr

Mathematics Subject Classification (2000) :

14-XX Algebraic geometry
  14H-XX Curves
    14.20 Algebraic curves, surfaces and special varieties

20C-XX Representation theory of groups
  20C-05 Group rings of finite groups and their modules
  20C-15 Ordinary representations and characters

05-XX Combinatorics
  05BXX Designs and configurations
    05B25 Finite geometries

51-XX Geometry
  51F-XX Metric geometry
  51N-XX Analytic and descriptive geometry
    51N10 Affine analytic geometry
    51N15 Projective analytic geometry
    51N20 Euclidean analytic geometry
    51N25 Analytic geometry with other transformation groups
    51N30 Geometry of classical groups
    51A05 General theory and projective geometries

ISBN 978-2-916352-67-1

∞ Imprimé sur papier permanent

À tous ceux qui nous ont fait découvrir les plaisirs mathématiques :
à nos parents, nos professeurs...
qui sont parfois un peu les mêmes...

Table des matières

VII. Le corps des quaternions

1. Le corps des quaternions . . . 2
2. Applications à SO(3) . . . 9
3. Applications à SO(4) . . . 12
4. Aparté sur la simplicité . . . 13

A. Annexe. Engendrement de $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$; simplicité de SO(3) . 15
B. Interlude: l'ours mal peigné . . . 21
C. Développement. Fibration de Hopf . . . 23
D. Exercices . . . 25

VIII. Combinatoire algébrique

1. Dénombrement sur les corps finis . . . 40
2. Décomposition en cellules et dénombrement . . . 46
3. Applications aux isomorphismes exceptionnels de groupes finis . 48
4. Développement. Un non-isomorphisme exceptionnel . . . 54

A. Annexe. Formulaire raisonné de combinatoire algébrique . . . 57
B. Exercices . . . 61

IX. Groupes de Lie

1. Groupes de Lie classiques . . . 76
2. Applications aux isomorphismes exceptionnels . . . 83

A. Annexe. Rappels et compléments en calcul différentiel . . . 87
B. Notion d'algèbre de Lie . . . 96
C. Exercices . . . 101

X. Droite projective et applications

1. Droite projective sur un corps quelconque . . . 117
2. Droite projective sur les corps classiques . . . 131
3. Application: préservation du birapport par projection centrale . 135
4. Application: structure de droite projective sur une conique . . . 137
5. Application: distance de Hilbert . . . 142

A. Sphère de Riemann et projection stéréographique . . . 145
B. Le plan projectif ou la géométrie dans une coquille de noix . . . 153
C. La formule des six birapports de Perrin . . . 154
D. Exercices . . . 154

XI. Trois problèmes de géométrie

1. L'ellipse de Steiner 180
2. Le théorème de Desargues 183
3. L'alternative de Steiner 190

A. Exercices 202

XII. Solides platoniciens et sous-groupes finis de $\mathbf{SO_3}(\mathbb{R})$

1. Présentation 214
2. Approche topologique 215
3. Groupes d'isométries 218
4. La *toy* dualité 226
5. Dictionnaires 228
6. Guide du routard en dimension n 234

A. Annexe. Dualité des ensembles compacts convexes de $\mathbb{R}^n$ 240

B. Exercices 243

XIII. Représentations et caractères

1. Représentations, premières définitions 251
2. Caractères 264
3. Composantes isotypiques d'une représentation 275

A. Annexe. Tables de caractères de certains groupes classiques . . . 283

B. Annexe. Table de caractères du groupe diédral 297

C. Groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, pour $n = 3, 4, 5$ 303

D. Groupe alterné $\mathfrak{A}_n$, pour $n = 3, 4, 5$ 312

E. Exercices 317

XIV. Théorie des représentations. Addendum

1. Séries de Molien 364
2. Représentations réelles et formes quadratiques 376

A. Exercices 385

Bibliographie **397**

Index **401**

Avant-propos

« L'espoir, l'amour, c'est pas ça, ce n'est pas le mot juste. Il doit exister un mot plus juste. Il y a un mot plus juste, un mot qui tombe à pic, un mot qui brûle. Il était là avant-hier. »

Les gens normaux n'ont rien d'exceptionnel,
Laurence Ferreira Barbosa, 1993

L'objectif des *Histoires Hédonistes* est de raconter l'univers en termes d'orbites — ou, disons, d'actions de groupe.

