MATHÉMATIQUES EN DEVENIR

Mathématiques en devenir

105. — Bruno Ingrao. *Coniques projectives, affines et métriques*
106. — Wolfgang Bertram. *Calcul différentiel topologique élémentaire*
107. — Henri Lombardi & Claude Quitté. *Algèbre commutative. Méthodes constructives. Modules projectifs de type fini*
108. — Frédéric Testard. *Analyse mathématique. La maîtrise de l'implicite*
109. — Grégory Berhuy. *Modules : théorie, pratique... et un peu d'arithmétique*
110. — Bernard Candelpergher. *Théorie des probabilités. Une introduction élémentaire*
111. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome premier*
112. — Gema-Maria Díaz-Toca, Henri Lombardi & Claude Quitté. *Modules sur les anneaux commutatifs*
113. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome second* – encores
114. — Alain Debreil. *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes*
115. — François Rouvière. *Initiation à la géométrie de Riemann*
116. — Nikolaï Nikolski. *Matrices et opérateurs de Toeplitz*
117. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome premier*
118. — Martine et Hervé Queffélec. *Analyse complexe et applications*
119. — Alain Debreil, Jean-Denis Eiden, Rached Mneimné et Tuong Huy NGuyen. *Formes quadratiques et géométrie – Une introduction, et un peu plus*
120. — Christian Leruste.*Topologie algébrique – Une introduction, et au-delà*
121. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome second*
121. — Jacques Faraut. *Analyse sur les groupes de Lie, une introduction.* Nouvelle édition revue et augmentée
122. — Charles-Michel Marle. *Géométrie symplectique et géométrie de Poisson.*

Charles-Michel Marle

Géométrie symplectique et géométrie de Poisson

Calvage & Mounet

Charles-Michel Marle est ancien élève de l'École Polytechnique, ingénieur du corps des Mines et Professeur honoraire à l'Université Pierre-et-Marie Curie. Ses travaux de recherche concernent la géométrie symplectique, les systèmes hamiltoniens et la mécanique.

Mathematics Subject Classification (2000) :

53-D05 Symplectic manifolds
53-D12 Lagrangian submanifolds
53-D17 Poisson manifolds
53-D20 Momentum maps, symplectic reduction
70-H03 Lagrange's equations
70-H05 Hamilton's equations
70-H25 Hamilton's principle

ISBN 978-2-916352-70-1

9 782916 352701

∞ Imprimé sur papier permanent

À la mémoire de mes parents, Jérôme Marle et Joséphine Saïd,
à mes collègues et amis des Journées relativistes,
du Séminaire sud-rhodanien de Géométrie,
du Séminaire de Géométrie hamiltonienne
et du Colloque international de Théories variationnelles

Préface

Le mot *symplectique* fut utilisé pour la première fois, dans le sens qu'il a aujourd'hui en mathématiques, par le mathématicien allemand Hermann Weyl (1885-1955), dans son célèbre livre *The classical groups*, publié pour la première fois en 1939 [200]. Le concept de *structure symplectique* existe en mathématiques depuis bien plus longtemps, au moins depuis les travaux du mathématicien piémontais Joseph Louis Lagrange (1736–1813) et du mathématicien français Siméon Denis Poisson (1781–1840) sur la variation lente des éléments orbitaux des planètes du système solaire, effectués de 1808 à 1810. Voici, brièvement résumée, l'histoire de cette importante découverte.

En interprétant les observations de la planète Mars faites par l'astronome danois Tycho Brahé (1546–1601), le mathématicien et astronome allemand Johannes Kepler (1571–1630) montra, en 1605, qu'avec une très bonne approximation, l'orbite de cette planète est une ellipse dont le Soleil occupe un foyer, et affirma que ce résultat, aujourd'hui appelé *première loi de Kepler*, s'applique à toutes les planètes du système solaire. Dès 1602, il avait énoncé la *loi des aires*, aujourd'hui appelée *deuxième loi de Kepler*, selon laquelle l'aire balayée par le segment de droite joignant une planète au Soleil est une fonction affine du temps. Vers 1618, il énonça la *troisième loi de Kepler*, selon laquelle le carré de la période du mouvement d'une planète est proportionnel au cube du grand axe de son orbite. En 1684, sollicité par l'astronome britannique Edmond Halley (1656–1742), le grand mathématicien, physicien et astronome anglais Isaac Newton (1643–1727) montra que les trois lois de Kepler sont des conséquences de l'application, au mouvement des planètes, des lois de la Mécanique et de la gravitation classiques (non relativistes, aujourd'hui appelées *newtoniennes*), qu'il avait découvertes[1]. Avec l'aide de Halley, il publia ses découvertes en 1687 dans son célèbre ouvrage *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* [149].

[1]Robert Hooke (1635–1703), scientifique de premier plan, brillant inventeur et expérimentateur contemporain de Newton, avait dès 1666 affirmé que tous les corps céleste exerçaient les uns sur les autres une force attractive d'autant plus grande qu'ils sont plus

Les *éléments orbitaux* d'une planète du système solaire, dont le mouvement est supposé obéir aux trois lois de Kepler, sont les six grandeurs scalaires qui déterminent l'orbite de cette planète et, à chaque instant, la position de la planète sur son orbite. Deux éléments orbitaux déterminent le plan de l'orbite, puisque ce plan contient le Soleil (assimilé, comme la planète, à un point). Deux autres déterminent la forme et la position de l'orbite dans le plan qui la contient. Un cinquième (qui peut être, par exemple, la longueur du grand axe) détermine la taille de l'orbite. Un sixième et dernier élément orbital (par exemple la position de la planète sur son orbite à une date fixée, prise comme origine du temps) suffit pour déterminer la position de la planète à tout instant. Ces éléments orbitaux forment un système de coordonnées locales sur l'ensemble de tous les mouvements possibles d'une planète autour du Soleil, lorsque ce mouvement obéit aux trois lois de Kepler. Dans le langage mathématique actuel, on peut dire que l'ensemble des mouvements képlériens d'une planète est une variété différentiable (non séparée, en raison de l'existence de mouvements s'achevant par une collision de la planète avec le soleil, ou commençant par l'éjection de la planète par le soleil), de dimension 6 [176], égale à celle de l'espace des phases.

