157.0 x 234.0 mm

David Chiron

Chemins d'analyse

Tome 1 – Espace de Schwartz, distributions tempérées et transformation de Fourier

Calvage & Mounet

David Chiron est maître de conférences à l'Université Côte d'Azur, à Nice. Ses domaines de recherche de prédilection portent sur l'analyse des Équations aux Dérivées Partielles, et tout particulièrement le modèle de Schrödinger non linéaire.

David.CHIRON@univ-cotedazur.fr

Mathematics Subject Classification (2020) – Primary :

35A08	Fundamental solutions to PDEs
35C15	Integral representations of solutions to PDEs
35D30	Weak solutions to PDEs
42XX	Harmonic analysis on Euclidean spaces
42A38	Fourier and Fourier-Stieltjes transforms and other transforms of Fourier type
46FXX	Distributions, generalized functions, distribution spaces
46F10	Operations with distributions and generalized functions

ISBN 978-2-91-635288-6

9 782916 352886

♾ Imprimé sur papier permanent

Cesser d'apprendre, c'est commencer à vieillir.

Socrate

Table des matières

II. Distributions tempérées et transformation de Fourier

Avant-propos

Ceci est le premier tome d'une série d'exercices d'Analyse, accompagnés de points de cours. Les publics visés sont les étudiants et étudiantes de Master 1 et celles et ceux préparant l'agrégation de mathématiques, qui pourront y trouver des idées de développements. Ce livre cherche à proposer des exercices de synthèse ou croisant plusieurs notions, mais aussi à approfondir des notions au niveau de l'agrégation de Mathématiques. Il ne se veut absolument pas un livre autocontenu balayant l'intégralité du programme de Mathématiques de l'agrégation. C'est en fait très intentionnellement que, le long des différents volumes, les thèmes sont abordés sans ordre *a priori* : l'objectif est de pouvoir picorer dans chaque thème indépendamment des autres, et que cela soit l'occasion de faire des liens ou des ponts entre les notions.

Les exercices sont relativement détaillés, afin de permettre une progression naturelle par soi-même. Un corrigé détaillé est systématiquement proposé. Il ne faut bien sûr pas penser qu'il suffise d'apprendre la solution d'un exercice pour maîtriser une notion : je crois sincèrement que rien ne remplace le temps consacré à se confronter et à rechercher les exercices pour comprendre une notion, et les corrigés ne sont là que pour proposer des rédactions. Il me semble enfin naturel de voir les notions en plusieurs fois ; c'est pourquoi une signale une question ou un exercice un peu plus ardu, que l'on peut réserver à une seconde lecture.

Pour les aspects historiques, le lecteur ou la lectrice pourra consulter [20], [39], [6] ou [37], par exemple, ou encore le site MacTutor History of Mathematics archive [65]. Seules sont données, en fin de volume, quelques dates de mathématiciens ainsi que quelques références aux articles ou livres originaux. On constatera que, pour la période considérée, on n'envisage pas, à quelques très rares exceptions près, que les femmes fassent des mathématiques. Sur le premier chapitre, de nombreuses références sont issues de la lecture de [34].

Je voudrais dire un mot sur le choix du titre. Ce livre n'a d'autre ambition que de proposer des chemins, des pistes d'exploration, et chacun, chacune est, bien sûr, libre d'emprunter la voie qu'il ou elle préfère. Pour faire écho à la phrase mise en exergue, il est certain que j'ai énormément appris lors de la rédaction de ce livre, et que cela ne m'a pas rajeuni. J'ai simplement souhaité que le temps que j'ai moi-même passé à ces recherches puissent bénéficier à d'autres.

Je voudrais remercier chaudement Mr. Rached Mneimné pour son soutien, sa confiance et son intérêt constants dans ce travail.

Tome 1 - Prérequis. Ce premier tome propose le thème des distributions tempérées, cours que j'ai enseigné pour la préparation à l'agrégation de mathématiques à Nice. Le point de vue adopté pour le thème des distributions tempérées est de ne pas présenter les distributions mais de se placer d'emblée dans le cadre des distributions tempérées afin de privilégier l'aspect calcul (solutions fondamentales, transformation de Fourier), ce qui correspond aux exigences du programme actuel de l'agrégation de Mathématiques. On trouvera dans [8] (voir également [21]) tous les outils d'intégration nécessaires, y compris ce qui concerne les espaces L^p, la convolution et la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$. Rappelons que pour $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $1 \leqslant p < \infty$, on note

$$L^p(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \text{ mesurable telle que } \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty \Big\}$$

et

$$L^\infty(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \text{ mesurable telle que } \exists C \geqslant 0 \text{ mesurable telle que } |f| \leqslant C \ \mu\text{-p.p}\}.$$

Ils sont munis de, respectivement,

$$\|f\|_{L^p} \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p}$$

et

$$\|f\|_{L^\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{C \geqslant 0 \text{ tel que } |f| \leqslant C \ \mu\text{-p.p}\}.$$

Comme d'habitude, nous identifierons deux fonctions égales presque partout et $\big(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p}\big)$, $\big(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty}\big)$ sont alors des espaces vectoriels normés complets (théorème de Riesz-Fischer). La lectrice ou le lecteur pourra très bien, dans une première approche, passer les démonstrations des résultats pour se confronter aux exercices. Pour approfondir la théorie des distributions, nous renvoyons à [84], [5], [97], [31], ainsi qu'à [2], dont certains exercices ont inspiré quelques-uns de ce livre, et à [63].

