MATHÉMATIQUES EN DEVENIR

Mathématiques en devenir

101. — Jacques Faraut. *Analyse sur les groupes de Lie – Une introduction.* Nouvelle édition revue et augmentée

102. — Patrice Tauvel. *Corps commutatifs et théorie de Galois.* Troisième édition revue et bonifiée

104. — Clément de Seguins Pazzis. *Invitation aux formes quadratiques*

105. — Bruno Ingrao. *Coniques projectives, affines et métriques*

107. — Henri Lombardi & Claude Quitté. *Algèbre commutative. Méthodes constructives.* Nouvelle édition revue et augmentée

109. — Grégory Berhuy. *Modules : théorie, pratique... et un peu d'arithmétique.* Nouvelle édition

111. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome premier*

112. — Gema-Maria Díaz-Toca, Henri Lombardi & Claude Quitté. *Modules sur les anneaux commutatifs*

113. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome second* – encores

114. — Alain Debreil. *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes*

115. — François Rouvière. *Initiation à la géométrie de Riemann*

119. — Alain Debreil, Jean-Denis Eiden, Rached Mneimné et Tuong-Huy NGuyen. *Formes quadratiques et géométrie*

120. — Christian Leruste. *Topologie algébrique – Une introduction, et au-delà*

121. — Grégory Berhuy. *Algèbre : le grand combat.* Nouvelle édition

122. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome second*

124. — Charles-Michel Marle. *Géométrie symplectique et géométrie de Poisson*

125. — Pascal Boyer. *Petit compagnon des nombres et de leurs applications*

129. — Gentiana Danila, Jean-Denis Eiden et Rached Mneimné. *Algèbre éclectique*

Gentiana Danila, Jean-Denis Eiden
Rached Mneimné

Algèbre éclectique

Un bouquet de thèmes et d'exercices pour le M1

Calvage & Mounet

GENŢIANA DĂNILĂ est maîtresse de conférences à l'université de Paris (site Sophie Germain).

JEAN-DENIS EIDEN est professeur honoraire de chaire supérieure au lycée Fabert à Metz.

RACHED MNEIMNÉ est maître de conférences honoraire à l'université de Paris (site Sophie Germain).

Mathematics Subject Classification (2000) :

06-XX Order, lattices, ordered algebraic structures
11-XX Number theory
12-XX Field theory and polynomials
13-XX Commutative algebra
15-XX Linear and multilinear algebra ; matrix theory
16-XX Associative rings and algebras (for the commutative case)
20-XX Group theory and generalizations
51-XX Geometry

ISBN 978-2-91-635290-9

9 782916 352909

∞ Imprimé sur papier permanent

© Calvage & Mounet, Paris, 2021

Nous nous rendons compte que ce que nous accomplissons n'est qu'une goutte dans l'océan. Mais si cette goutte n'existait pas dans l'océan, elle manquerait.

Mère Teresa

Table des matières

Avant-propos

X. Corps finis

XII. La correspondance de Galois

« On me rendra cette justice, que je n'ai rien négligé
pour assurer l'insuccès de mes livres. »
Léon Bloy

« Век живи, век учись. »
(*Si tu vis un siècle, étudie un siècle.)*
Proverbe russe

Préface et/ou propos liminaires

1. Préface et/ou propos liminaires

Le présent livre est, comme son titre l'indique, un bouquet de thèmes et d'exercices destiné aux étudiants de quatrième année de faculté en algèbre générale. Le mot bouquet fait penser bien sûr à un assortiment de couleurs et de senteurs que l'on offre à ceux et celles que l'on aime ou que l'on apprécie ; mais, un bouquet procède aussi d'un choix et de ressources dont on dispose ou dont on manque. Des fleurs qui auraient été les bienvenues sont absentes, une églantine et trois iris auraient magnifié l'éclat et se dérobent pourtant à l'appel ; le parfum de quelques jacinthes bleues et la splendeur du callicarpa consolent cependant par leur présence.

2. Pourquoi ce livre ?

Beaucoup plus modestement, ce livre nous l'avons écrit, car nous aurions aimé avoir un tel recueil quand nous étions encore étudiants, et en bénéficier quand nous préparions plus tard, à l'intention de nos élèves, les séances de TD. C'est un bouquet auquel manquent non seulement des idées importantes, parfois même des chapitres, mais qui rendra malgré tout service, et qui, nous l'espérons, plaira à celles et ceux qui seront assez généreux pour nous pardonner ses imperfections et ses carences. Il lui faut certainement un frère ou une sœur ! Mais, nous n'oserons jamais annoncer une suite à ce modeste ouvrage, car les promesses en ces choses sont souvent bien plus difficiles à honorer que le remboursement d'une dette ou l'acquittement d'une redevance.

3. Un lieu propice à l'imagination

L'algèbre du M1 est un lieu où l'imagination des enseignants peut s'exercer à l'infini, d'autant plus que le territoire est très loin d'avoir été pleinement exploré en terme d'exercices originaux et/ou amusants. Des thèmes nouveaux nous surprennent déjà en propédeutique tout en restant dans les limites raisonnables du programme ; il est donc tout à fait normal et même bénéfique qu'il en soit ainsi aussi pour le M1. Un livre sérieux, et qui de surcroît se voudrait utile, ne peut non plus se contenter d'exercices hardis et piquants, et passer sous silence les grands classiques, qui ont été rodés et re-rodés, et dont l'intérêt pour l'apprentissage des notions délicates du programme est immense. On trouvera donc dans ce recueil des exercices des deux genres, exercices que nous avons cherché systématiquement à accompagner de commentaires distinctifs et opportuns. Quelques raisonnements basiques ont été omis, car ils sont devenus à la longue ennuyeux pour nous. Nous nous en excusons auprès des lecteurs débutants, qui trouveraient certaines rédactions un peu obscures ou un peu hâtives, et cela d'autant plus que nous nous souvenons encore que quelques-uns de ces raisonnements que nous souffrons de répéter aujourd'hui nous semblaient autrefois de présence appréciable. À ces lecteurs, nous demandons patience et leur répétons ce que tous les auteurs de recueils d'exercices répètent à leurs lecteurs, à savoir que l'on apprécie mieux un problème et l'on profite davantage d'un raisonnement si l'on a pris le soin d'y méditer par soi-même auparavant, plutôt que de s'élancer vite vers le corrigé qui en est proposé. Une démarche raisonnable serait, à cet égard, de jeter un coup d'œil furtif de temps en temps sur la solution, afin d'y trouver une indication ou une idée qui auraient échappé à notre propre attention et qui nous mettraient dès lors sur la bonne voie.