Effectuées pendant une durée suffisamment longue, les observations astronomiques ont montré que les éléments orbitaux des planètes du système solaire varient lentement au cours du temps. Ce n'est d'ailleurs qu'en première approximation que ces lois sont des conséquences des lois de la mécanique et de la gravitation newtoniennes : elles ne sont obtenues que lorsque la masse de chaque planète est considérée comme négligeable auprès de celle du Soleil, et qu'il n'est tenu compte que de l'attraction gravitationnelle exercée sur cette planète par le Soleil, et non pas de l'attraction gravitationnelle exercée par les autres planètes. De 1774 à 1784, plusieurs mathématiciens et astronomes, notamment le français Pierre-Simon Laplace (1749–1827) et Joseph-Louis Lagrange, ont utilisé les lois de la mécanique et de la gravitation newtonienne classique, sans négliger la masse des planètes ni l'attraction gravitationnelle exercée sur chaque planète par toutes les autres, pour calculer les variations lentes des éléments orbitaux. En 1808, Lagrange ne s'était plus intéressé à ce problème depuis plus de vingt ans, lorsque son jeune élève Poisson présenta à l'Académie des Sciences un mémoire montrant que certaines hypothèses simplificatrices qu'il avait faites dans ses travaux de 1776 à 1784 étaient inutiles [162]. Lagrange comprit que le résultat obtenu par Poisson était dû à des propriétés très profondes, jusque-là passées inaperçues, des équations qui régissent la lente variation des paramètres orbitaux [110]. Il considéra, plus généralement, un système

proches. En 1679 et 1680, il entretint avec Newton une correspondance portant notamment sur les lois de la gravitation. Selon Newton, la découverte de la forme mathématique précise de ces lois ne saurait être attribuée à Hooke, assertion parfois controversée.

mécanique quelconque dont l'évolution est régie par les lois de la mécanique newtonienne, dont l'ensemble des mouvements possibles est, dans une première approximation, paramétré par $2n$ quantités $a_1, \dots, a_{2n}$, et s'intéressa aux variations lentes de ces $2n$ quantités qui se manifestent lorsque l'on va au delà de cette première approximation [111]. Il montra que les équations différentielles régissant ces lentes variations sont de la forme

$$\sum_{j=1}^{2n} (a_i, a_j) \frac{\mathrm{d}a_j(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_i}\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2n\,. \tag{$*$}$$

En première approximation, Ω est négligé et les paramètres $a_1, \dots, a_{2n}$ sont des constantes. Ce sont des coordonnées locales sur la variété des mouvements dans cette première approximation.[2] Dans cette équation, chaque quantité (a_i, a_j) est une fonction des $2n$ paramètres $a_1, \dots, a_{2n}$, qui ne dépend pas du temps. Elle est aujourd'hui appelée *parenthèse de Lagrange*. Quant à Ω, c'est une fonction de $a_1, \dots, a_{2n}$ et aussi du temps. Dans le cas du système solaire, la fonction Ω représente les actions gravitationnelles, négligées en première approximation, exercées, sur la planète considérée, par toutes les autres planètes ; elle dépend du temps parce que la position de ces planètes dépend du temps.

La matrice dont les fonctions (a_i, a_j) sont les coefficients est antisymétrique, et son déterminant est non nul. Le système d'équations $(*)$ ci-dessus peut donc être résolu par rapport aux dérivées $\dfrac{\mathrm{d}a_i(t)}{\mathrm{d}t}$, et prend la forme

$$\frac{\mathrm{d}a_i(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{2n} L_{ij} \frac{\partial \Omega}{\partial a_j}\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2n\,. \tag{$**$}$$

Lagrange remarqua que les quantités L_{ij} sont des fonctions de $a_1, \dots, a_{2n}$, mais ne donna pas leur expression explicite.

C'est Poisson qui, quelques mois plus tard [163], combla cette lacune en introduisant une loi de composition sur l'ensemble des fonctions différentiables définies sur la variété des mouvements, aujourd'hui appelée *crochet de Poisson* et notée $(a_i, a_j) \mapsto \{a_i, a_j\}$. Les lecteurs intéressés par l'histoire des sciences pourront consulter le très intéressant livre récent [107] sur la vie et l'oeuvre de Poisson. Soucieux d'avoir le dernier mot, Lagrange enfin [112], en utilisant le crochet de Poisson, mit l'équation $(**)$ ci-dessus

[2] Dans tout ce qui suit, j'appelle « variété des mouvements » l'ensemble de tous les mouvements possibles du système considéré obéissant aux équations simplifiées, employées en première approximation, la fonction Ω étant négligée. Pour chacun de ces mouvements, les paramètres $a_1, \dots, a_{2n}$ gardent une valeur constante au cours du temps.

sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}a_i(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{2n} \{a_i, a_j\} \frac{\partial \Omega}{\partial a_j}\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2n\,. \qquad (***)$$

La dernière édition de son célèbre livre [113] comporte une présentation des travaux décrits ci-dessus, plus facile à comprendre que les mémoires des années 1808 et 1809.