J'adresse un merci particulier et sincère à Claire Scheid pour m'avoir suggéré les résultats de Paley-Wiener sur la causalité et m'avoir si souvent encouragé dans ce long travail.

Il est certain que ce livre contient, malgré de très nombreuses relectures, des erreurs plus ou moins grosses ainsi que des fautes de frappe : je suis preneur de toute remarque que l'on voudra bien m'envoyer à l'adresse david.chiron@univ-cotedazur.fr. Une liste d'errata sera tenue à jour sur la page `https://math.unice.fr/~chiron/CheminsdAnalyse.html`.

D. Chiron,

Nice, février 2021.

Chapitre I

Espace de Schwartz et transformation de Fourier

On rappelle que, pour un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on note $\alpha! \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1! \cdots \alpha_d!$ la multifactorielle, $|\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^d \alpha_j$ sa longueur et $x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$, et que pour $f \in \mathcal{C}^{|\alpha|}$, on note $\partial^\alpha f = \partial_x^\alpha f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$. On rappelle la formule de Leibniz $\partial^\alpha(\phi\psi) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \phi \partial^{\alpha-\beta}\psi$ valable pour ϕ et ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$, où $\binom{\alpha}{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$. Enfin, $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant d}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et $|x|$ la norme euclidienne du vecteur $x \in \mathbb{R}^d$ (le contexte évitera les confusions avec la longueur $|\alpha|$ d'un multi-indice).

1. Espace de Schwartz

1.1. Définition et structure

1.1.1. Définition. *On appelle espace de Schwartz l'ensemble $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la fonction $x \mapsto (1+|x|)^r \partial^\alpha \phi(x)$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour $r \in \mathbb{N}$ et $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on note $N_r(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|\alpha| \leqslant r} \|x \mapsto (1+|x|)^r \partial^\alpha \phi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$.*

Les fonctions de l'espace de Schwartz sont donc des fonctions $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ qui décroissent à l'infini plus vite que $|x|^{-r}$ quel que soit $r \in \mathbb{N}$ (on dit que ϕ est à décroissance rapide), de même que toutes ses dérivées. Insistons sur le fait que les fonctions de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ sont définies sur $\mathbb{R}^d$ tout entier. On voit immédiatement que, pour $r \in \mathbb{N}$, N_r est une norme sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et que $N_r \leqslant N_{r+1}$ sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

De plus, la majoration facile $|x|^j \leqslant (1+|x|)^r$ pour $0 \leqslant j \leqslant r$, $x \in \mathbb{R}^d$, garantit que, pour $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $r \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leqslant r$, on a l'inégalité $|x|^j |\partial^\alpha \phi(x)| \leqslant N_r(\phi)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. L. Schwartz utilisait la lettre $\mathscr{S}$ non pas comme initiale de son nom, comme on pourrait le penser, mais parce qu'il voyait ces fonctions comme définies sur la sphère après compactification *via* la projection stéréographique.

Exemples :

1/ on a $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$;

2/ on a $x \mapsto \mathsf{e}^{-x^2/2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, et plus généralement, si $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, la fonction de Laplace-Gauss non centrée $x \mapsto \mathsf{e}^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$ appartient à $\mathscr{S}(\mathbb{R})$;

3/ si $A \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$, alors $x \mapsto \exp(-\langle x|Ax\rangle/2) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$;

4/ on a $1/\operatorname{ch} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$;

5/ la fonction $h : \mathbb{R}^d \ni x \mapsto \frac{1}{(1+|x|^2)^{100}}$ n'appartient pas à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$;

6/ la fonction $g : \mathbb{R} \ni x \mapsto \mathsf{e}^{-x^2} \sin(\mathsf{e}^{x^2})$ n'appartient pas à $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

En conséquence de 1/ ou de 3/, on a $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \neq \{0\}$.

Démonstration. 1/ Il est clair que les fonctions ϕ de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ sont dans l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$: si $r \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la fonction $x \mapsto (1+|x|)^r \partial^\alpha \phi(x)$ est bien bornée sur $\mathbb{R}^d$ puisque continue et à support compact. On rappelle que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \neq \{0\}$, car la fonction

$$x \mapsto \exp\Big(-\frac{1}{1-|x|^2}\Big)\mathbf{1}_{|x|<1}$$

appartient à $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ (par composition, car la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathsf{e}^{-1/t}\mathbf{1}_{t>0}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) et strictement positive sur la boule $B(0,1)$. Étant donné un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert contenant K, on peut même construire (voir, par exemple, [8]) une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ valant 1 sur un voisinage de K et nulle en dehors de Ω. Une telle fonction est souvent appelée fonction plateau.

2/ Pour voir que $g : x \mapsto \mathsf{e}^{-x^2/2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on observe que g est $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, $g^{(\alpha)}$ est de la forme $P_\alpha g$, où $P_\alpha \in \mathbb{R}[X]$ (les P_α sont donnés par $P_0 = 1$ et la récurrence $P_{\alpha+1} = P'_\alpha - xP_\alpha$). Par prépondérance de l'exponentielle sur les polynômes à l'infini, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a, pour $y \to +\infty$, $\mathsf{e}^{-y} = o(y^{-m})$, donc $\mathsf{e}^{-x^2/2} = o(x^{-2m})$ pour $x \to +\infty$. La fonction $x \mapsto (1+|x|)^r \partial^\alpha g(x)$ est donc continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 en $\pm\infty$, donc est bien bornée sur $\mathbb{R}$. Le cas de la fonction de Laplace-Gauss non centrée est similaire $\big($on peut aussi utiliser la variable $y = (x-\mu)/\sigma\big)$.