4. Rédiger une preuve ou une solution : un art en soi

Nous ne saurions insister assez que résoudre un exercice n'est pas la fin en soi, car il s'agit aussi d'en rédiger la solution. Pour avoir souffert beaucoup de fois dans cette tâche, plus ardue que l'on ne le croit a priori, nous conjurons le lecteur de ne pas prendre à la légère la recommandation de faire l'effort nécessaire de rédiger soigneusement une solution, de la comparer à la nôtre, quand nous avons pris pour notre part le soin de lui en fournir une. Cet effort révélera souvent une petite lacune dans le raisonnement ou une erreur dans la preuve. Pénible au début, il deviendra avec le temps et avec un peu de discipline plus facile, voire peut-être pour certains plaisant.

Il est bien connu que plus on monte en niveau plus l'emprise que l'on a des choses est mieux assise et confortée. Un professeur du secondaire qui passerait sa vie à résoudre des équations du second degré doit aussi savoir résoudre l'équation $2x^2 + 5x - 1 = 0$ dans $\mathbb{F}_7$; il saisira mieux le rôle du coefficient dominant et celui du discriminant de l'équation. On ne peut cependant dès le début se placer très haut ; c'est dans cette élévation progressive que l'on apprend, et ce n'est point davantage que l'on profite de la montagne en se faisant héliporter sur l'un de ses sommets. La sédentarité est nocive en mathématiques comme elle l'est pour la santé, et vouloir se hâter en mangeant et souffrir ensuite d'indigestion n'est pas moins dangereux que vouloir embrasser trop vite un savoir mathématique. Ce désir d'aller vite et de vouloir assimiler énormément de choses est un trait heureux de la jeunesse, qu'il ne faut surtout pas réprimander, mais révélera avec le temps une assimilation moins pénétrante que l'on ne croyait. Le cerveau de l'homme recèle encore en ce domaine bien des mystères.

5. Le travail commence donc après la conquête

Les jeunes aiment collectionner les exercices autant que les croquettes ou les conquêtes. Or, un exercice est parfois un havre, voire une oasis où il fait bon d'y rester, où il faut prendre le temps d'en apprécier les contours et en humer les fragrances délicates. Que de longs après-midis avons-nous consacrés, en travaillant ce livre, à l'exploration d'un exercice, à en imaginer des prolongements, pour revenir ensuite vers ses arcanes encore irrévélés ; ce travail si gratifiant est évidemment plus heureux à deux ou trois que dans la solitude ; aussi est-il recommandé de partager à plusieurs l'examen de l'un ou l'autre des thèmes de ce livre, car la confrontation des idées et l'inspection des modes de raisonnement d'autrui sont particulièrement enrichissantes. Mais comme dit si justement le proverbe, « Ne va pas vers l'autre quand tu es seule, mais quand tu es prête ! »

6. Mouvement du corps et mouvement de l'esprit

Et puis, comme on est dans les recommandations, *apprenons que l'on apprend beaucoup en allant apprendre aux autres.* Car, c'est souvent en enseignant et en expliquant à ses camarades, que l'on acquiert cette perspicacité mathématique si chère à chacun de nous, et son autre manifestation qu'est l'éloquence de la pensée [1]. Le lecteur doit être vite rassuré que nous ne l'entretiendrons plus de ces choses dans la suite du livre, mais que ces questions doivent néanmoins lui rester à l'esprit quand il affrontera un exercice ou qu'il lira une démonstration. Il est rare, et c'est à recommander, que devant une toile ou face à un film on passe au travers de l'objet, que notre éducation et nos habitudes nous apprennent à fixer ou contempler, pour réfléchir sur le mouvement du corps, de l'esprit et des yeux que sa création a dû exiger ou susciter, car il est une sculpture dans le temps, plus complexe, et une autre dans le monde des idées, plus confuse encore pour nos esprits d'aujourd'hui, que la simple sculpture qui trône sur un promontoire devant le regard des passants. Ces sculptures idéales doivent aussi concerner les lecteurs de ce modeste livre, ne serait-ce que pour en saisir les quelques rares perles et les probables impérities de ses auteurs.

7. Exigence morale

Le lecteur aura compris que l'on ne peut jouer au précepteur que si l'on se conduit en conséquence ; or, ce livre témoigne de beaucoup de défauts, au risque de nous exposer à ressembler à feu Coluche dans sa saynète monologuant avec son fils, à qui il demande d'arrêter le hasch, et de faire comme lui,... de choisir de préférence le pinard ! Et, nous sommes malgré l'âge et l'expérience, nul doute, encore un peu fous pour croire que les conseils que l'on donne aux plus jeunes, ils peuvent en faire autre chose que de les oublier aussitôt, si encore ils prenaient le temps de les écouter...

Et puis, un dernier aveu en la matière. Nous savons que notre maîtrise de ce territoire reste très imparfaite et que des collègues proches ou lointains sont bien meilleurs que nous, mais nous avons eu le mérite malgré tout de rédiger un texte, sur lequel d'autres plus compétents apporteront peut-être leurs critiques positives, ou d'autres plus jeunes et plus doués viendront bâtir une œuvre meilleure [2]. Aux spécialistes et autres connaisseurs, qui se rongeront sûrement les doigts devant les maladresses que nous avons parfois commises, ou les incompétences que nous avons fait transparaître, nous ne demandons aucune grâce, mais une critique implacable et des reproches acérés [3]. Préparez donc vos fouets : seul le silence fait mal !

1. Nous avons toujours veillé à ce que nos étudiants apprennent à traduire en paroles un énoncé mathématique déjà assimilé, étape ultime à notre sens de la compréhension véritable.

2. Nous sommes certains cependant, et sans prétention, que ce livre contient quelques jolies perles, perles que nous laissons aux lecteurs le soin de remonter à la lumière commune en se les accaparant et en sertissant de leur reflets leur savoir-faire.

3. Nous avons de notre côté constaté quelquefois chez l'un ou l'autre parmi des collègues éminents des lacunes et des maladresses, que nous avons tues, non par lâcheté mais par délicatesse. L'erreur est humaine et le temps est à la précipitation.