Dans le langage actuel, les parenthèses de Lagrange (a_i, a_j) sont les composantes, dans le système de coordonnées locales formé par les $2n$ paramètres $a_1, \ldots a_{2n}$, de la forme symplectique naturelle de la variété des mouvements du système mécanique considéré [177]. La notation employée pour les désigner est trompeuse : chaque parenthèse de Lagrange (a_i, a_j) est une fonction de tous les paramètres $a_1, \ldots, a_{2n}$, qui ne peut s'exprimer au moyen des seules fonctions a_i et a_j et de leurs dérivées partielles. Le crochet de Poisson a de bien meilleures propriétés : les crochets de Poisson $\{a_i, a_j\}$ sont les composantes du champ de bivecteurs de Poisson associé à la forme symplectique naturelle de la variété des mouvements (IV-1.2.1), et la matrice dont ce sont les coefficients est l'inverse de celle dont les coefficients sont les parenthèses de Lagrange (a_i, a_j) ; le crochet de Poisson $\{f, g\}$ de deux fonctions différentiables quelconques définies sur la variété des mouvements peut parfaitement être défini, et sa valeur, en chaque point de cette variété, ne dépend que des valeurs des dérivées partielles de ces deux fonctions par rapport aux coordonnées locales. Le crochet de Poisson possède une autre propriété importante, que Lagrange et Poisson ont ignorée : il vérifie l'identité de Jacobi, découverte par le mathématicien allemand Carl Gustav Jacobi (1804–1851) [84, 98], dont le rôle fut très important dans la théorie des groupes et algèbres de Lie développée par le mathématicien norvégien Marius Sophus Lie (1842–1899). Lagrange aurait pu écrire l'équation $(***)$ ci-dessus sous une forme bien plus concise

$$\frac{\mathrm{d}a_i(t)}{\mathrm{d}t} = \{a_i, \Omega\}\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2n\,,$$

qui n'est autre que l'équation différentielle de Hamilton (II-6.9).

Le grand mathématicien et physicien irlandais William Rowan Hamiton (1805–1865), qui n'avait que six ans lorsque Lagrange et Poisson ont écrit, dans un cas très particulier, l'équation qui aujourd'hui porte son nom, obtint vingt ans plus tard cette équation pour un système mécanique très général [81, 82, 83]. Une équation analogue fut formulée, indépendamment et à la même époque, par le mathématicien français Augustin Louis Cauchy (1789–1857) [36]. Alors que les équations qui régissent l'évolution d'un système mécanique utilisées par Lagrange, aujourd'hui appelées *équations* *d'Euler-Lagrange*, sont des équations différentielles du second ordre définies sur l'espace tangent à la variété de configuration du système, l'équation de Hamilton est une équation du premier ordre sur le fibré cotangent à cette variété. Le passage des équations d'Euler-Lagrange à l'équation de Hamilton utilise l'*application de Legendre*, ainsi nommée en hommage au mathématicien français Adrien-Marie Legendre (1752–1833).

Mon intérêt pour la géométrie symplectique date du début des années 1970. L'emploi de méthodes géométriques en Mécanique, déjà bien représenté en Russie et aux États-Unis, commençait à se développer en France. Je suivais, à cette époque, les cours de mon vénéré maître André Lichnerowicz (1915–1998) au Collège de France. J'avais assisté à une conférence faite, vers 1968, par le grand mathématicien russe Vladimir Arnold (1937–2010) au séminaire organisé par André Lichnerowicz et Madame Yvonne Choquet-Bruhat, alternativement au Collège de France et à l'institut Henri Poincaré. J'avais lu, et tenté de comprendre, les livres de Jean-Marie Souriau [173, 174] et de George Mackey [128]. Chaque année, je participais aux Journées relativistes, rencontres organisées par André Lichnerowicz et ses élèves, réunissant des géomètres et des chercheurs intéressés par la théorie de la relativité. Après avoir participé aux deux colloques internationaux qui ont eu lieu en 1974 à Aix en Provence et à Salamanque, j'ai choisi d'approfondir ce sujet. J'ai eu la chance de rencontrer plusieurs mathématiciens éminents, notamment Vladimir Arnold, Yvonne Choquet-Bruhat, Pierre Dolbeault, Moshe Flato, Victor Guillemin, Bertram Kostant, Jean Leray, Paul Malliavin, Jerrold Marsden, Tudor Ratiu, Georges Reeb, Shlomo Sternberg, Wlodzimierz Tulczyjew, Alan Weinstein, qui, de diverses manières, ont contribué à stimuler mon intérêt pour ce domaine. Le séminaire sud-rhodanien de géométrie, créé au début des années 1980 par les universités d'Avignon, Aix-Marseille, Lyon et Montpellier, contribua de manière importante au développement des recherches faites en France sur la géométrie symplectique et la géométrie de Poisson. En participant aux rencontres organisées dans le cadre de ce séminaire, j'ai beaucoup appris au contact de ses fondateurs et participants, Nicole Desolneux-Moulis, hélas trop tôt disparue, Claude Albert, Robert Brouzet, Pierre Dazord, Jean-Paul Dufour, Hélène et Yvon Kerbrat, Alberto Medina, Pierre Molino, Jean-Marie Morvan, Michel N'Guiffo Boyom, Claude Roger, Jean-Marie Souriau, Alan Weinstein (alors en séjour de longue durée à l'université de Lyon) et, plus tard, Nguyen Tien Zung, un des rares orateurs qui, devant un auditoire essentiellement français, à un colloque organisé en France à la mémoire d'une mathématicienne française, eurent le bon goût de faire leur exposé en français. J'ai longtemps travaillé avec ma regrettée collègue Paulette Libermann (1919–2007), avec qui j'ai écrit un livre sur la géométrie symplectique, publié (hélas, en anglais) en 1987 [120]. Le présent ouvrage expose, sous une forme simplifiée, plus adaptée, j'espère, à des étudiants débutants, une partie du contenu de ce livre, en l'enrichissant de certains résultats concernant principalement la géométrie de Poisson, le calcul des variations et ses relations avec la géométrie symplectique.