Partons d'un constat simple et, pourtant, relativement peu connu : un bon nombre de théorèmes classiques d'algèbre linéaire (base incomplète et dimension, rang, Jordan, Sylvester...) sont des théorèmes de classification ; de plus, ils s'interprètent souvent comme la description des orbites pour une action particulière d'un groupe sur un ensemble.

Aussi, l'idée centrale est l'omniprésence des groupes de transformations[1] en algèbre et en géométrie classique. Comme le note Yves André dans [4], Alexandre Grothendieck « n'hésite pas à parler de l'invention du zéro et de l'idée de groupe comme des deux plus grandes innovations mathématiques de tous les temps ».

> Il a fallu des millénaires avant que des choses aussi enfantines et omniprésentes que les groupes de symétries de certaines figures géométriques, les formes topologiques de certaines autres, le nombre zéro, les ensembles, trouvent admission dans le sanctuaire [des mathématiques] !
>
> Alexandre Grothendieck, *Récoltes et semailles*

On peut expliquer l'omniprésence des groupes de par le fait qu'ils sont la formalisation de l'idée de *symétrie*, de *transformations* qui préservent un système.

[1] À peine une ligne de texte et déjà une redondance !

Pourquoi les groupes ?

Observons les formules de changement de base en algèbre linéaire, pour un vecteur-colonne et une matrice carrée :

$$X = PX', \quad A = PA'P^{-1}.$$

On peut les interpréter de deux façons : soit comme deux objets différents reliés par une transformation, soit comme le même objet dans deux systèmes de coordonnées différents. Cette dualité des points de vue est très utile[2]. Mais, elle relève de la même situation : l'action d'un groupe (ici, le groupe linéaire) sur un ensemble (par multiplication à gauche sur les vecteurs-colonnes ou par conjugaison sur les matrices carrées).

La réduction des endomorphismes consiste, A étant donnée, à chercher P d'une part, et A' aussi simple que possible d'autre part, de sorte que la relation ci-dessus soit satisfaite. En passant de A à A', on conserve certaines valeurs : déterminant, trace, valeurs propres... et l'on en change d'autres : les espaces propres ou caractéristiques de A sont l'image de ceux de A' par P.

Cet exemple, au cœur du programme d'algèbre de licence, est représentatif, voire emblématique, de la présence des groupes dans les problèmes de classification qui motivent le mathématicien. Ici, on « regroupe » les endomorphismes d'un espace en endomorphismes semblables ; ainsi, l'ensemble des endomorphismes est partitionné par une relation d'équivalence, elle-même régie par un groupe : le groupe linéaire, qui agit par conjugaison sur l'espace des endomorphismes. Dans chaque classe d'équivalence, appelée désormais *orbite*, on sélectionne un élément représentatif, que l'on choisit « aussi simple que possible » et que l'on appellera ici injustement *forme normale*.

Les mathématiques sont souvent affaire de classification, et classer, finalement, c'est partitionner et étiqueter. Un groupe sera vu et utilisé comme une « machine à partitionner » ; effectivement, si l'on comprend qu'une partition d'un ensemble n'est rien d'autre qu'une relation d'équivalence dans cet ensemble, on comprend alors aussi que la triade réflexif-symétrique-transitif puisse se traduire par cette autre, neutre-symétrique-associatif, qui définit la notion de groupe. L'étiquetage, de son côté, sera l'objet de la recherche d'invariants.

La notion de groupe liée à la classification et aux invariants ne se rencontre pas qu'en algèbre. Pensons par exemple à une courbe paramétrée dans le plan, disons une application de classe $\mathscr{C}^1$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$. Avec un difféomorphisme $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, on peut reparamétrer l'arc

[2] Ah ? Pourquoi ?

décrit par γ en considérant : $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$. Mais les propriétés intéressantes, c'est-à-dire géométriques, sont celles qui sont invariantes par changement de paramétrage : points singuliers, longueur, rayon de courbure... Cela constitue presque une définition de ce qu'est une propriété géométrique, à savoir : indépendance du paramétrage.