8. Bourbaki est-il vraiment mort ?

Venons-en au contenu du livre et répondons en premier à la question de savoir qu'est-ce que l'on attend d'un programme pour l'algèbre de M1. L'étudiant de M1 a grandi et mûri ; il a pris certainement du recul et sa curiosité, jointe à la grande diversité des ressources dont il dispose, lui a fait entendre, découvrir ou apprécier des choses et des idées que l'on passait sous le manteau il y a encore une ou deux générations. Bourbaki n'est plus Dieu, ou plutôt il est peut-être mort. À notre étudiant, la Toile offre à profusion du bon et du moins bon ; il visite les forums, pose des questions, apporte des réponses, et sa relation avec les mathématiques a sans doute changé, quand on le compare à ses compères des années 70 ou 80. Si les mathématiques exercent encore sur lui de la fascination, si elles lui procurent encore du plaisir, de la joie et de la consolation, il n'accepte qu'à contre-cœur, et beaucoup moins humblement que ses prédécesseurs, de ne pas comprendre ou de rester longtemps en dehors du cercle de clarté minimale. S'il est syndiqué ou politisé, il en voudra à la hiérarchie ou au pouvoir, et s'il est raffiné et cultivé (ce qui n'est pas en contradiction, bien sûr, avec l'état précédent), il nourrira un discret doute au sujet de la compétence de ses maîtres, à qui il demande aujourd'hui beaucoup plus de hauteur que ce dont ils sont souvent capables. Or, il n'y pas de mathématique sans effort, et peut-être sans souffrance. Il importe cependant de savoir, qu'au niveau du M1, les sentiers dans lesquels on engage la jeunesse sont assez balisés, et ne sont pas là pour créer chez les jeunes aspirants des angoisses ou des attaques de panique. On attend en contrepartie d'elle d'avoir maîtrisé l'algèbre linéaire de base et la théorie des groupes. Or, l'expérience montre que l'on a tout intérêt à revenir en M1 épisodiquement sur ces chapitres en vue d'en consolider l'appropriation et parfois même pour leur creuser de meilleures fondations. Nous l'avons fait ici ou là, parfois dans les commentaires, parfois dans certains chapitres, tel celui sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il faut cependant avoir clairement à l'esprit que l'algèbre du M1 est avant tout l'ouverture sur les anneaux et les corps, *mais qui dit « anneaux » dit théorie des modules, et qui dit « corps » dit théorie de Galois.* Cette dernière s'articule sur les deux points essentiels de la Licence, en l'occurrence (et comme par hasard) l'algèbre linéaire et la théorie des groupes. Le découpage en semestres permet évidemment d'envisager des ouvertures vers l'arithmétique ou la géométrie algébrique, sans parler de la théorie des représentations. On voit ainsi que ce n'est pas en un ou deux semestres que l'étudiant aura le temps d'assimiler les subtilités, nombreuses comme les grains de sable, que laisse entrevoir tout ce monde fascinant. Il ne peut consacrer non plus davantage de temps à en vouloir maîtriser les finesses et les variations. S'il est patient, il passera l'agrégation et prendra plus de temps pour se laisser pénétrer de toutes les senteurs que lui permettent son programme et l'emploi de ses jours. S'il est très pressé et très doué à la fois, il fera après ses mémoires de M1 et M2 de la recherche, et aura alors le répit qu'il faut pour réfléchir en profondeur sur les questions qui comptent pour lui. Autrement, il faudra qu'il attende de prendre en charge comme deux d'entre nous l'ont fait un cours ou un TD de M1, une fois adulte et plus calme. Nous croyons avoir en partie répondu au cahier de charges qui s'est esquissé dans les lignes qui précèdent, du moins sur ce morceau essentiel que constitue l'étude des modules, mais à peine hélas sur la théorie de Galois, puisque nous n'avons traité dans le présent volume que les corps finis et la correspondance de Galois, qui sont l'antichambre facile de la théorie. Si le bouquet nous plaît malgré tout, nous savons très modestement qu'il lui manque encore beaucoup pour plaire aux plus exigeants, et ce n'est que justice.

9. Et l'ordinateur dans tout ça ?

Les logiciels de calcul formel sont appelés à jouer de plus en plus de rôle en algèbre et en mathématiques en général. Le secours d'un calcul, d'un exemple, d'une réponse est parfois éclairant. On doit savoir programmer et savoir interroger des outils plus rapides que nous. On doit savoir aussi chercher où se trouve l'information ; un bricoleur qui n'a jamais mis les pieds chez Leroy Merlin ou chez Bricorama est comme un joueur de ping-pong qui a appris le jeu dans un des livres de la collection Marabout junior. Découvrir, connaître et utiliser Magma, Maple, Mathematica, Wims, Python, Matlab, Gap, Sage, etc. c'est un atout (mis à notre disposition par le travail de milliers d'ingénieurs) dont il ne faut pas se priver.

10. Le mélange, ici, c'est bien

Nous nous sommes autorisés parfois à rédiger quelques pages où l'on a mélangé ensemble des exercices et quelques rappels qui pourraient faire penser, à tort, à du vrai cours. Le lecteur ne devrait pas penser trouver dans ce recueil matière à remplacer un polycopié ou un manuel destiné à couvrir le savoir de base relatif aux notions abordées ici. Si nous l'avons fait, c'est pour éviter à certaine occasion de transformer en exercice banal ou pauvre un savoir après tout assez commun. Cela dit, il existe une tendance, commune à beaucoup d'auteurs [4], qui consiste à découper en questions à la queue-leuleu la démonstration d'un résultat ou l'étude d'un thème. L'étudiant voit s'élaborer devant lui un dessein dont il ne comprend pas souvent ni l'objet ni le but, et encore moins les méthodes ; or, un résultat ne se présente

4. Qui commence heureusement à être remise en question.

pas à son auteur ni aux épigones d'icelui découpé en tranches successives, à consommer l'une après l'autre, chacune en une dizaine de minutes. Il ne s'agit pas non plus de reproduire toutes les hésitations, errances et impasses que l'on peut également rencontrer en réfléchissant à une situation mathématique donnée. Il n'y a au fond pas de voie royale en la matière, ni un choix décisif à faire entre le saucissonnage de la preuve d'un théorème et la délivrance sans commentaire de l'énoncé d'icelle. Dans le cas précis de ce recueil, une voie médiane s'est naturellement imposée à nous en fonction du thème étudié, et nous avons ainsi mêlé des énoncés d'exercices découpés en questions progressives (qui rassurent parfois les débutants) et d'autres qui essaient de témoigner dans la mesure du possible de la manière dont on les ensile dans la toile neuronale.