En voici, brièvement résumé, le contenu.

Le premier chapitre, qui n'utilise que quelques notions très simples d'algèbre linéaire, donne les définitions d'une forme symplectique sur un espace vectoriel réel de dimension finie, de l'orthogonalité symplectique, et des sous-espaces vectoriels remarquables d'un espace vectoriel symplectique : sous-espaces isotropes, coïsotropes, lagrangiens, symplectiques. J'explique dans ce chapitre comment construire, à partir d'un espace vectoriel symplectique, par restriction à un sous-espace vectoriel puis quotient par le noyau de la forme induite, un autre sous-espace vectoriel symplectique, dit *réduit*, de dimension plus petite. Je montre aussi que tout espace vectoriel symplectique peut être muni d'une structure complexe adaptée, en un sens bien précis, à sa structure symplectique.

Le chapitre II, qui définit et étudie les variétés symplectiques, utilise quelques propriétés des algèbres graduées et quelques notions de géométrie différentielle, brièvement exposées dans le premier paragraphe de l'annexe A et les deux premiers paragraphes de l'annexe B. J'y présente la forme de Liouville d'un fibré cotangent, car la différentielle extérieure de cette forme est l'exemple de forme symplectique le plus fréquemment rencontré dans les applications en Mécanique et en Physique. J'introduis aussi dans ce chapitre les variétés présymplectiques car on les rencontre, par exemple, en Mécanique : l'espace d'évolution d'un système mécanique conservatif est en effet une variété présymplectique. À chaque fonction différentiable définie sur une variété symplectique est naturellement associé un champ de vecteurs (dit *champ de vecteurs hamiltonien*) sur cette variété, donc une équation différentielle, dite *équation de Hamilton*, en hommage à William Rowan Hamilton. La fonction considérée peut dépendre aussi d'une variable $t \in \mathbb{R}$ qui, dans les applications en Mécanique et en Physique, est le temps ; c'est pourquoi cette fonction est dite *dépendant du temps*. Le champ de vecteurs hamiltonien correspondant dépend alors lui aussi de cette variable (je l'appelle *champ de vecteurs dépendant du temps*) et l'équation de Hamilton est une équation différentielle *non autonome*. Je donne la définition du crochet de Poisson de deux fonctions différentiables définies sur une variété symplectique et j'en présente quelques propriétés. Sur une variété présymplectique, il existe un champ de vecteurs associé à une fonction différentiable seulement lorsque cette fonction appartient à une sous-algèbre de l'algèbre de toutes les fonctions différentiables, que j'appelle *algèbre des hamiltoniens* *admissibles*. J'en expose les propriétés et je montre que le crochet de Poisson de deux hamiltoniens admissibles définis sur une variété présymplectique existe, et possède essentiellement les mêmes propriétés que le crochet de Poisson usuel de deux fonctions définies sur une variété symplectique. Le paragraphe suivant définit les variétés de contact, de dimension impaire, étroitement liées aux variétés symplectiques toujours de dimension paire, et en expose quelques propriétés. Je présente ensuite le théorème de Darboux, qui montre que la forme symplectique d'un fibré cotangent est, localement, un modèle universel de forme symplectique, ainsi que plusieurs généralisations de ce théorème dues au mathématicien américain Alan Weinstein. Je présente ensuite la réduction d'une variété symplectique déterminée par la donnée d'une sous-variété sur laquelle la forme symplectique induit une forme de rang constant. Enfin, dans le dernier paragraphe de ce chapitre, je présente les isomorphismes des fibrés tangents et cotangents itérés TT^*N, T^*TN et T^*T^*N (N étant une variété différentiable) découverts par le mathématicien polonais Wlodzimierz Tulczyjew. Ces isomorphismes permettent de mieux comprendre les relations existant entre les formalismes lagrangien et hamiltonien, fréquemment employés en Mécanique et en Physique, et suggèrent la définition des systèmes hamiltoniens implicites qui généralisent les systèmes hamiltoniens usuels.