Groupes, topologie et géométrie

Pour reprendre un aphorisme de Misha Gromov, « il n'y a pas de théorème (non trivial) portant sur tous les groupes » : la structure est trop large. Aussi est-on amené à ajouter des hypothèses pour spécifier la situation et l'enrichir de théorèmes.

On commence par ajouter de la topologie : c'est une structure intermédiaire entre le « ponctuel » et le « géométrique ». L'apport de la topologie est motivé par la démonstration de théorèmes classiques (Cayley-Hamilton, par exemple) par un calcul facile valable presque partout et un argument de densité. On se place donc, dès le chapitre II, dans le large cadre des actions continues de groupes topologiques.

Mais, ce n'est guère qu'une étape vers la géométrie — au sens, ici, de la géométrie différentielle. Les méthodes qu'elle permet sont surtout utilisées dans ce livre pour remplacer quelques calculs par des concepts. Mais elles ouvrent aussi la porte à un large champ d'étude : la théorie des groupes de Lie.

Sur un corps fini, la topologie n'a à peu près aucun intérêt. Mais le comptage tient lieu d'étude topologique. Cette idée apparaît déjà dans les théorèmes de Sylow : comprendre un groupe fini, cela passe par le dénombrement de ses différents sous-groupes de Sylow, voir [31]. En fait, on voit transparaître la structure géométrique observée sur les corps des complexes ou des réels dans la formule-même du cardinal de certains objets (ensemble des matrices de rang donné, espaces projectifs, grassmanniennes, hyperboloïdes...). Pour en donner l'exemple le plus simple : la formule bien connue de la série géométrique

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + \cdots + 1$$

pourra s'interpréter sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de cardinal q de la façon suivante : l'ensemble des droites vectorielles d'un espace vectoriel E, *i.e.* l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$, est l'ensemble des orbites pour l'action libre du groupe multiplicatif $\mathbb{F}_q^\star$ sur $E \backslash \{0\}$, et il possède une décomposition en cellules. Propriété qui reste d'ailleurs valable sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Jamais cette petite formule connue des bacheliers n'aura autant parlé de géométrie et de topologie !

Invariance

Lorsqu'il y a plusieurs orbites, il s'agit de trouver des moyens simples de les séparer, de les identifier. C'est le rôle des *invariants*. Un invariant pour une action de groupe est une application définie sur l'ensemble sur lequel le groupe opère qui est constante sur chaque orbite. Un invariant peut être un nombre (rayon d'un cercle, rang d'une application linéaire, valeurs propres…) ou un objet quelconque (genre d'une conique affine réelle, « diagramme de Young » d'une matrice nilpotente comme dans [10, chap. III] « type » d'une matrice rectangulaire comme dans [10, chap. 4]).

Un invariant est dit invariant *complet* ou *total* si l'application qui le représente est injective : l'invariant prend deux valeurs différentes sur deux orbites distinctes. Par exemple, le rang est un invariant complet pour les formes quadratiques complexes modulo congruence, pas pour les formes quadratiques réelles (dans cette situation, le théorème de Sylvester permet de le voir et donne un invariant complet, la signature). En revanche, si le spectre définit bien un invariant pour les matrices carrées modulo conjugaison, il ne constitue pas un invariant complet, puisque deux matrices ayant même spectre ne sont pas forcément semblables.

Bien sûr, un invariant est d'autant plus intéressant qu'il est facile à calculer et proche d'être complet. La recherche d'invariants complets est essentiellement une formulation du problème de la *classification* (des objets sur lesquels le groupe agit, à transformation — dans le groupe — près).

On peut parfois inverser le point de vue : mettre en évidence un invariant dans une situation, c'est faire naître un concept. Ainsi, un angle, c'est ce que possèdent en commun deux couples (ou paires, si l'on préfère les angles géométriques) de demi-droites (ou droites, si l'on veut) *superposables*, c'est-à-dire dans la même orbite sous le groupe des similitudes (ou des isométries). L'ensemble des angles n'est autre que l'ensemble des orbites pour l'action du groupe des similitudes sur les couples de droites ; il devient particulièrement opérationnel lorsque l'on s'aperçoit que cet ensemble est en bijection avec $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, plus maniable. Le birapport constitue un autre exemple.

L'objectif des *Histoires Hédonistes* est de raconter l'univers en termes d'orbites — ou, disons, d'actions de groupes.

