Jacques Faraut

Analyse sur les groupes de Lie

Une introduction

Nouvelle édition revue et augmentée

Calvage & Mounet

Jacques FARAUT est professeur émérite à l'université Pierre-et-Marie Curie, Paris VI (Sorbonne Université). Il est membre de l'équipe « Analyse algébrique » de l'Institut de mathématiques de Jussieu (UMR 7586) et auteur de nombreux livres, dont *Analysis on Symmetric Cones* avec Adam Korányi, Oxford University Press (1995), et *Calcul Intégral*, Belin (2000).

jacques.faraut@imj.prg.fr

Mathematics Subject Classification (1991) – Primary :

15-XX Linear and multilinear algebra ; matrix theory
17-B10 Representations, algebraic theory (weights)
43-A75 Analysis on specific compact groups
43-A77 Analysis on general compact groups
35-K05 Heat equation
65-D07 Splines

ISBN 978-2-9163-5263-3

∞ Imprimé sur papier permanent

à mes étudiants

Préface

Ce livre est issu d'un cours de première année de master donné à l'université Pierre-et-Marie Curie. Il s'agit d'une introduction à la théorie des groupes de Lie, à l'étude de leurs représentations, et à leurs applications à l'analyse. Dans ce texte d'initiation nous ne présentons pas la théorie générale des groupes de Lie, qui suppose une connaissance des variétés différentiables. Nous nous limitons aux groupes de Lie linéaires, c'est-à-dire aux groupes de matrices, et les outils pour les étudier proviennent principalement de l'algèbre linéaire et du calcul différentiel. Un groupe de Lie linéaire est défini comme un sous-groupe fermé du groupe linéaire $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. L'application exponentielle permet d'associer à un groupe de Lie linéaire son algèbre de Lie, qui est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ des matrices carrées munie du crochet $[X, Y] = XY - YX$. On montre ensuite que tout groupe de Lie linéaire est une variété plongée dans l'espace vectoriel $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$. C'est un avantage de la définition que nous donnons d'un groupe de Lie linéaire, mais il faut observer que, avec cette définition, toute sous-algèbre de Lie de $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ n'est pas l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie linéaire, c'est-à-dire d'un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. La mesure de Haar d'un groupe de Lie linéaire est construite à l'aide des formes différentielles, et celles-ci sont utilisées pour établir plusieurs formules d'intégration qui associent la géométrie et l'analyse. Les propriétés de base des représentations des groupes compacts sont d'abord présentées dans la situation générale, puis explicitées dans le cas des groupes de Lie compacts non commutatifs les plus simples : le groupe spécial unitaire $\mathrm{SU}(2)$ et le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(3)$, et plus loin dans le cas des groupes unitaires $\mathrm{U}(n)$.

Les questions d'analyse que nous étudions tournent autour d'un objet central : l'opérateur de Laplace. L'analyse de Fourier sur un groupe de Lie linéaire compact permet de le diagonaliser, et la méthode de Fourier est en particulier toute naturelle pour résoudre le problème de Cauchy relatif à l'équation de la chaleur sur le groupe $\mathrm{SU}(2)$. De façon analogue, l'analyse sur la sphère de $\mathbb{R}^n$ utilise la décomposition en harmoniques sphériques et révèle l'interaction qui existe entre le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$ et l'analyse de Fourier sur $\mathbb{R}^n$, comme par exemple les relations de Bochner-Hecke, et aussi la théorie du potentiel lorsque l'on développe une fonction harmonique en série de polynômes homogènes harmoniques. Des questions de même nature se présentent quand on considère l'action du groupe orthogonal $O(n)$ sur l'espace $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles, ou celle du groupe unitaire $U(n)$ sur l'espace $\mathrm{Herm}(n, \mathbb{C})$ des matrices hermitiennes. L'expression de la partie radiale de l'opérateur de Laplace est une formule importante ; elle conduit en particulier à l'évaluation d'intégrales orbitales via la résolution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur sur l'espace des matrices hermitiennes $\mathrm{Herm}(n, \mathbb{C})$. L'étude des représentations irréductibles du groupe unitaire $U(n)$ se fait à partir du théorème du plus haut poids. Cette étude est un cas particulier de la théorie de Weyl des représentations irréductibles des groupes de Lie compacts. Les caractères des représentations irréductibles du groupe unitaire s'expriment à l'aide des fonctions de Schur. Nous en établissons quelques propriétés combinatoires. Celles-ci permettent de donner, pour certaines fonctions centrales, des développements de Fourier explicites, et aussi des développements de Taylor généralisés de fonctions holomorphes d'une variable complexe matricielle. Les questions d'analyse invariante traitées dans cet ouvrage illustrent comment les groupes de Lie interviennent dans de nombreux domaines : l'analyse matricielle, l'analyse de Fourier, l'analyse complexe, la physique mathématique.

