Préface

En mathématiques, il y a deux façons d'embrasser les contenus : soit en apprenant, soit en comprenant. Mais il n'y en a qu'une de les mettre en œuvre : en faisant des exercices. On conviendra en effet que la résolution d'exercices permet de tisser petit à petit les liens invisibles par lesquels tiennent les idées en mathématiques. Les exercices donnent chair au théorème ; en incarnant ses hypothèses, l'exercice met en évidence sa puissance mais, de façon paradoxale, souligne parfois son inadéquation à la résolution d'un problème particulier : il faut alors créer soi-même le petit bout de chemin qui permette d'aller jusqu'à la théorie générale. Les hypothèses sont elles aussi souvent cachées : les mettre en évidence est en soi un travail qui est loin d'être facile.

Au travers de la pratique des exercices, l'étudiant développe le processus mental de la résolution : l'accumulation d'expériences, la création de moteurs d'analogie, la mise en place d'un réseau de communication entre les concepts, et ainsi de suite. La pratique régulière d'exercices aboutit à terme à ce que l'étudiant sépare automatiquement les aspects techniques des concepts plus profonds : libéré de la crainte de la technicité, l'activité de réflexion se concentre alors sur la compréhension et la démonstration, et par extension sur la relation avec l'examinateur.

Une difficulté souvent sous-estimée, c'est de mesurer… la difficulté d'un exercice. Cela se comprend bien : savoir d'un exercice qu'il est difficile, c'est avoir presque instantanément exploré les voies faciles qui mènent à sa solution. Le rôle de la pratique préalable des exercices est de faire ce travail, avec une rapidité souvent déconcertante pour le sujet lui-même : un peu comme un maître des échecs ne pense même pas aux deux prochains coups, mais peut se projeter dans la stratégie qui va guider les coups suivants. Bien sûr, l'intérêt de cette capacité est évident : si l'exercice tombe sous le coup d'une méthode éprouvée, elle sera reconnue sans peine et sans fatigue, ce qui permettra de se concentrer sur les difficultés techniques, s'il y en a. S'agissant de l'X, il n'est pas improbable que l'exercice soit ardu, mais ce serait une erreur que de le postuler. La méthode est toujours d'examiner froidement le problème afin d'aider son cerveau à se mettre en position de faire les essais nécessaires. Si l'exercice est difficile, le cerveau se placera de lui-même dans la configuration la plus apte pour le résoudre. S'agissant de certains exercices d'ENS, il faut bien comprendre que, quand bien même l'énoncé comporterait quatre questions, en avoir abordé une seule, sans même l'avoir complètement résolue, peut être le signe d'une haute performance.

Tout cela suppose une pratique régulière et sérieuse. Cet ouvrage est fait pour cela.

Il est à noter que, les programmes ayant profondément changé lors de la session 2015, on ne trouvera dans cet ouvrage que des exercices de cette session. Néanmoins, dans quelques cas, il faut bien admettre qu'il s'est trouvé des examinateurs pris de court par les changements de programmes, et que certains exercices (notamment aux ENS) font appel, sinon à des résultats (qui étaient admis par l'examinateur), au moins à un état d'esprit peu conforme aux nouvelles exigences. Reconnaissons aussi que les examinateurs, dans ce cas, ont su prendre en compte le degré d'étrangeté de leur sujet dans la notation finale.

Les exercices sont classés en grands chapitres, ce qui permet de les mettre plus facilement en parallèle avec la progression du cours. Ils ne sont en revanche pas classés par difficulté croissante. Tous les exercices ont été effectivement posés lors de l'oral des concours. La provenance n'a été indiquée que par les deux sigles X et ENS. En effet, en ce qui concerne les ENS, il nous manquait souvent la provenance exacte (Ulm, Lyon, Cachan ou Rennes) et, compte tenu du labyrinthe des épreuves communes, il nous a paru plus judicieux de ne pas distinguer davantage.

En ce qui concerne la solution, nous l'avons rédigée en gardant à l'esprit qu'il s'agit d'exercices d'oral et non de problèmes d'écrit. Elle est parfois assortie de commentaires composés en italique. Elle est toujours détaillée, et rédigée pour en faire apparaître les ressorts fondamentaux.

Un conseil pour travailler ces exercices : le faire tout au long de l'année. Résoudre un exercice est loin d'être un pensum. C'est au contraire une source de plaisir. Bien sûr, la recherche infructueuse peut être cause d'une souffrance, mais cette souffrance (toute relative !) s'évanouit dès que l'on franchit avec succès les obstacles posés par l'énoncé. Le sentiment de triomphe ressenti la première fois que l'on résout un exercice difficile ne s'oublie pas.

Une dernière idée : chercher un exercice un jour et, en cas d'insuccès, laisser passer une nuit pour se remettre au travail sur le même exercice le lendemain. En cas de nouvel insuccès seulement, consulter la solution.

Il va de soi qu'il ne faut pas hésiter à varier les niveaux de difficulté et faire régulièrement, même en visant l'X ou les ENS, des exercices provenant des Mines ou de Centrale, par exemple. On en trouve aisément des annales (ne serait-ce que dans cette même collection) mais nous ne saurions trop conseiller aux étudiants et à leurs professeurs de consulter la RMS (Revue de la filière MathématiqueS), qui publie d'une année sur l'autre un millier d'exercices posés aux concours l'année précédente. C'est l'occasion pour nous d'en remercier le Comité de rédaction qui, par son travail, permet à tous les élèves préparationnaires des différentes filières de bénéficier d'une précieuse source d'information à laquelle, en son absence, seuls les élèves des très grands lycées pourraient s'abreuver.

Puisque nous en sommes aux remerciements, nous ne saurions en adresser trop à ceux qui, par leur relecture et leurs conseils, ont largement contribué à améliorer cet ouvrage, dont la qualité espérée est le meilleur hommage que nous puissions rendre à l'aide qu'ils nous ont apportée : Thomas Blomme, Jean-Denis Eiden, Louise Gassot, Antoine Jacono, Idriss Mazari, Salim Tayou et Paul Thévenin.

Table des matières