Il existe des relations étroites entre le calcul des variations et la géométrie symplectique, que j'expose au chapitre III. Étant donné un lagrangien différentiable L, éventuellement dépendant du temps, défini sur le produit de $\mathbb{R}$ et du fibré tangent TN à une variété N (ou sur un ouvert de ce produit), la fonctionnelle d'action associe, à chaque courbe paramétrée différentiable $\gamma : [t_0, t_1] \to N$, la quantité

$$I_L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L\Big(t, \frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\Big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Dans les trois premiers paragraphes de ce chapitre aucune hypothèse n'est faite sur le lagrangien L, hormis sa différentiabilité. Je m'intéresse aux conditions dans lesquelles I_L est stationnaire, en une courbe paramétrée différentiable γ, vis-à-vis des variations différentiables et à extrémités fixées de cette courbe. J'introduis les 1-formes de Poincaré-Cartan $\widehat{\varpi}_L$ et de Hilbert ϖ_L définies, respectivement, sur le produit $\mathbb{R} \times TN$ et sur un ouvert, noté $T^+(\mathbb{R} \times N)$, de $T(\mathbb{R} \times N)$. J'expose le théorème d'Euler-Cartan, qui montre que la fonctionnelle I_L est stationnaire, en une courbe paramétrée différentiable γ, vis-à-vis des variations différentiables et à extrémités fixées de cette courbe, si et seulement si, pour tout $t \in [t_0, t_1]$, le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(t, \dfrac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\Big)$ appartient au noyau de la forme présymplectique $\mathrm{d}\widehat{\varpi}_L$.

Cette condition s'exprime sous une forme géométrique intrinsèque, indépendamment de tout choix d'un système de coordonnées locales sur N. Les équations d'Euler-Lagrange bien connues en sont l'expression en coordonnées locales. Une condition nécessaire et suffisante équivalente s'exprime au moyen de la forme présymplectique $\mathrm{d}\varpi_L$.

Dans une courte note publiée en 1901 [161], le grand mathématicien et physicien français Henri Poincaré (1854–1912) a montré que lorsqu'il existe, sur la variété N, une famille de champs de vecteurs formant (pour le crochet de Lie) une algèbre de Lie de dimension finie, telle que pour chaque point x de N l'ensemble des valeurs en x de ces champs de vecteurs soit l'espace vectoriel tangent T_xN entier, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle I_L soit stationnaire, en une courbe paramétrée différentiable γ, vis-à-vis des variations différentiables et à extrémités fixées de cette courbe, peut se mettre sous forme d'une équation différentielle, aujourd'hui appelée *équation d'Euler-Poincaré*, sur le produit de N, de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et de l'espace vectoriel dual $\mathcal{G}^*$. Ce remarquable résultat est déduit du théorème d'Euler-Cartan au paragraphe 4 du chapitre III.

Dans le paragraphes 5 du chapitre III, le lagrangien L est supposé hyper-régulier. Un hamiltonien H_L (pouvant dépendre du temps) lui est alors naturellement associé, et je montre que la fonctionnelle I_L est stationnaire, en une courbe paramétrée différentiable γ, vis-à-vis des variations différentiables et à extrémités fixées de cette courbe, si et seulement si la courbe qui lui correspond, à valeurs dans le fibré cotangent T^*N, est solution de l'équation de Hamilton associée à H_L. Dans le paragraphe suivant, le lagrangien est supposé homogène de degré 1. Bien que le hamiltonien associé soit identiquement nul, je montre que sous certaines hypothèses (que j'appelle *hyper-régularité projective*) on peut définir sur T^*N des hamiltoniens compatibles permettant de traiter le problème de calcul des variations considéré dans le cadre du formalisme hamiltonien. Le dernier paragraphe de ce chapitre utilise les isomorphismes de Tulczyjew présentés au chapitre II pour comparer les formalismes lagrangien et hamiltonien.

Les variétés de Poisson généralisent de manière naturelle les variétés symplectiques. Apparues dans les travaux de nombreux physiciens au cours de la première moitié du XX-ème siècle, elles ont été ainsi nommées par le mathématicien français André Lichnerowicz en 1977 [121], qui en a commencé l'étude systématique. La découverte d'une grande partie de leurs propriétés locales est due à Alan Weinstein [194]. Leur étude donne lieu, encore de nos jours, à de nombreux travaux. Elles sont présentées dans le chapitre IV. Les variétés symplectiques sont des exemples particuliers de variétés de Poisson. Sur l'espace vectoriel dual d'une algèbre de Lie de dimension finie, il existe une structure naturelle de variété de Poisson, dite *structure de Lie-Poisson*, qui peut être modifiée au moyen d'un cocycle symplectique. Ces exemples sont présentés dès le premier paragraphe du chapitre IV. Comme à chaque fonction différentiable définie sur une variété symplectique, on peut associer, à chaque fonction différentiable définie sur une variété de Poisson, un champ de vecteurs, dit *champ de vecteurs hamiltonien*, donc une équation différentielle de Hamilton. Le formalisme hamiltonien bien connu sur les variétés symplectiques et la définition du crochet de Poisson s'étendent tout naturellement aux variétés de Poisson. Après avoir, dans les quatre premiers paragraphes du chapitre IV, défini les variétés de Poisson, donné quelques exemples et établi leurs premières propriétés, je présente, dans les paragraphes 5 à 8, la notion de champ caractéristique d'une variété de Poisson et je montre que toute variété de Poisson est feuilletée, par un feuilletage de Stefan, en variétés symplectiques, qui peuvent ne pas être toutes de la même dimension. Les raisonnements conduisant à ce résultat s'appliquent d'ailleurs aussi aux variétés symplectiques et produisent une preuve du théorème de Darboux différente de celle présentée au chapitre II. Dans le paragraphe 9 je montre l'existence, sur l'algèbre extérieure des formes différentielles définies sur une variété de Poisson, d'un crochet qui en fait une algèbre de Lie graduée. Ce remarquable résultat s'explique par le fait, établi dans le paragraphe 10, que le fibré cotangent à une variété de Poisson possède une structure naturelle d'algébroïde de Lie. J'espère que ce livre sera, pour certains lecteurs, une préparation utile à l'étude des groupoïdes de Lie, en particulier des groupoïdes symplectiques et de Poisson, et de leurs algébroïdes de Lie, que je n'ai pu traiter ici. Les deux derniers paragraphes du chapitre IV définissent et étudient les variétés de Jacobi, qui englobent, comme cas particuliers, à la fois les variétés symplectiques, les variétés de Poisson et les variétés de contact dont la structure est définie par une forme de contact spécifiée, et les fibrés de Jacobi, qui englobent aussi les variétés de contact les plus générales.