Chaque chapitre est suivi d'exercices. Certaines questions que nous n'avons pas traitées dans le texte pour ne pas l'alourdir sont proposées sous forme de problèmes, comme, par exemple, au chapitre VII, la construction d'un isomorphisme équivariant entre l'espace des polynômes de deux variables homogènes de degré 2ℓ et celui des polynômes de trois variables homogènes de degré ℓ et harmoniques.

De très nombreux ouvrages traitent de la théorie des groupes de Lie. Nous en citons plusieurs dans la bibliographie. Nous nous sommes inspiré en plusieurs points de la présentation donnée par J. Hilgert et K.-H. Neeb dans leur livre Lie-Gruppen und Lie-Algebren, et nous avons plusieurs fois repris les élégantes argumentations que l'on trouve dans le livre de R. Mneimné et F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.

Nous remercions vivement Hervé Sabourin et Valério Toledano, qui ont lu des versions préliminaires de ce texte et nous ont donné des indications précieuses pour l'améliorer.

Dans cette nouvelle édition, nous avons ajouté un dernier chapitre qui présente, avec des résultats classiques, quelques résultats nouveaux relatifs à l'analyse sur le groupe unitaire et sur l'espace des matrices hermitiennes. Ces résultats illustrent l'analyse développée dans les chapitres précédents. On y voit apparaître des relations inattendues avec d'autres domaines de l'analyse comme l'interpolation polynomiale et les fonctions splines.

Table des matières

Chapitre I

Le groupe linéaire

Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est le groupe des matrices réelles $n \times n$ inversibles. Après quelques préliminaires topologiques, nous présenterons dans ce chapitre des sous-groupes du groupe linéaire qui jouent un rôle important en géométrie et en analyse. La décomposition polaire et la décomposition de Gram des matrices, que nous établirons, sont utiles pour démontrer certaines propriétés topologiques de ces groupes.

1. Groupes topologiques

Un *groupe topologique* est un groupe G muni d'une topologie telle que les applications

$$(x, y) \mapsto xy, \quad G \times G \to G,$$
$$x \mapsto x^{-1}, \quad G \to G,$$

soient continues, ce qui est équivalent à dire que l'application

$$(x, y) \mapsto xy^{-1}, \quad G \times G \to G$$

soit continue.

Un groupe topologique est séparé si $\{e\}$ est fermé (e est l'élément neutre de G).

Soit H un sous-groupe d'un groupe topologique G. Si H est ouvert, alors H est aussi fermé. En effet, si $g \notin H$, gH est un voisinage de g contenu dans H^c, si bien que H^c est ouvert.

Soit G_0 la composante connexe de e dans G (on dit *composante neutre*). Alors, G_0 est un sous-groupe distingué de G. En effet, si $g \in G_0$, alors $g^{-1}G_0$ est connexe et contient e, donc $g^{-1}G_0 \subset G_0$, et G_0 est un sous-groupe de G. De plus, si $g \in G$, alors gG_0g^{-1} est connexe et contient e, de sorte que $gG_0g^{-1} \subset G_0$, et G_0 est un sous-groupe distingué.

