

David Chiron

Chemins d'analyse

Tome 1 – Espace de Schwartz, distributions
tempérées et transformation de Fourier



Calvage & Mounet

DAVID CHIRON est maître de conférences à l'Université Côte d'Azur, à Nice.
Ses domaines de recherche de prédilection portent sur l'analyse des Équations
aux Dérivées Partielles, et tout particulièrement le modèle de Schrödinger non
linéaire.

David.CHIRON@univ-cotedazur.fr

Mathematics Subject Classification (2020) – Primary :

- 35A08 Fundamental solutions to PDEs
- 35C15 Integral representations of solutions to PDEs
- 35D30 Weak solutions to PDEs
- 42XX Harmonic analysis on Euclidean spaces
- 42A38 Fourier and Fourier-Stieltjes transforms and other transforms of
Fourier type
- 46FXX Distributions, generalized functions, distribution spaces
- 46F10 Operations with distributions and generalized functions

∞ Imprimé sur papier permanent

© Calvage & Mounet, Paris, 2021

ISBN 978-2-91-635288-6



9 782916 352886

Cesser d'apprendre, c'est commencer à vieillir.

SOCRATE

Table des matières

I. Espace de Schwartz et transformation de Fourier

1. Espace de Schwartz	1
1.1. Définition et structure	1
1.2. Transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz	8
2. Exercices sur l'espace de Schwartz	20
2.1. Convolution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	20
2.2. Primitivation dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	23
2.3. Intégration par rapport à une variable	24
2.4. Distance dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ▲	25
2.5. Lemme de division de Hadamard dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	31
2.6. Formule de Taylor-Young dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	35
2.7. Une preuve du lemme de Riemann-Lebesgue dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	37
2.8. Convolution de fonctions de Laplace-Gauss	38
2.9. Une preuve de la formule d'inversion dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	42
2.10. Résolution d'équations dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	43
2.11. Transformée de Fourier de $1/\text{ch}$	47
2.12. Théorème d'incertitude de Heisenberg-Kennard	50
2.13. Problème des moments dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	54
2.14. La fonction Γ d'Euler sur des droites verticales	55
2.15. Polynômes de Laplace-Tchebychev-Hermite et fonctions « de Hermite »	57
2.16. Théorème de Hardy sur la fonction de Weierstrass	66

II. Distributions tempérées et transformation de Fourier

1. Distributions tempérées	71
1.1. Définition, exemples	71
1.2. Convergence de distributions tempérées	78
1.3. Extension d'opérations aux distributions tempérées	80
1.4. Dérivation, formule des sauts	83
1.5. À propos du support d'une distribution tempérée	100
1.6. Convolution et solutions fondamentales	103
2. Transformation de Fourier	106
2.1. Transformée de Fourier des distributions tempérées	106
2.2. Théorème de dérivation et d'intégration sous le crochet et conséquences ▲	110
2.3. Transformée de Fourier des distributions tempérées périodiques ▲	123
3. Exercices sur les distributions tempérées	133
3.1. Exemples de distributions tempérées	133
3.2. Encore des valeurs principales et des parties finies	137
3.3. Limites dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (I)	140
3.4. Formule de Taylor-Young dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$	146
3.5. Approximation par convolution des fonctions L^∞	147
3.6. Limites dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (II) ▲	150
3.7. Autour de $1/(x + i0)$	154
3.8. Développement d'une distribution en série de fonctions « de Hermite »	159
3.9. Sur la convergence simple dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ▲	160
3.10. Une équation différentielle dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (I)	162
3.11. Une équation différentielle dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (II)	163
3.12. Calculs de primitives dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	165
3.13. Faire attention dans la formule des sauts	167
3.14. Dérivation d'une intégrale indéfinie	168
3.15. Distributions positives, fonctions croissantes et fonctions convexes	171
3.16. Une mise en œuvre de la formule des sauts	175
3.17. Quelques calculs de sommes de séries trigonométriques	178
3.18. Dérivées partielles dans \mathbb{R}^2	183
3.19. Condition de Rankine-Hugoniot ▲	187
3.20. Questions de division	193
4. Exercices sur les solutions fondamentales et les problèmes de Cauchy	197
4.1. Solutions fondamentales en dimension 1	197
4.2. Résolution d'équations elliptiques	198
4.3. Solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann	201