11. Le vague à l'âme, et le beau temps après la pluie

Ce livre s'est écrit sur une longue période de temps et a subi des influences heureuses multiples et d'autres qui le sont moins. On y trouvera donc des redites, parfois volontaires et parfois qui nous sont passées inaperçues. Nos obligations réciproques multiples, les soucis du métier et ceux de la vie interrompaient régulièrement des périodes de travail intense pour laisser place à de longues périodes d'indolence, voire de torpeur. Quand nous revenions à nos chers moutons, par nécessité ou par obligation, nous nous apercevions souvent que nous avions laissé plus d'un thème mijoter sur un feu maintenant éteint, et dont l'ordonnance semblait moins urgente [5]. Nous commencions alors un nouveau thème, fédérateur pour chacun d'entre nous, car il est une chose sur laquelle nous avons tenu heureusement ou malheureusement pendant trop longtemps, c'est de rédiger à quatre mains sur le même clavier : la prouesse n'était évidemment pas toujours facile, mais l'envie d'apprendre de l'une et le bénéfice de l'âge dont prétendait devoir profiter abusivement et malicieusement l'autre ont fait que la fête était alors presque toujours au rendez-vous. Le bonheur ne pouvait se prolonger indéfiniment, car les forces souterraines tapies dans l'âme humaine viennent souvent à s'en plaindre, et sabotent l'harmonie. De deux sur un même clavier, on passa à un seul, travaillant malgré les peines de très longs mois durant, menant plusieurs projets de front, puis l'on fit appel à une âme généreuse et dévouée qui voulut bien s'occuper de la partie arithmétique et des polynômes symétriques, mais qui apporta aussi, ici et là, ses

5. Et cela a fait que certains thèmes auraient dû être mieux achevés, ou mieux cernés ; mais la longue interruption était venue à bout de l'intérêt que nous avions autrefois témoigné pour le sujet ou tout simplement rendu le sujet trop ardu pour nous au point que nous baissions les bras à l'idée de nous replonger dedans.

bons conseils et son sourire, et nous partîmes sur un nouveau tandem à trois dans des excursions à travers des champs embaumés, que peu de gens connaissent.

12. Les treize chapitres

Chaque chapitre est presque toujours précédé d'une introduction qui en éclaire le contenu et les objectifs. Nous donnons cependant ici un petit flair du contenu de chacun d'eux.

12.1. L'anneau des endomorphismes d'un groupe abélien

Ce chapitre peut être considéré comme une introduction à la théorie des modules. Un module est après tout une façon de faire agir un anneau R sur un groupe abélien $(M,+)$, autrement dit c'est la donnée d'un morphisme de R dans l'anneau $(\mathrm{End(M)},+,\circ)$ des endomorphismes de M. Mais, ce chapitre n'est évidemment pas que cela. La section qui suit l'introduction offre déjà sous la forme d'une liste d'exercices suivie des solutions et de commentaires instructifs un avant-goût très riche de ces anneaux d'endomorphismes. On se rendra compte au passage qu'en dehors de quelques cas standard (et fondamentaux), le calcul de ces anneaux est pour le néophyte parfois délicat, et désarçonnant même dans des cas aussi simples que celui de l'anneau des endomorphismes de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Passé cet instant de désarroi, le lecteur prendra du plaisir à classifier les anneaux de cardinal p^2, ce qui suppose en particulier la détermination des sous-anneaux de cardinal p^2 de l'anneau des endomorphismes du groupe additif $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et l'on finit le chapitre par l'étude relativement approfondie de l'anneau des entiers p-adiques introduit, cadre oblige, comme l'anneau des endomorphismes du groupe U_{p^∞} de toutes les racines p^k-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$, pour k quelconque.

12.2. Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Ce chapitre vient comme un moment de divertissement extrême après le précédent. Quiconque a travaillé et compris ces anneaux de congruence connaît le plaisir de jouer avec ces objets élémentaires et fins à la fois. C'est un lieu où l'algèbre abstraite vient au secours de l'arithmétique et montrer entre autres que les deux disciplines sont intimement liées. Pour poursuivre dans la logique du chapitre précédent, on réalisera que la structure d'anneau sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corollaire de sa structure de groupe additif, et cela expliquera des propriétés en apparence disparates telles qu'être, pour une classe $\overline{k}$, un générateur du groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ou un inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Au delà de cette propriété élémentaire, on étudiera les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, ou ce qui est la même chose les idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et l'on dressera les treillis de ces sous-groupes et indiquera la liste de leurs générateurs respectifs. C'est l'occasion de mettre en garde contre des écritures telles que $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, quand $d \mid n$, aussi aberrante que l'écriture $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. On ne restera évidemment pas à ce seuil, mais on ira avec le théorème des restes chinois vers l'étude des systèmes de congruence, la détermination des idempotents des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et de la structure du groupe des unités de ces anneaux, ainsi que diverses propriétés arithmétiques. Au lieu de nous diriger ensuite vers la célèbre loi de réciprocité quadratique [6], nous avons plutôt ouvert dans ce chapitre une fenêtre naturelle sur les groupes abéliens finis, les théorèmes de Sylow et les petits groupes finis, qui font plus partie du programme de L3, mais qu'il est toujours bon de revoir en M1. On examinera en particulier les groupes dont les 2-Sylow sont cycliques, et verrons à cette occasion que les 2-Sylow d'un groupe simple ne peuvent jamais, à l'image de ceux de $\mathfrak{A}_5$ ou $\mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_2)$, être cycliques. Nous finissons avec une étude concise et fine du groupe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ et de ses 2-Sylow, qui sont des produits semi-directs particuliers de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Tout au long du chapitre, on aura accordé une place particulière aux treillis, supports privilégiés s'il en est des yeux et de l'esprit.

12.3. Les anneaux généraux

Ce chapitre, avouons-le d'emblée, est un chapitre imparfait. Le mot *anneau* qui correspond au mot anglais *ring* ne renvoie évidemment pas à l'autre signification de "ring" : enceinte dans laquelle se disputent un combat entre joueurs [7], ici les deux lois $+$ et $\cdot$! De ce combat, nous avons subi certainement plus d'un ricochet.

Les anneaux sont en effet très divers et les outils qui servent à les étudier tout aussi variés. N'étant pas des spécialistes chevronnés du sujet, nous avons jugé nécessaire et plus sage *de s'en tenir à constater la diversité des objets concernés, en multipliant les exemples et les éclairages.* C'est un peu la raison d'être de ce chapitre.