1.1. Proposition. *Soit V un voisinage connexe de e dans un groupe topologique G. Alors,*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n = G_0,$$

où G_0 désigne la composante neutre de G.

Ainsi, un groupe topologique connexe est engendré par tout voisinage de l'élément neutre.

Démonstration. En effet, si V est un voisinage de e, alors la réunion croissante $U = \cup_{n=1}^{\infty} V^n$ est un ouvert, car V^{n+1} est un voisinage de chacun des points de V^n. Si V est connexe, alors U est connexe, car c'est une réunion d'ensembles connexes qui tous contiennent e. Donc, $U \subset G_0$.
Soit $W = V \cap V^{-1}$, alors

$$U' = \bigcup_{n=1}^{\infty} W^n$$

est un sous-groupe ouvert de G, donc fermé. Puisque $U' \subset G_0$, car $U' \subset U$, alors $U' = G_0$, et par suite $U = G_0$. $\square$

La topologie d'un groupe topologique est déterminée par l'ensemble $\mathscr{V}$ des voisinages de e. Cet ensemble possède les propriétés suivantes.

(a) Si $V \in \mathscr{V}$, il existe V_1 et $V_2 \in \mathscr{V}$ tels que $V_1 \cdot V_2 \subset V$.

(b) Si $V \in \mathscr{V}$, alors $V^{-1} \in \mathscr{V}$.

(c) Si $V \in \mathscr{V}$ et $g \in G$, alors $gVg^{-1} \in \mathscr{V}$.

Réciproquement, si G est un groupe et si $\mathscr{V}$ est un ensemble de parties non vides de G possédant les propriétés suivantes :

▷ toute partie de G contenant un ensemble de $\mathscr{V}$ appartient à $\mathscr{V}$,

▷ toute intersection finie d'ensembles de $\mathscr{V}$ appartient à $\mathscr{V}$, (c'est-à-dire que $\mathscr{V}$ est un *filtre*),

▷ et aussi les propriétés (a), (b) et (c),

il existe alors une unique topologie sur G qui fait de G un groupe topologique telle que $\mathscr{V}$ soit l'ensemble des voisinages de e. Les voisinages d'un élément g de G sont les ensembles gV $(V \in \mathscr{V})$.

2. Le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$

On note $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices $n\times n$ à coefficients réels, et $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$, qui est appelé le *groupe linéaire*. On va le considérer du point de vue de sa structure topologique et de sa structure différentiable.

On considère sur $\mathbb{R}^n$ la norme euclidienne

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

associée au produit scalaire

$$(x|y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n,$$

et sur $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ la norme

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, \|x\|\leqslant 1} \|Ax\|.$$

Rappelons que sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes. Notons que la norme que nous considérons sur $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ possède la propriété d'être une norme d'algèbre,

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\times\|B\|.$$

La multiplication dans $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ est par suite une application continue.

2.1. Proposition. *Le groupe* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *est un ouvert de* $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$*. L'application* $g\mapsto g^{-1}$*, de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *dans lui-même, est continue.*

Démonstration. On peut démontrer cette proposition en utilisant les formules de Cramer. En effet,

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{g\in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \mid \det(g)\neq 0\},$$

et

$$g^{-1} = \frac{1}{\det g}\tilde{g},$$

où $\tilde{g}$ désigne la matrice des cofacteurs dont les coefficients sont des polynômes en les coefficients de g. Nous allons en donner une autre démonstration qui a l'avantage d'être valable si l'on remplace $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ par une algèbre de Banach de dimension finie ou infinie.

(a) *Soit* $M\in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$*. Si* $\|M\|<1$*, alors* $I+M$ *est inversible et*

$$\|(I+M)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|M\|}.$$

En effet, la série $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kM^k$ converge normalement, et sa somme est