Le chapitre V traite des symétries des variétés présymplectiques, symplectiques et de Poisson, et de celles des systèmes hamiltoniens définis sur ces variétés. Les quelques notions sur les groupes de Lie et leurs algèbres de Lie nécessaires pour en aborder l'étude sont résumées dans le paragraphe 4 de l'annexe B. Le premier paragraphe de ce chapitre donne quelques rappels sur l'action d'un groupe de Lie ou d'une algèbre de Lie sur une variété différentiable. Je présente ensuite les notions de 1-cocycle et de 1-cobord d'un groupe de Lie et d'une algèbre de Lie, à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sur lequel ce groupe, ou cette algèbre, agit par une action linéaire. Je montre ensuite comment ces cocycles et cobords apparaissent d'une manière naturelle lorsque l'on considère une action affine d'un groupe de Lie, ou d'une algèbre de Lie, sur un espace affine de dimension finie. Je définis ensuite les notions d'action présymplectique, symplectique et de Poisson, d'un groupe de Lie, et d'une algèbre de Lie, sur une variété présymplectique, symplectique ou de Poisson. Parmi ces actions, les plus intéressantes sont les actions hamiltoniennes, définies dans le paragraphe 5. À chaque action hamiltonienne est associée une application (non unique), définie sur la variété présymplectique, symplectique ou de Poisson considérée, et à valeurs dans le dual de l'algèbre de Lie qui agit sur cette variété, appelée *moment* de cette action. Ainsi par exemple, l'action coadjointe d'un groupe de Lie G sur le dual $\mathcal{G}^*$ de son algèbre de Lie $\mathcal{G}$, muni de sa structure de Lie-Poisson, est hamiltonienne et admet pour moment l'application identique de $\mathcal{G}^*$. Le moment d'une action hamiltonienne a de remarquables propriétés, dont les plus élémentaires sont étudiées au paragraphe 6. Je montre notamment que chaque moment de l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie sur une variété symplectique connexe est équivariant, pour l'action de ce groupe sur la variété considérée, et une action affine sur le dual de son algèbre de Lie, dont la partie linéaire est l'action coadjointe. De plus, le moment est une application de Poisson lorsque le dual de l'algèbre de Lie du groupe est muni de sa structure de Lie-Poisson modifiée par un cocycle symplectique convenablement choisi, dont la classe de cohomologie ne dépend pas du choix du moment considéré. Ces propriétés sont appliquées successivement aux systèmes lagrangiens et hamiltoniens (paragraphes 7 et 8). Le célèbre théorème de Noether, dû à la mathématicienne allemande Emmy Noether (1882–1935), qui associe aux symétries des intégrales premières, est présenté pour ces deux types de systèmes.

Le paragraphe 9 présente une étude assez détaillée des actions hamiltoniennes d'un groupe de Lie G sur son fibré cotangent T^*G. Je considère d'abord les prolongements naturels au fibré cotangent des actions de G sur lui-même par translations à droite et à gauche, T^*G étant muni de sa forme symplectique canonique. Ce sont deux actions hamiltoniennes libres dont les orbites sont symplectiquement orthogonales, chaque orbite de l'une de ces actions étant l'image réciproque d'un point du dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G par le moment de l'autre action. Lorsque le groupe G est connexe et que l'une de ces actions est restreinte à un sous-groupe connexe G_1 de G, l'ensemble des orbites de cette action s'identifie à $G/G_1 \times \mathcal{G}$ et l'orthogonal symplectique du fibré tangent aux orbites de cette action détermine un feuilletage simple de T^*G dont l'ensemble des feuilles s'identifie au dual $\mathcal{G}_1^*$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_1$de G_1. De plus, moyennant une hypothèse additionnelle souvent satisfaite, l'autre action de G sur T^*G se prolonge en une action hamiltonienne du produit semi-direct de G et d'un espace vectoriel de dimension finie dont les orbites sont, en chaque point, tangentes à l'orthogonal symplectique de l'espace tangent à l'orbite de l'action de G_1. La fin du paragraphe 9 étend une partie de ces résultats au cas où la forme symplectique dont est muni T^*G est la somme de sa forme symplectique canonique et de l'image réciproque d'une forme fermée sur G associée à un cocycle symplectique de ce groupe.

La célèbre construction d'une variété symplectique réduite appelée *réduction de Marsden-Weinstein* [139] est présentée dans le paragraphe 10. Je reviens enfin, paragraphe 11, à l'équation d'Euler-Poincaré dans le formalisme hamiltonien. Lorsque cette équation se simplifie, certains auteurs appellent son emploi *réduction lagrangienne.* Je montre dans ce paragraphe que lorsque le lagrangien du système considéré est hyper-régulier et que l'espace de configuration du système lagrangien considéré est un espace homogène principal d'un groupe de Lie, cette réduction lagrangienne conduit au même système hamiltonien réduit que la réduction de Marsden-Weinstein.