On y rencontre ainsi les idempotents, le nilradical, le radical de Jacobson, les anneaux principaux, et ensuite les anneaux de fractions, les anneaux locaux, noethériens, artiniens [8], semi-simples, et tout passe, mais le niveau d'ap-

6. Résultat particulièrement fécond et qui devrait à notre sens occuper à lui seul tout un ouvrage pour en analyser les facettes multiformes. On fera appel dans l'ouvrage ici ou là à l'énoncé élémentaire de cette loi, que l'on considérera alors tout simplement comme connu.

7. La personne à l'origine de ce vocable peut bien avoir été un amateur des matchs de boxe dans sa jeunesse.

8. Les définitions des anneaux noethériens et artiniens sont en un certain sens duales. Si les anneaux artiniens sont en particulier noethériens, la réciproque n'est pas vraie. Nous tairons la signification géométrique de ces notions, et resterons sur notre faim pour justifier la dissymétrie entre ces notions duales (voir cependant III-5.5, en page 151).

proche reste relativement élémentaire. On effleure les algèbres de groupes et l'on termine avec l'étude du spectre premier de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$. ([9])

12.4. Un problème d'examen

C'est relativement un très court chapitre qui prend la forme d'un problème d'examen qui tourne autour de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et plus particulièrement autour du groupe multiplicatif des unités de l'anneau $\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$. Le but de cette épreuve est d'une part de rassurer et d'autre part de consolider ce qui a été vu dans le chapitre 2. Il est essentiellement de niveau licence. Un soin tout particulier a été apporté à la rédaction du corrigé de cet examen.

12.5. Les polynômes symétriques

Il manque une introduction à ce chapitre important. L'anneau des polynômes symétriques et le théorème sur leur structure en fonction des polynômes symétriques élémentaires ou les sommes de Newton apparaissent ici ou là en mathématiques, et à l'image de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il faut avoir le réflexe d'y penser et de s'en servir ! Nous considérons ce chapitre comme ardu. Il faut retrousser les manches et apprendre à force d'entraînement à manipuler intelligemment ces objets [10]. Du discriminant, au déterminant de Vandermonde, aux polynômes qui portent le même nom, et à leurs cousins les polynômes de Schur, on rencontrera plusieurs types et genres de polynômes symétriques et l'on apprendra à les relier ensemble. Plusieurs exercices *concrets, instructifs et inédits* sont proposés aux lecteurs.

12.6. Anneaux en théorie des nombres

Ce chapitre relève de la TAN, sigle équivoque et presque malheureux, qui désigne à la fois la théorie algébrique des nombres et celle qui est analytique ; il s'agit ici, bien sûr, de la théorie algébrique. Nous ne faisons qu'effleurer ce fascinant territoire et laissons à nos collègues arithméticiens le soin de

9. Quelques semaines avant de livrer notre texte à l'imprimeur, nous avons découvert par hasard sur les tables d'un libraire parisien, le joli livre d'Antoine Chambert-Loir, intitulé *(Mostly) Commutative Algebra*, Springer 2021. Vu la table des matières qui y figure et vu la notoriété de l'auteur, nous aurions sûrement amélioré sensiblement le présent chapitre si nous avions eu connaissance de ce livre-là auparavant. Nous avons délibérément omis d'y puiser la moindre chose utile à notre propos, partant de la simple constatation que cela aurait pu nous amener à revoir complètement notre copie. Les lecteurs, il va de soi, sont invités en revanche à y aller de suite.

10. Les astuces ne manquent pas, et tout le monde sait qu'une astuce est un tour de force de l'intelligence. Précisons que l'astuce mathématique n'a rien à voir avec l'astuce au sens de roublardise ou de ruse. Un vrai mathématicien ne ruse pas, ni dans ses maths ni dans la vie, du moins c'est ce que l'on attend d'un vrai.

continuer le voyage avec leurs étudiants. Ce chapitre riche nous a demandé, à la manière de son prédécesseur, beaucoup de soin et d'effort. L'objet essentiel ici est l'étude des anneaux des entiers des corps de nombres. Une maîtrise préliminaire des réseaux et plus généralement des sous-groupes de $\mathbb{Z}^n$ s'impose. C'est le théorème de la base adaptée qui est l'ingrédient incontournable. Ensuite, une forme quadratique à valeurs entières va jouer un rôle prépondérant et rendre l'étude de ces anneaux d'entiers possible. Les polynômes symétriques et la structure des groupes abéliens de type fini viennent à point. Nous nous limiterons dans ce chapitre introductif au sujet à donner un procédé de reconnaissance des cas où les anneaux d'entiers sont principaux. On étudiera le groupe de leurs unités et l'on mettra en valeur leur propriété essentielle, en l'occurrence le fait que ce sont des anneaux de Dedekind. On termine, sans démonstration, avec le théorème de Minkowski et la finitude du monoïde des classes d'idéaux.

12.7. Modules de type fini sur un anneau principal

Ce chapitre est au cœur du programme du M1 d'algèbre. Nous l'étudions pour lui-même sans entrer dans la démonstration détaillée du théorème de structure de ces modules. La structure des groupes abéliens de type fini et la réduction des endomorphismes sous l'angle des $\mathbb{K}[X]$-modules sont, bien sûr, le but essentiel de la théorie. Nous nous donnons ici à cœur joie pour multiplier et les exemples et les applications. Une petite annexe sur la restriction et l'extension des scalaires trouve sa place en fin de chapitre.

12.8. Un zeste d'algèbre linéaire

Ce chapitre apporte plusieurs idées et exercices qui ont manqué de trouver leur place dans [28] chez Calvage et Mounet. Le lemme des noyaux est revisité tout comme la décomposition de Dunford [11]. Plusieurs résultats inédits ou amusants sont développés dans ce chapitre, qui finit avec le classique calcul du cardinal du cône nilpotent sur un corps fini, que l'on traite de façon nous semble-t-il plus éclairante que celles offertes jusqu'à présent.

12.9. Les algèbres semi-simples

C'est le territoire introductif à la théorie des représentations, et des notions de simplicité (ou irréductibilité) ou de semi-simplicité (ou complète réductibilité). On y étudie les algèbres centrales simples et les théorèmes de Burnside et de Wedderburn et leurs applications immédiates. Nous nous arrêtons aux composantes isotypiques et renvoyons à [27] pour plus de développements sur ce sujet.