Partons d'un constat simple et, pourtant, relativement peu connu : un bon nombre de théorèmes classiques d'algèbre linéaire (base incomplète et dimension, rang, Jordan, Sylvester…) sont des théorèmes de classification ; de plus, ils s'interprètent souvent comme la description des orbites pour une action particulière d'un groupe.

Guide de la nouvelle édition

Le succès que nos histoires hédonistes ont connu auprès des agrégatifs et de leurs préparateurs nous a amenés à nous lancer dans une nouvelle édition. Bien entendu, cette décision a eu pour objet de corriger les erreurs[3] et les coquilles du premier volume, et ainsi, retrouver sommeil et sérénité. Mais l'intention était surtout de répondre aux demandes soutenues de nos lecteurs sympathiquement exprimées à travers les forums et les courriels.

Nous avons donc orienté la seconde édition autour de la préparation à l'agrégation, en ajoutant toutes les corrections des exercices du Tome 1, tout en ayant encore plus présent en tête l'exercice de style que représente l'oral de l'agrégation (développements, discussion avec le jury), mais sans pour autant perdre une certaine hauteur de point de vue, et le plaisir qui l'accompagne, que les affres du concours auraient pu faire oublier.

L'ajout des corrections a eu pour effet de doubler le volume du tome. Nous avons donc décidé de mettre les six premiers chapitres du tome 1 de la première édition : [10], puis, dans ce présent ouvrage, une compilation des moments les plus utiles (et agréables !) à l'agrégation, extraits des six derniers chapitres du tome 1, ainsi que du tome 2, le tout, avec la correction des exercices de fin de chapitre.

Contenu du livre

Le présent livre est divisé en chapitres suffisamment indépendants entre eux pour pouvoir être lus séparément, à l'exception des deux derniers chapitres, tous deux consacrés à la théorie des représentations.

L'esprit de la seconde édition

Après un sondage rapide, nous avons constaté que les agrégatifs, pour la plupart, lisaient la première édition en évitant les exercices, dont nous n'avions pas écrit le corrigé. On peut imaginer la frustration qu'un tel manque peut engendrer quand on sait à quel point le temps est précieux l'année du concours. Nous avons donc écrit la correction des exercices de la première édition. Nous avons également ajouté un bon nombre d'exercices à chaque chapitre : des exercices classiques de type écrit-oral d'agrégation (interne-externe), des illustrations et exemples du cours, des compléments de cours, parfois quelques notions introductives d'outils de la recherche actuelle, mais aussi des développements possibles pour un oral d'agrégation, c'est-à-dire, un sujet à spectre suffisamment large et formaté autour d'une quinzaine de minutes d'exposition. La correction des exercices, qui constitue la nouveauté essentielle de cette édition, est rédigée de façon, on l'espère, limpide pour celui qui a digéré le chapitre correspondant.

[3] Erreurs, qui étaient, pour la plupart, déjà signalées dans l'errata en ligne.

En ce qui concerne les développements à l'agrégation, nous avons ajouté des compléments en vue des discussions avec le jury. Souvent, lors de l'oral, des exposés, même bien menés, montrent un manque de recul, voire un manque de maturité, même si le développement en soi est maîtrisé. Ces compléments permettront certainement de montrer au jury une plus grande envergure au moment de la discussion.

Le thème général reste inchangé : tout est ici question d'action de groupes, de transitivité, voire double ou triple, et de forme normale, qui peut être, par exemple, un type de matrice, mais qui peut être également un type de figure, comme au chapitre XI. Nous suivons cette trame sur trois aspects : le dénombrement, la topologie, et enfin la géométrie différentielle. À chaque fois, ces aspects sont introduits dans le but de calculer des cardinaux, décrire une topologie, exhiber des isomorphismes... Dans le même ordre d'idées, le thème des isomorphismes exceptionnels est abordé sous trois angles : dénombrement, topologie, géométrie différentielle. Cela constitue un des leitmotiv du livre.