Dans le présent livre, de niveau relativement élémentaire, bien des aspects, pourtant intéressants et importants, de la géométrie symplectique et de la géométrie de Poisson, ont été laissés de côté. Je n'ai pas parlé des systèmes hamiltoniens complètement intégrables, des variables actions-angles, du théorème d'Arnold-Liouville, des théorèmes KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) et de Nekhoroshev sur les systèmes proches des systèmes complètement intégrables, de la quantification géométrique, des systèmes bihamiltoniens, ni des développements récents concernant les groupes de Lie-Poisson, les groupoïdes symplectiques, les groupoïdes de Poisson et les algébroïdes qui leur sont associés. J'ai conscience aussi de n'avoir pas suffisamment développé les applications de la géométrie symplectique et de la géométrie de Poisson en Mécanique et en Physique. Il existe heureusement d'autres ouvrages, de divers niveaux, que les lecteurs souhaitant connaître d'autres points de vue sur les géométries symplectique et de Poisson, ou combler les lacunes qui existent dans le présent livre, pourront consulter [174, 8, 2, 45, 186, 15, 27, 31, 13, 16, 155, 96]. Je recommande particulièrement le livre de V. Arnold [8], très riche tant pour les développements mathématiques que pour les applications à la Mécanique. Pour ce qui concerne la géométrie de Poisson, les lecteurs pourront consulter le livre d'I. Vaisman [187], le récent et très complet livre de C. Laurent-Gengoux, A. Pichereau et P. Vanhaecke [116] et, pour les applications de la géométrie symplectique en Physique, les livres de V. Guillemin et S. Sternberg [77, 79]. Ils trouveront une excellente présentation des systèmes intégrables classiques dans l'ouvrage de R. Cushman et L. Bates [46]. L'action du groupe de Galilée et du groupe de Bargmann sur l'espace des mouvements d'un système mécanique, ainsi que des applications à la thermodynamique, sont présentées dans le livre récent de G. de Saxcé et C. Vallée [167].

La *topologie symplectique* est un développement récent de la géométrie symplectique, donnant lieu actuellement à des recherches très actives, dans lequel on utilise des méthodes de géométrie symplectique, ou de géométrie de contact, pour établir des résultats de nature topologique, notamment pour définir des invariants. On considère comme article fondateur de ce domaine, que je n'ai pu aborder dans ce livre, le très important travail de M. Gromov *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, paru en 1985 [75]. Les lecteurs intéressés par ce sujet pourront consulter le livre de cours édité par M. Audin et J. Lafontaine [17], les livres de H. Hofer et E. Zehnder [89], M. Audin et M. Damian [18], D. McDuff et D. Salamon [143], L. Polterovich et D. Rosen [164], et le cours de Vincent Humilière [95].

Avant et pendant la rédaction de ce livre, j'ai été encouragé par les marques d'intérêt et les suggestions de nombreux collègues : Izu Vaisman, auteur du remarquable livre sur la géométrie de Poisson [187] ; Uriel Frisch, un des très rares académiciens, membres de la section *Sciences Mécaniques et Informatiques* de l'Académie des Sciences, qui s'intéressent à la géométrie symplectique et aux méthodes géométriques en Mécanique ; Pierre Cartier, Yvette Kosmann-Schwarzbach, Camille Laurent-Gengoux, que je rencontrais au séminaire *Géométrie et quantification* ; Alain Albouy, Jean-Baptiste Cailleau, Marc Chaperon, Alain Chenciner, Jacques Féjoz, Maylis Irigoyen, Laurent Lazzarini, Jean-Pierre Marco, Laurent Niederman, organisateurs et participants réguliers du séminaire *Géométrie hamiltonienne* dont j'ai été, il y a bien longtemps, avec mes regrettés collègues Guy Pichon et Pham Mau Quan, un des fondateurs ; Jean-Pierre Françoise, Richard Kerner, Mirella et Paul Krée, Jean Vaillant, avec qui j'ai longtemps enseigné et échangé des idées ; Philippe Pilibossian, avec qui je me suis occupé d'une collection de livres d'enseignement, Sophie Chemla, que je voyais chaque jour lorsque nous partagions le même bureau ; Edmond Bonan, dont l'indéfectible amitié m'a soutenu à un moment critique ; Dominique Flament, animateur du très remarquable séminaire *Histoires de Géométries*, auquel j'ai eu le plaisir de faire plusieurs exposés, qui m'a invité à l'école d'été organisée à Brasilia en 2008 ; Daniel Bennequin et Frédéric Hélein, qui m'ont donné l'occasion de parler au séminaire *Géométrie et Physique mathématique* ; Jacky Cresson, Géry de Saxcé, Claude Vallée trop tôt disparu, victime du lobby de l'amiante et de l'inertie complice des pouvoirs publics, que je rencontrais au *colloque international de théories variationnelles*, créé par Jean-Marie Souriau ; Tadashi Tokieda et Juan-Pablo Ortega, qui venaient me parler de leurs très intéressants travaux chaque fois qu'ils étaient de passage dans la région parisienne. Je remercie chaleureusement les collègues qui m'ont invité, me donnant ainsi l'occasion de contacts intellectuellement stimulants, notamment Arturo Alves, Frédéric Barbaresco, Sergio Benenti, Maciej Blaszak, Claude Paul Bruter, Frans Cantrijn, Michel Cahen, Ida Gasperini Cattaneo, Vittorio Cantoni, José F. Cariñena, Richard Cushman, Oliver Fabert, António Ribeiro Gomes, Katarzyna Grabowska, Janusz Grabowski, Manuel de León, Franco Magri, Amar Makhlouf, Giuseppe Marmo, Juan Carlos

Marrero, Ivaïlo Mladenov, Joana Nunes da Costa, Edith Padrón, Enrico Pagani, Andriy Panasyuk, Marco Pedroni, José Antonio Pereira da Silva, Fani Petalidou, Spyros Pnevmatikos, Willy Sarlet, Mohamed Selmi, Jędrzej Śniatycki, Wlodzimierz Tulczyjew, Pawel Urbański, Alan Weinstein, Robert Wolak, Ping Xu, Nadhem Zaalani, Fabian Ziltener.