11. On y rencontre alors l'algorithme de Newton-Raphson.

12.10. Corps finis

Les corps finis sont à la mode, de par leurs applications en cryptographie et dans les codes correcteurs. Le chapitre qui leur est consacré introduit aux idées essentielles en la matière sans aller se perdre dans les subtilités qui intéressent les spécialistes. La collection d'exercices qui y est proposée sort un peu de l'ordinaire, et quand ces exercices le sont, nous pensons avoir proposé dans leur approche un traitement bien plus éclairant que ce que nombre de livres qui traitent ce sujet offrent en M1. Des exemples pratiques nombreux sont offerts en vue de la maîtrise du calcul dans ces corps. Quant à la partie théorique, elle est restée raisonnable et tourne essentiellement autour de l'étude des polynômes irréductibles en général ou de quelques corps infinis qui apparaissent naturellement dans ce cadre [12]. Toute une section est dédiée à une façon jolie de représenter le treillis des sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ inspirée du corps $\mathbb{F}_8$. Une autre jolie section est dédiée à l'étude du groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(2, \mathbb{F}_q)$. Une dernière aussi concerne les décompositions des polynômes cyclotomiques dans les corps $\mathbb{F}_p$.

12.11. Botanique fine de petits groupes

Ce chapitre est une excroissance de ce que les étudiants font au niveau licence en théorie des groupes. Il plaira aux amoureux des petits groupes et des treillis de leurs sous-groupes en général. Outre un effort de familiarisation avec ces groupes, ce qui est bien utile dans la correspondance de Galois, on offre plusieurs énoncés d'exercices inédits sur le sujet. Le procédé de binarisation va permettre de gérer un certain nombre de groupes sans nom dans la littérature et qui sont fort intéressants en général [13]. Un examen des sous-groupes $\mathfrak{S}_4$ disséminés dans le groupe simple $\mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_2)$ est présentée. On s'intéresse ensuite au groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_3)$ et au groupe simple $\mathfrak{A}_5$, dont on décortique avec grâce le treillis de ses sous-groupes. Plusieurs autres petits groupes dignes d'intérêt sont examinés et l'on termine le chapitre avec l'étude de tous les groupes d'ordre 60, sans en faire vraiment la classification.

12.12. La correspondance de Galois

On clôt l'ouvrage avec ce chapitre princier, où la théorie des groupes, l'algèbre linéaire et la théorie des corps se donnent la main pour montrer combien la mathématique est une, et surtout pour réaliser la fascinante correspondance entre le treillis des sous-groupes du groupe de Galois et

12. N'est-il pas bien connu que la clôture algébrique d'un corps fini est de cardinal infini ?

13. *Nommer* est un acte fondateur, car l'objet nommé sort de suite de l'anonymat et acquiert une présence pour nous.

le treillis des extensions intermédiaires d'une extension galoisienne [14], les classes de conjugaison d'un côté correspondant de l'autre aux sous-corps isomorphes… Ce chapitre est fourni en exemples nombreux et son étude peut être commencée avant d'attendre d'absorber tout ce qui précède, en dehors néanmoins d'une certaine familiarité avec les treillis des petits groupes. Un retour sur le chapitre des corps finis est souhaitable, car là toutes les extensions sont galoisiennes et tous les groupes de Galois sont cycliques. ([15])

12.13. Problèmes d'examen

Nous avons réuni sous cet emblème des énoncés d'examen et des sujets de partiel composés par nous-mêmes ou empruntés à des collègues. La plupart sont fournis avec des solutions détaillées. Destinés en principe à juger les étudiants, ils sont surtout l'occasion de faire le point sur les notions acquises et de vérifier si l'essentiel d'un enseignement semestriel a été bien assimilé. Il apportent chacun un ajout par rapport au reste du livre, et doivent être perçus comme de bons sujets d'entraînement et de découverte. Les lecteurs sont invités à s'y reporter régulièrement et ne doivent aucunement attendre d'avoir tourné toutes les pages qui précèdent pour en découvrir le contenu.

13. Les treize chapitres qui manquent

On a cherché à écrire un recueil transverse aux livres de cours et aux recueils habituels d'exercices de M1, comme on en trouve un certain nombre sur le marché, et qui ne manquent aucunement de valeur… Nous voulions souvent sortir des sentiers battus.

13.1. Géométrie supérieure

13.2. Rudiments d'algèbre commutative et de géométrie algébrique

13.3. Arithmétique et réseaux

13.4. Formes quadratiques et algèbres de Clifford

14. Nous nous limitons à $\mathbb{Q}$, où la séparabilité est acquise. La normalité est présentée sous un angle novateur.

15. Précisons quand même que ce chapitre va quelque peu au delà de la correspondance de Galois proprement dite et touche à d'autres aspects de la théorie de Galois de base, sans évidemment chercher à en faire, loin de là, le tour.

13.5. Groupes de Lie classiques

13.6. Algèbres de Lie semi-simples complexes

13.7. Corps généraux

13.8. Algèbres de polynômes en plusieurs variables

13.9. Compléments en théorie de Galois

13.10. Algèbre homologique

13.11. Algèbres de groupes et représentations

13.12. Représentations de carquois

13.13. Introduction au programme de Langlands

14. Créances

En premier, feu François Conduché, parti trop tôt, pour sa générosité et pour avoir partagé avec nous ses connaissances exotiques et son savoir hors du commun.

Anatole Khélif au génie multiface, pour ses réponses instantanées à nos interrogations. Jean Michel, dont la porte est toujours ouverte, pour l'attention et l'accueil qu'il a bien voulu nous apporter. Pierre Beaume, pour sa lecture attentive de plusieurs de nos chapitres et ses remarques pertinentes.

Bernhard Keller, algébriste de très grand talent, à l'intelligence redoutable et une imperturbable assurance, pour sa disponibilité malgré un emploi du temps sursaturé.

Alain Debreil, pour l'immense service rendu à la communauté en popularisant les treillis, pour sa maîtrise inégalée en Tikz, sa curiosité mathématique et son exigence de rigueur. Ému devant notre désarroi pour boucler une gestation qui ne finissait pas, il nous a prêté main forte durant le confinement et plusieurs semaines avant pour finaliser et améliorer certains chapitres.

Last but not least, nous avons côtoyé de par nos lieux de travail des mathématiciens de tout premier plan, Antoine Chambert-Loir, Marc Chaperon, Michael Harris, Marc Hindry, Bruno Kahn, Jean Lannes, Loïc Merel, Jean-François Mestre, Georges Skandalis, Jean-Louis Tu, Pierre Vogel. Ces personnes nous ont parfois donné la petite corde qui nous permettait de nous rattacher à la terre et sortir de l'eau, ou par leur émulation directe, consciente ou non, nous ont poussé à ne pas perdre le cap.