Nous avons donc mis à la disposition du lecteur des éléments du programme de l'agrégation (mais pas que), des développements à l'oral d'algèbre (mais pas que), et des éléments de discussion possible avec le jury autour du développement. Autant les six premiers chapitres, qui figurent dans la première partie de la seconde édition, concernent les fondamentaux, autant les chapitres qui vont suivre concernent des sujets moins basiques, dont le choix tient de par leur intérêt, leur adéquation avec l'agrégation et leur transversalité. On trouvera successivement dans les chapitres : le corps des quaternions, la combinatoire géométrique, une introduction aux groupes de Lie, des exemples de problèmes de géométrie plane résolus par les groupes de transformations en géométrie (affine, projective, anallagmatique), l'étude des solides platoniciens et, enfin, la belle théorie des représentations.

Pour la valeur ajoutée, nous avons placé quelques éléments de culture générale hors programme à l'intention des professeurs ou futurs professeurs de mathématiques. On parlera çà et là du groupe de Brauer de $\mathbb{Q}$, d'algèbres de Clifford et d'extension de scalaires, du théorème de la boule chevelue, de la fibration de Hopf, de la construction des octonions, de la classification des groupes finis simples, des schémas de Hilbert, de la distance de Hilbert, de la sphère de Riemann, d'espaces projectifs, de solides réguliers en dimension supérieure, de coloriage...

La seconde édition, chapitre par chapitre

Dans le chapitre VII on construit un corps non commutatif, le corps des quaternions, qui permet de comprendre les groupes $\mathrm{SO}(3)$ et $\mathrm{SO}(4)$ à partir de la sphère $\mathbf{S}^3$ de dimension 3 des quaternions, elle-même munie d'une structure de groupe dans lequel le calcul explicite est plus aisé que dans les groupes orthogonaux. Le corps des quaternions est aussi intéressant en soi : il s'agit d'un phénomène exceptionnel, c'est le seul corps non commutatif de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et, à ce titre, se retrouvera avec bonheur en théorie des représentations. Nous donnons quelques pistes pour montrer que sur $\mathbb{Q}$, de tels corps sont beaucoup plus nombreux, en espérant donner au lecteur le désir d'aller plus loin sur cette magnifique direction de l'algèbre.

On illustre ensuite dans le chapitre VIII comment combinatoire et actions de groupes font bon ménage lorsque l'on travaille sur les corps finis. Dans ce contexte, le théorème d'homéomorphisme du chapitre II est réduit à sa plus simple expression : le lemme du berger[4]. Malgré la simplicité des méthodes utilisées, on pourra noter la remarquable efficacité et l'incroyable ubiquité des actions de groupes dans le dénombrement d'objets géométriques. De plus, par des arguments de comptage (injectif et même cardinal impliquent ensemble bijectif), on obtiendra des isomorphismes, dits exceptionnels, entre certains groupes classiques, qui établissent des correspondances utiles entre des domaines *a priori* différents. Ce chapitre élémentaire, qui aurait tout aussi bien pu être placé au tout début de l'ouvrage, sert aussi de préliminaire au chapitre qui suit.

Le chapitre IX sur les groupes de Lie suit la même problématique, mais à présent le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: du coup, les arguments de dénombrement n'ont plus cours pour montrer la surjectivité par une méthode générale. On constatera alors la performance du calcul différentiel joint à la théorie des groupes : on ajoute une structure de variété différentielle compatible avec la loi de groupe et le théorème d'inversion locale permet d'obtenir cette surjectivité si souvent convoitée en mathématiques. Ici, la recherche d'un isomorphisme exceptionnel est surtout prétexte à l'introduction de méthodes différentielles. Néanmoins, on peut interpréter de tels isomorphismes comme l'incarnation de dictionnaires entre deux géométries.

Les trois derniers chapitres relèvent d'une géométrie plus traditionnelle, disons, au moins dans la problématique. Le chapitre X présente en détail la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ (où $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque), que l'on peut considérer comme un espace gouverné par le groupe projectif $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$. Un triplet de points deux à deux distincts constitue ce que l'on appelle un repère projectif. Cette définition s'inscrit dans une philosophie générale, qui s'exprime ici par le fait que le groupe projectif agit de façon simplement transitive sur l'ensemble de ces triplets. Ainsi, l'action cesse d'être transitive si l'on fait agir le groupe projectif sur quatre points. Voici une idée simple et féconde qui fournira, puisqu'il y a désormais plusieurs orbites, un invariant

[4] Lemme fondateur, qui peut se résumer à « si l'on trouve douze pattes, c'est qu'il y a trois moutons ».

intéressant : le birapport de quatre points. Ce birapport est ensuite étudié sous plusieurs angles (sic !).