C'est Jean-Jacques Brahim qui m'a décidé à entreprendre la rédaction d'un livre en français sur la géométrie symplectique, et qui m'a conseillé d'en confier l'édition à Calvage et Mounet. Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie Rached Mneimné, qui m'a fait l'honneur d'accepter mon projet de livre dans la collection qu'il dirige, n'a cessé de m'encourager et a suivi avec patience la lente progression de mon travail.

Je remercie aussi Jean-Pierre Marco pour ses nombreuses remarques et suggestions judicieuses qui m'ont permis d'améliorer ce livre.

Je remercie tout particulièrement mon ancienne étudiante Fani Petalidou, aujourd'hui Professeure à l'université Aristote de Thessalonique, qui a relu et corrigé, avec une minutie extrême, plusieurs versions successives de ce livre. Outre l'aide matérielle considérable que cela représente, ce qu'elle fit pour moi fut un encouragement moral inappréciable, sans lequel je n'aurais probablement pas terminé ce livre.

Je remercie enfin mon épouse, qui a supporté, avec beaucoup de patience, mon manque de disponibilité lorsque j'étais absorbé par mon travail.

Meudon, le 6 janvier 2018

Charles-Michel Marle

Table des matières

Annexe B. Rappels de géométrie différentielle

Bibliographie

Notations

Avant-propos

Ce livre s'adresse aux personnes qui souhaitent s'initier à la géométrie symplectique, aux systèmes lagrangiens et hamiltoniens et aux méthodes géométriques employées en Mécanique et en Physique mathématique. Il pourra intéresser les étudiants des universités dans les disciplines Mathématiques, Mécanique ou Physique mathématique, en fin de licence, en master ou en début de doctorat, ainsi que les élèves des grandes écoles scientifiques, si toutefois ils se sentent plus attirés par les sciences que par la finance. Il est issu d'un enseignement, de niveau alors appelé « troisième cycle », que j'ai donné, pendant de nombreuses années, à l'Université Pierre-et-Marie Curie, ainsi que de conférences que j'ai présentées dans diverses universités et centres de recherche, en France et dans d'autres pays. Il reprend une partie du contenu du livre [120] que ma regrettée collègue et amie Paulette Libermann et moi avions publié en 1987, en l'enrichissant de certains résultats additionnels concernant principalement la géométrie de Poisson, le calcul des variations et ses relations avec la géométrie symplectique.

Les connaissances préalables nécessaires pour aborder avec profit la lecture de cet ouvrage sont très réduites : les quelques notions de topologie et de calcul différentiel normalement acquises au niveau licence suffisent pour commencer. À partir du deuxième chapitre, il est fait appel à quelques notions d'algèbre, et surtout de géométrie différentielle, qui pourraient peut-être manquer à certains lecteurs. Ces notions sont soigneusement résumées dans deux annexes. Chaque fois qu'elles sont employées pour la première fois, un renvoi précis vers les paragraphes de ces annexes où elles sont rappelées permettra aux lecteurs de comprendre de quelle notion il est fait usage et de poursuivre leur lecture. Je conseille à ces lecteurs de mener l'étude du présent livre en parallèle avec celle des ouvrages, indiqués dans la bibliographie, grâce auxquels ils pourront compléter leurs connaissances.

J'ai rédigé ce livre en supposant que mes lecteurs l'étudieront de manière linéaire, en commençant par le premier chapitre. C'est pourquoi chaque nouveau concept introduit, chaque démonstration nouvelle, n'utilisent que des concepts et des résultats déjà présentés dans les paragraphes ou chapitres précédents. Mais je sais bien que certains lecteurs, déjà familiarisés avec certaines notions présentées dans les premiers chapitres, pourront souhaiter consulter une définition, ou étudier une démonstration, sans avoir à lire tout ce qui précède. C'est en pensant à eux que j'ai pris soin, au risque d'alourdir un peu mes énoncés, d'indiquer soigneusement dans quels paragraphes les concepts précédemment introduits ont été présentés, et de rappeler la signification des notations employées.

Chaque chapitre propose des exercices, pour la plupart assez faciles. J'encourage les lecteurs qui souhaitent progresser à faire un effort raisonnable pour les résoudre avant de lire le paragraphe où se trouvent leurs solutions.

Chaque fois qu'un nom de personne est associé à un concept mathématique, par exemple une définition ou un théorème, j'ai pris soin de donner quelques indications sur cette personne : sa nationalité, l'époque à laquelle il ou elle a vécu, et parfois, dans une note de bas de page, quelques informations additionnelles qui m'ont semblé mériter d'être connues. Cela m'a paru utile pour bien montrer que les mathématiques, en constante évolution, progressent grâce aux efforts humains. Attention cependant : le grand mathématicien russe Vladimir Arnold aimait citer le théorème : *lorsqu'un théorème ou un objet mathématique porte le nom d'une personne, cette personne n'est pas celle qui a prouvé ce théorème ou créé cet objet*. Il ajoutait avec humour : *bien sûr, mon théorème s'applique à lui-même !*

Meudon, le 6 janvier 2018

Charles-Michel Marle