Un merci, enfin, aux modérateurs du site mathematiques.net et à ses divers intervenants anonymes.

15. Pour finir

15.1. Considérations générales

On trouvera dans l'avant-propos qui suit cette préface des précisions utiles pour saisir nos choix de notations et notre terminologie. Nous demandons aux lecteurs de lire cet avant-propos avec soin.

15.2. Finition et pagination

Nous avons enfin apporté des soins accentués à la pagination. On a utilisé plusieurs tailles de parenthèses (en laissant respirer les formules qui s'y trouvent) et géré aussi bien que possible les espacements verticaux. Nous avons ponctué les formules centrées, partant du principe qu'elles font partie intégrante du texte environnant. Nous avons veillé à ne pas laisser de lettre orpheline en début de ligne ou de formule coupée ou de phrase commençant par un symbole mathématique. Nous avons fait attention à l'orthographe et à la grammaire, évité les solécismes, fait la chasse aux anacoluthes, aux anglicismes, aux contre-sens, aux « du coup » et autres « au final », etc.

15.3. Pour finir pour de bon

Le travail sur le présent ouvrage a commencé il y a une quinzaine d'années, et voir notre texte bientôt publié est à la fois une joie et un soulagement. Retarder encore sa sortie, pour y traquer quelques coquilles dernières, n'a plus à notre sens de véritable raison mathématique. Il est temps de jeter l'ancre et déposer de nos épaules ce lourd et précieux fardeau, et laisser le soin à d'autres (et nous pensons en cela aux jeunes collègues) de le porter plus loin. Nous savons que la plupart de nos lecteurs y trouveront de quoi rassasier leur curiosité sur les thèmes que nous avons abordés et que les candidats à l'agrégation et leurs préparateurs y dénicheront des exercices originaux et utiles pour l'oral. Cependant, nous serons à notre sens surtout récompensés lorsque l'on verra des ouvrages de cours bénéficier du travail que nous avons ici-même effectué.

Rached Mneimné
Juin 2021

Montrouge

« Le langage est la maison de l'être. »
Martin Heidegger

« Voyager vous laisse d'abord sans voix,
avant de vous transformer en conteur. »
Ibn Battouta

Avant-propos

Il est question ici de notations et de rappels généraux de cours. Nous ne saurions insister sur l'intérêt de lire avec attention cet avant-propos. L'ordre qui préside à leur présentation tient davantage de l'ordre dont on fait usage dans la succession des chapitres que de celui qui résulterait d'un exposé linéaire de cours.

Commençons par nous autoriser l'emploi des vocables *section*[16] et *sous-section*, désignant tous deux des paragraphes (plus ou moins longs) dotés de numérotations, que le lecteur distinguera l'une de l'autre aisément. Nous réserverons alors le mot paragraphe à une strophe de quelques lignes ! Ainsi, la partie 1 de cet avant-propos est une section, et la partie 1.1 en est une sous-section, alors que la morceau de quelques lignes où nous sommes, allant de *Commençons* à *paragraphe*, est un paragraphe.

1. Applications et Cie

L'écriture suivante

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

est la représentation mentale que l'on se fait d'une application telle que f. Les ensembles X et Y en sont les ensembles de départ et d'arrivée, respectivement.

Deux applications $f : X \to Y$ et $g : X' \to Y'$ sont égales si leurs ensembles de départ et d'arrivée sont égaux, autrement dit si $X = X'$ et $Y = Y'$, et si de plus $\forall x \in X, f(x) = g(x)$.

1.1. Les notations $\to$, $\twoheadrightarrow$, $\hookrightarrow$, $\rightsquigarrow$

On notera la différence entre les notations $\to$ et $\mapsto$, la seconde étant « mutifiante » à la différence de la première : on ne peut remplacer les noms des ensembles X ou Y par des noms différents sans changer aussitôt l'application f, alors que l'élément courant x peut être remplacé librement par t, u ou toute autre lettre !

16. Un sens mathématique du mot « section », différent de celui donné ici, sera introduit en 1.5.

C'est le cas, par exemple, aussi des symboles $\sum$ ou $\int$, puisque l'on peut sans souci écrire $\sum_k u_k$ ou $\sum_n u_n$, tout comme $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ou $\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$.

Cette distinction est d'autant plus nécessaire que les applications concernées sont entre des ensembles de parties, comme par exemple le passage au complémentaire

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{P}(X) \\ A \subseteq X & \mapsto & {}^{c}A, \end{array}$$

ou comme dans la correspondance bijective entre l'ensemble $\mathcal{T}(G/H)$ des sous-groupes du quotient G/H, où H est un sous-groupe distingué [17] dans G, et l'ensemble $\mathcal{T}_H(G)$ des sous-groupes de G contenant H :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(G/H) & \to & \mathcal{T}_H(G) \\ L & \mapsto & \pi^{-1}(L) \supseteq H, \end{array}$$

où $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$ est la surjection canonique [18].

Les notations $f : X \twoheadrightarrow Y$ ou $X \overset{f}{\twoheadrightarrow} Y$ signalent bien entendu le fait que f est surjective. Si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble X, la surjection canonique $\pi : X \twoheadrightarrow X/\mathscr{R}$ sera notée souvent $X \twoheadrightarrow X/\mathscr{R}$ sans mentionner ou rappeler nécessairement le symbole π (ou tout autre) qui la désigne.

Si l'application $f : X \to Y$ est injective, on pourra écrire $X \overset{f}{\hookrightarrow} Y$; souvent, si $X \subseteq Y$ et que f soit l'injection canonique $\iota_{X,Y} : X \to Y$ de X dans Y, on la désignera alors tout simplement par $X \hookrightarrow Y$.

Nous terminons cette sous-section en introduisant un nouveau symbole, en l'occurrence $\rightsquigarrow$. La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$ est périodique. Elle applique $\pi/2$ en 1 et π en 0, ce qui s'écrit $\sin(\pi/2) = 1$ et $\sin(\pi) = 0$, mais aussi

$$\pi/2 \rightsquigarrow 1 \qquad \pi \rightsquigarrow 0.$$

Ainsi, la fonction de la variable réelle $x \mapsto 3e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle $y' = 2y$ avec la condition au bord $1 \rightsquigarrow 3e^2$. Autre exemple : l'automorphisme du groupe additif $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ défini par $\bar{1} \rightsquigarrow \bar{5}$ vérifie $\bar{k} \mapsto \overline{5k}$.