On résout dans le chapitre XI trois problèmes de géométrie plane. Il s'agit là de donner trois exemples de groupes de transformations adaptés qui permettent de ramener un problème géométrique donné à une forme normale, c'est-à-dire particulièrement agréable à étudier. On expliquera en termes d'invariants pourquoi choisir ici le groupe affine, là, le groupe projectif réel, et enfin le groupe projectif complexe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ — agissant par homographies.

Le chapitre XII s'intéresse aux célèbres solides platoniciens. Assez différent des autres chapitres, il a tout de même sa place ici en raison des exemples transversaux qu'il propose, et des liens étroits qu'il présente entre groupes et géométries. On calculera les groupes d'isométries de ces solides et l'on verra comment un simple coup d'œil sur ces objets permet d'obtenir de jolis morphismes, voire isomorphismes entre groupes classiques. Les résultats sont précisés et synthétisés dans des « dictionnaires » mettant en relation groupes classiques ($\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{A}_5$) et groupes d'isométries de solides (tétraèdre régulier, cube, dodécaèdre régulier). Pour la culture générale, on observera le cas intéressant de la dimension 4, puis, on constatera que les dimensions supérieures impliquent trop de contrainte pour dégager des solides réguliers, certes, mais drôles et originaux. On aime particulièrement ce chapitre pour sa transversalité et sa capacité de mettre en relation objets concrets et théorie abstraite. On peut d'ailleurs considérer cette relation comme un prémisse à la théorie des représentations[5].

Il aurait été dommage d'en rester là sans s'arrêter un instant sur l'un des points culminants de l'algèbre dans le programme de l'agrégation : la théorie des représentations. Dans le chapitre XIII et son addendum, le chapitre XIV, nous allons nous intéresser aux représentations d'un groupe fini sur le corps des complexes. Ce sera le moment de passer en revue les outils de l'algèbre : groupes finis, classes de conjugaison, actions de groupes, et aussi ceux de l'algèbre linéaire : espaces vectoriels, morphismes, dualité, réduction, formes bilinéaires, formes quadratiques ou hermitiennes… On en profitera aussi pour découvrir, voire redécouvrir, quelques aspects plus particuliers, comme la dualité des groupes abéliens finis (GAF), l'analyse harmonique (dans le cadre simplifié des GAF) et enfin les solides platoniciens. Comme dans les tout premiers chapitres, on retrouve l'apport des groupes (linéaires) sur la géométrie, et inversement, l'apport de la géométrie sur l'étude des groupes, à travers les nombreuses applications de table de caractères.

[5] Dans ce sens, [8, Chap. IX] est plus édifiant.

Références de base

Ce livre a été écrit sous l'influence majeure de Daniel Perrin, Michèle Audin et Rached Mneimné, et en particulier de leurs ouvrages respectifs [31], [5] et [26], dont la lecture est plus que chaudement recommandée. Qu'ils nous pardonnent de nous abriter derrière eux. Les deux auteurs ont été fortement influencés par la magistrale présentation de la géométrie dans l'esprit du programme d'Erlangen que l'on trouve dans la première annexe de [20].

L'expérience de l'enseignement en université a été une autre source d'inspiration. C'est durant la période des mouvements universitaires de 2008-2009 contre la loi LRU que les étudiants de master de l'université Lyon 1 ont eu l'idée de se réunir sur un forum internet pour travailler en s'entraidant, épaulés également par les enseignants-chercheurs, dans une ambiance sympathique et parfois bien nocturne. Ce forum a été un outil majeur, qui nous a permis de constater et d'archiver les points du programme d'agrégation qui posaient des problèmes aux étudiants. Un premier polycopié est né de cette expérience, et ce dernier n'a cessé de s'enrichir d'année en année grâce aux remarques des agrégatifs qui l'utilisaient.