4.4. Solutions fondamentales du Laplacien	203
4.5. Équation de Poisson dans l'espace et convolution	212
4.6. Équation de Poisson dans le plan et convolution ▲	219
4.7. Potentiel vecteur, potentiel scalaire et décomposition de Stokes-von Helmholtz	227
4.8. Solution fondamentale de l'opérateur de von Helmholtz dans \mathbb{R}^3	230
4.9. Solution fondamentale de l'opérateur de von Helmholtz dans \mathbb{R}^2	233
4.10. Solution fondamentale de l'opérateur de transport en di- mension 1	242
4.11. Problème de Cauchy pour l'équation de transport en dimen- sion 1	243
4.12. Solution fondamentale de l'opérateur des ondes en dimen- sion 1	247
4.13. Problème de Cauchy pour l'équation des ondes en dimen- sion 1	249
4.14. Solution fondamentale de l'opérateur de la chaleur	256
4.15. Problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur	258
4.16. Solution fondamentale de l'opérateur de Schrödinger ▲	271
4.17. Problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger ▲	279
4.18. Solution fondamentale de l'opérateur des ondes en dimen- sions 3 et 2	289
4.19. Problème de Cauchy pour l'équation des ondes en dimen- sions 3 et 2 ▲	299
5. Exercices sur les transformées de Fourier dans \mathcal{S}'	313
5.1. Transformation de Fourier, primitivation et division par x	313
5.2. Transformation de Fourier et polynômes	317
5.3. Transformation de Fourier et fractions rationnelles ▲	319
5.4. Calcul des transformées de Fourier de $\text{Vp}(1/x)$, $\mathcal{R}[\text{sgn}]$, $\mathcal{R}[x]$ et $\text{Pf}(1/x^2)$	323
5.5. Transformées de Fourier de $\mathcal{R}[\ln x]$ et $\text{Pf}(1/ x)$	324
5.6. Transformée de Fourier de $\mathcal{R}[1/z]$	327
5.7. Calculs de transformées de Fourier dans \mathcal{S}' par passage à la limite	330
5.8. Transformées de Fourier de $\text{Vp}(1/x)$ et $\mathcal{R}[\text{sgn}]$ par passage à la limite	334
5.9. Transformée de Fourier de $\mathcal{R}[x ^{-1/2}]$	335
5.10. Calculs de transformées de Fourier de fonctions trigonomé- triques hyperboliques	339
5.11. Transformées de Fourier à plusieurs variables	346
5.12. Transformée de Fourier de $e^{-\mu x }/ x $ en dimension 2	349

5.13. Transformée de Fourier de la mesure sur la sphère	351
5.14. Calculs de transformées de Fourier vues comme sommes de fonctions de Laplace-Gauss ▲	352
5.15. Équations de convolution	362
5.16. Le problème de la poutre	366
5.17. Appliquer $\mathcal{F}_{\mathcal{S}'}$ à une égalité	369
5.18. Distributions tempérées harmoniques	372
5.19. Valeur principale et transformation de Hilbert	374
5.20. Convergence de la série de Fourier d'une fonction de $L^1_{2\pi}$.	377
5.21. Toujours la formule sommatoire de Cauchy-Poisson	379
5.22. Encore la formule sommatoire de Cauchy-Poisson	383
5.23. Développements en série de Fourier de $Vp(1/\sin x)$ et asso- ciés ▲	390
5.24. Passer des séries de Fourier aux transformées de Fourier . .	398
5.25. Théorème d'échantillonnage : le cas L^1	401
5.26. Théorème d'échantillonnage : le cas \mathcal{S}' ▲	405
5.27. Caractérisation des champs gradients de distributions ▲ .	414
5.28. Un théorème de Paley-Wiener	417
5.29. Théorème de Paley-Wiener étendu à \mathcal{S}' par Schwartz ▲ .	423
5.30. Théorème de Paley-Wiener sur la causalité	427
5.31. Théorème de Paley-Wiener sur la causalité étendu à \mathcal{S}' ▲	432

Bibliographie	447
Index	455

Avant-propos

Ceci est le premier tome d'une série d'exercices d'Analyse, accompagnés de points de cours. Les publics visés sont les étudiants et étudiantes de Master 1 et celles et ceux préparant l'agrégation de mathématiques, qui pourront y trouver des idées de développements. Ce livre cherche à proposer des exercices de synthèse ou croisant plusieurs notions, mais aussi à approfondir des notions au niveau de l'agrégation de Mathématiques. Il ne se veut absolument pas un livre autocontenu balayant l'intégralité du programme de Mathématiques de l'agrégation. C'est en fait très intentionnellement que, le long des différents volumes, les thèmes sont abordés sans ordre *a priori* : l'objectif est de pouvoir picorer dans chaque thème indépendamment des autres, et que cela soit l'occasion de faire des liens ou des ponts entre les notions.