1.2. Restriction, application induite, passage au quotient

Si $f : X \to Y$ est une application et si $A \subseteq X$, on note $f_{|A} : A \to Y$ la restriction de f à la partie A de X. En particulier, si $f = \mathrm{Id}_X$, la restriction $f_{|A} = \iota_A : A \hookrightarrow X$ est l'injection canonique de A dans X. En analyse, on note parfois de la même façon une fonction et sa restriction à une partie ; ainsi, par exemple, la fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et sa restriction à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2]$ sont toutes deux notées, par abus, de la même façon. Une seulement des deux est injective ! Aucune n'est surjective.

17. On dit aussi normal dans G.
18. Pour la notation familière $\pi^{-1}(L)$, voir la sous-section 1.4.

On ne peut parler pour un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie, du déterminant de sa restriction $f_{|F}$ à un sous-espace $F \subset E$ ([19]). On ne peut pas parler davantage de polynôme caractéristique ou de polynôme minimal d'une telle restriction. On peut, en revanche et bien sûr, parler du rang d'une restriction, de son noyau ou de son image... Ainsi, $\mathrm{Ker} f_{|F} = F \cap \mathrm{Ker} f$.

Si $A \subseteq X$ est stable par f, on dispose alors de l'*application induite par f sur la partie stable A*, que l'on note $f_A : A \to A$. Ainsi, si $f = \mathrm{Id}_X$, on a pour toute partie $A \subseteq X$, $f_A = \mathrm{Id}_A$.

Dans le cadre linéaire, si $f \in \mathrm{End}(E)$ et si f laisse stable le sous-espace F de E, l'application induite f_F a tous les attributs d'un endomorphisme ; en particulier, si F est de dimension finie, on peut parler de $\det(f_F)$, de son polynôme minimal μ_{f_F} ou de son polynôme caractéristique χ_{f_F}. De plus, on dispose d'un endomorphisme induit par f sur le quotient E/F, lequel sera noté $f_{E/F}$. En particulier, on a en dimension finie $\chi_f = \chi_{f_F} \times \chi_{f_{E/F}}$.

1.3. Corestriction

Soit $f : X \to Y$ est une application et soit $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \in Y, x \in X\}$. Si Z vérifie $\mathrm{Im}(f) \subseteq Z \subseteq Y$, on appellera *corestriction de f à $Z \subseteq Y$, l'application $f_{X \to Z} : X \to Z$*, qui coïncide sur les éléments de X avec f. Alors que f peut ne pas être surjective, sa corestriction à son image l'est toujours. Nous choisirons de ne pas systématiquement distinguer f de sa corestriction à Z dans les notations, mais nous aurons en revanche toujours à l'esprit qu'elles ne sont pas la même chose ; une situation où cela a lieu est quand on travaille par exemple avec une application linéaire $f : E \to F$ et que l'on lui associe la suite exacte

$$\mathrm{Ker} f \hookrightarrow E \overset{f}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Im}(f) \subseteq F,$$

la lettre f qui surmonte le signe $\twoheadrightarrow$ est en fait non pas f mais sa corestriction à l'image.

Remarquons au passage que si $f : X \to X$ laisse stable la partie $U \subseteq X$, l'application induite $f_U : U \to U$ n'est autre que la corestricion à U de la restriction $f_{|U} : U \to X$ de f à U.

1.4. Fibres

Si $f : X \to Y$ est une application, elle induit des applications

$$\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$$

entre les ensembles des parties de X et de Y par image directe et image réciproque. On notera $f(U)$ l'image directe (contenue dans Y) par f de la

19. Ni d'ailleurs du déterminant d'un isomorphisme linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie.

partie $U \subseteq X$ et l'on notera $f^{-1}(Z)$ l'image réciproque (contenue dans X) par f d'une partie $Z \subseteq Y$. Nous n'attribuerons pas de notations particulières à ces applications.

Si $x \in X$, on note $\{x\} \in \mathscr{P}(X)$ le singleton défini par l'élément x, de sorte que $f(\{x\}) = \{f(x)\} \subseteq Y$. Si $y \in Y$, la partie

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

sera appelée *la fibre de f au dessus de x*. Une application est injective si, et seulement si, ses fibres non vides sont des singletons, et elle est surjective si, et seulement si, ses fibres sont toutes non vides.

Certains auteurs adoptent la notation $f^{-1}(y)$ pour désigner la fibre d'une application f au dessus de y, choix que nous déconseillons vivement dans la mesure où f n'est pas bijective. Si f est en revanche bijective et que f^{-1} désigne son application réciproque (ou inverse), on a clairement avec des notations légitimes les deux égalités

$$f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\} = f^{-1}(\{y\}),$$

écritures qui signifient que le singleton formé par l'élément $f^{-1}(y)$, image de y par l'application réciproque f^{-1}, est égal à l'image réciproque par l'application f du singleton $\{y\} \in \mathscr{P}(Y)$, mais est aussi égal à l'image directe par l'application f^{-1} du singleton $\{y\}$!

1.5. Sections ensemblistes et sections morphiques

▷ Une application $f : X \to Y$ est injective si, et seulement si, il existe une application $g : Y \to X$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. Une telle application g, inverse à gauche de f, est appelée *rétraction ensembliste de l'injection $X \overset{f}{\hookrightarrow} Y$*. Quand f est un homomorphisme de groupes (d'espaces vectoriels, ou de modules, etc.), on demande à ce qu'il en soit de même de g, et l'on parle alors tout simplement de *rétraction.*

▷ On a une propriété analogue pour le cas d'une application surjective [20]. Une application $f : X \to Y$ est surjective si, et seulement si, il existe une application $g : Y \to X$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Une telle application g, inverse à droite de f, est appelée *section ensembliste de la surjection $X \overset{f}{\twoheadrightarrow} Y$*. Quand f est un homomorphisme de groupes (d'espaces vectoriels, ou de modules, etc.), on demande à ce qu'il en soit de même de g, et l'on parle alors tout simplement de *section.* Il importe de noter qu'une section g à f est déterminée par son image $\mathrm{Im}(g) \subseteq X$, puisque $\{g(y)\} = f^{-1}(y) \cap \mathrm{Im}(g)$, pour tout $y \in Y$.

20. L'existence d'une application « inverse à droite » étant tributaire de l'usage de l'axiome du choix.