Remerciements

Nous remercions vivement Serge Parmentier et Kenji Iohara, qui nous ont apporté un bon nombre d'exercices et de points de vue ; mention spéciale à Johann Colombano-Rut, dont les notes de cours en LaTeX avec de belles illustrations ont fourni une première version de ce qui est devenu ce livre ; à Florent Hours pour son investissement considérable dans le forum des étudiants. Nous remercions également nos prédécesseurs : les professeurs qui ont enseigné le cours de « Groupes et géométrie » durant les années précédentes : Claude Roger, Gilbert Hector et notre regretté collègue Fokko Du Cloux. Nous tenons à remercier les étudiants qui, soit par des questions insistantes et bien fondées, soit par leurs remarques avisées, voire une lecture minutieuse, ont permis d'améliorer le livre : Benjamin Bertrand, Jérémy Legendre, François Viard, Hélène Mariette, Maxime Moine (du Haut-Bugey), Teddy Mignot, Julie Carlier, Jill-Jênn Vie, Denis Roussillat, Marie Péronnier, Gauthier Clerc, et les autres. Un grand merci à Bruno Calado pour sa relecture des premiers chapitres et leurs annexes, il a su fureter dans les arcanes des preuves topologiques et a découvert des erreurs inavouables. Merci aussi à Amaury Thuillier, pour ses conversations, corrections et suggestions utiles, à Stéphane Lamy, pour des remarques pertinentes, à Cédric Bonnafé, pour ses réponses à la fois rapides et profondes à nos interrogations, et enfin à Michel Cretin, préparateur à l'agrégation de Lyon 1, pour son intérêt dans notre projet. Nous tenons enfin à remercier Alberto Arabia, Alain Debreil et Rached Mneimné, des éditions Calvage & Mounet, pour l'accueil et l'attention toute particulière qu'ils ont réservés à cet ouvrage.

Signalisation

Nous avons placé çà et là des signalisations qu'il est bon de savoir décoder. Voici une liste non exhaustive.

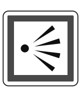
Danger classique.

Attention à rester dans le cadre des hypothèses. Une généralisation abusive pourrait être fatale.

On dit qu'un sentiment de honte est vite passé, mais c'était avant Youtube. Évitez les peaux de banane !

Concept délicat, à manipuler avec précaution si l'on ne veut pas se retrouver au fond du ravin.

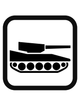
Concept plus métaphysique, qui peut engendrer des désordres existentiels.



Pourquoi ne pas faire une petite pause et admirer le paysage ?

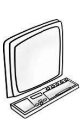
Résultat de bon niveau, qui peut s'exposer avec brio lors d'un oral de concours.

Alternative. Autre preuve, autre point de vue.



Jeu très tendance consistant à prouver, en exercice, un résultat élémentaire à l'aide d'un théorème high-tech.

Résultat bien sympathique, mais dont la preuve nous passera au-dessus de la tête. Pour ceux qui aiment prendre de l'altitude.



Se munir d'un bon logiciel de calcul pour attaquer cette partie.

Spoiler alert ! Il y a des lecteurs prudents qui aiment savoir à l'avance dans quoi ils s'engagent, les mêmes qui se délectent, dans les films d'Hitchcock, à bénéficier d'un temps d'avance sur les protagonistes. D'autres préfèrent la surprise. Pour respecter ces derniers, on leur suggère de sauter le paragraphe qui suit.

Une preuve qui roule pépère.

La petite histoire dans la grande, racontée par l'oncle Paul. Voilà qui nous permettra de rester dans l'univers des mathématiques tout en reposant nos pauvres neurones.

Avertissement. Les questions que vous trouverez dans ce livre peuvent être parfois des questions sincères (candides ?), c'est-à-dire des questions dont nous ne connaissons pas la réponse. Merci aux lecteurs d'en tenir compte dans leurs mails : envoyez-nous vos réponses s'il vous plaît ! Dans le même ordre d'idées, les notations et les concepts pourront subir, ici et là, quelques fluctuations un peu erratiques. Qu'on le pardonne aux auteurs en se rappelant la phrase d'Oscar Wilde : *Consistency is the last refuge of the unimaginative.*

Errata en ligne. Un livre de mathématiques ne comportant aucune erreur est un livre qui n'a jamais été lu. On rappelle donc au lecteur que nos errata peuvent se trouver en ligne sur

http ://math.univ-lyon1.fr/homes-www/H2G2/