Les exercices sont relativement détaillés, afin de permettre une progression naturelle par soi-même. Un corrigé détaillé est systématiquement proposé. Il ne faut bien sûr pas penser qu'il suffise d'apprendre la solution d'un exercice pour maîtriser une notion : je crois sincèrement que rien ne remplace le temps consacré à se confronter et à rechercher les exercices pour comprendre une notion, et les corrigés ne sont là que pour proposer des rédactions. Il me semble enfin naturel de voir les notions en plusieurs fois ; c'est pourquoi un  signale une question ou un exercice un peu plus ardu, que l'on peut réserver à une seconde lecture.

Pour les aspects historiques, le lecteur ou la lectrice pourra consulter [20], [39], [6] ou [37], par exemple, ou encore le site MacTutor History of Mathematics archive [65]. Seules sont données, en fin de volume, quelques dates de mathématiciens ainsi que quelques références aux articles ou livres originaux. On constatera que, pour la période considérée, on n'envisage pas, à quelques très rares exceptions près, que les femmes fassent des mathématiques. Sur le premier chapitre, de nombreuses références sont issues de la lecture de [34].

Je voudrais dire un mot sur le choix du titre. Ce livre n'a d'autre ambition que de proposer des chemins, des pistes d'exploration, et chacun, chacune est, bien sûr, libre d'emprunter la voie qu'il ou elle préfère. Pour faire écho à

la phrase mise en exergue, il est certain que j'ai énormément appris lors de la rédaction de ce livre, et que cela ne m'a pas rajeuni. J'ai simplement souhaité que le temps que j'ai moi-même passé à ces recherches puissent bénéficier à d'autres.

Je voudrais remercier chaudement Mr. Rached Mneimné pour son soutien, sa confiance et son intérêt constants dans ce travail.

Tome 1 - Prérequis. Ce premier tome propose le thème des distributions tempérées, cours que j'ai enseigné pour la préparation à l'agrégation de mathématiques à Nice. Le point de vue adopté pour le thème des distributions tempérées est de ne pas présenter les distributions mais de se placer d'emblée dans le cadre des distributions tempérées afin de privilégier l'aspect calcul (solutions fondamentales, transformation de Fourier), ce qui correspond aux exigences du programme actuel de l'agrégation de Mathématiques. On trouvera dans [8] (voir également [21]) tous les outils d'intégration nécessaires, y compris ce qui concerne les espaces L^p , la convolution et la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$. Rappelons que pour $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $1 \leq p < \infty$, on note

$$L^p(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \text{ mesurable telle que } \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

et

$$L^\infty(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \text{ mesurable} \right. \\ \left. \text{telle que } \exists C \geq 0 \text{ mesurable telle que } |f| \leq C \mu\text{-p.p.} \right\}.$$

Ils sont munis de, respectivement,

$$\|f\|_{L^p} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

et

$$\|f\|_{L^\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ C \geq 0 \text{ tel que } |f| \leq C \mu\text{-p.p.} \}.$$

Comme d'habitude, nous identifierons deux fonctions égales presque partout et $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$, $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty})$ sont alors des espaces vectoriels normés complets (théorème de Riesz-Fischer). La lectrice ou le lecteur pourra très bien, dans une première approche, passer les démonstrations des résultats pour se confronter aux exercices. Pour approfondir la théorie des distributions, nous renvoyons à [84], [5], [97], [31], ainsi qu'à [2], dont certains exercices ont inspiré quelques-uns de ce livre, et à [63].

J'adresse un merci particulier et sincère à Claire Scheid pour m'avoir suggéré les résultats de Paley-Wiener sur la causalité et m'avoir si souvent encouragé dans ce long travail.

Il est certain que ce livre contient, malgré de très nombreuses relectures, des erreurs plus ou moins grosses ainsi que des fautes de frappe : je suis preneur de toute remarque que l'on voudra bien m'envoyer à l'adresse david.chiron@univ-cotedazur.fr. Une liste d'errata sera tenue à jour sur la page <https://math.unice.fr/~chiron/CheminsdAnalyse.html>.

D. Chiron,
Nice, février 2021.

Chapitre I

Espace de Schwartz et transformation de Fourier

On rappelle que, pour un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on note $\alpha! \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1! \cdots \alpha_d!$ la multifactorielle, $|\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^d \alpha_j$ sa longueur et $x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$, et que pour $f \in \mathcal{C}^{|\alpha|}$, on note $\partial^\alpha f = \partial_x^\alpha f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$. On rappelle la formule de Leibniz $\partial^\alpha(\phi\psi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \phi \partial^{\alpha-\beta} \psi$ valable pour ϕ et ψ de classe \mathcal{C}^∞ , où $\binom{\alpha}{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$. Enfin, $(e_j)_{1 \leq j \leq d}$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^d et $|x|$ la norme euclidienne du vecteur $x \in \mathbb{R}^d$ (le contexte évitera les confusions avec la longueur $|\alpha|$ d'un multi-indice).

1. Espace de Schwartz

1.1. Définition et structure

1.1.1. Définition. On appelle espace de Schwartz l'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^∞ telles que, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la fonction $x \mapsto (1+|x|)^r \partial^\alpha \phi(x)$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour $r \in \mathbb{N}$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on note $N_r(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|\alpha| \leq r} \|x \mapsto (1+|x|)^r \partial^\alpha \phi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$.

Les fonctions de l'espace de Schwartz sont donc des fonctions $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ qui décroissent à l'infini plus vite que $|x|^{-r}$ quel que soit $r \in \mathbb{N}$ (on dit que ϕ est à décroissance rapide), de même que toutes ses dérivées. Insistons sur le fait que les fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sont définies sur \mathbb{R}^d tout entier. On voit immédiatement que, pour $r \in \mathbb{N}$, N_r est une norme sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et que $N_r \leq N_{r+1}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

De plus, la majoration facile $|x|^j \leq (1 + |x|)^r$ pour $0 \leq j \leq r$, $x \in \mathbb{R}^d$, garantit que, pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $r \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq r$, on a l'inégalité $|x^j| \partial^\alpha \phi(x) \leq N_r(\phi)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. L. Schwartz utilisait la lettre \mathcal{S} non pas comme initiale de son nom, comme on pourrait le penser, mais parce qu'il voyait ces fonctions comme définies sur la sphère après compactification *via* la projection stéréographique.

Exemples :

- 1/ on a $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$;
- 2/ on a $x \mapsto e^{-x^2/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et plus généralement, si $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, la fonction de Laplace-Gauss non centrée $x \mapsto e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$;
- 3/ si $A \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$, alors $x \mapsto \exp(-\langle x|Ax\rangle/2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$;
- 4/ on a $1/\text{ch} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$;
- 5/ la fonction $h : \mathbb{R}^d \ni x \mapsto \frac{1}{(1+|x|^2)^{100}}$ n'appartient pas à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$;
- 6/ la fonction $g : \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-x^2} \sin(e^{x^2})$ n'appartient pas à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

En conséquence de 1/ ou de 3/, on a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \neq \{0\}$.

Démonstration. 1/ Il est clair que les fonctions ϕ de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ sont dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$: si $r \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la fonction $x \mapsto (1 + |x|)^r \partial^\alpha \phi(x)$ est bien bornée sur \mathbb{R}^d puisque continue et à support compact. On rappelle que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \neq \{0\}$, car la fonction

$$x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) \mathbf{1}_{|x|<1}$$

appartient à $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ (par composition, car la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{-1/t} \mathbf{1}_{t>0}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}) et strictement positive sur la boule $B(0, 1)$. Étant donné un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert contenant K , on peut même construire (voir, par exemple, [8]) une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ valant 1 sur un voisinage de K et nulle en dehors de Ω . Une telle fonction est souvent appelée fonction plateau.

2/ Pour voir que $g : x \mapsto e^{-x^2/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on observe que g est \mathcal{C}^∞ et que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, $g^{(\alpha)}$ est de la forme $P_\alpha g$, où $P_\alpha \in \mathbb{R}[X]$ (les P_α sont donnés par $P_0 = 1$ et la récurrence $P_{\alpha+1} = P'_\alpha - xP_\alpha$). Par prépondérance de l'exponentielle sur les polynômes à l'infini, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a, pour $y \rightarrow +\infty$, $e^{-y} = o(y^{-m})$, donc $e^{-x^2/2} = o(x^{-2m})$ pour $x \rightarrow +\infty$. La fonction $x \mapsto (1 + |x|)^r \partial^\alpha g(x)$ est donc continue sur \mathbb{R} et tend vers 0 en $\pm\infty$, donc est bien bornée sur \mathbb{R} . Le cas de la fonction de Laplace-Gauss non centrée est similaire (on peut aussi utiliser la variable $y = (x - \mu)/\sigma$).