

Préface

La session 2016 des concours de la filière MP a été la deuxième à éprouver les nouveaux programmes mis en place entre 2013 et 2015. Rappelons que les nouveautés les plus saillantes de ces derniers furent la disparition corps et biens de pratiquement toute forme de géométrie et l'apparition d'un cours de probabilités (limité aux variables aléatoires discrètes). Les probabilités sont d'ailleurs bien représentées dans les épreuves rassemblées dans cet ouvrage puisque deux d'entre elles — les secondes épreuves de Polytechnique et du concours Centrale-SupElec — y sont nettement dominées par des problématiques relevant d'icelles. D'autres épreuves contiennent une quantité marginale de questions ayant trait aux probabilités, souvent introduites de manière assez artificielle.

Alors qu'on aurait pu envisager un affaiblissement général du niveau des épreuves consécutif à la dernière réforme des programmes, c'est tout le contraire qui s'est produit. À une ou deux exceptions près, les épreuves de la session 2016 ont été plus difficiles que celles des années antérieures, et de surcroît plutôt plus longues.

Il nous faut malheureusement aborder maintenant le point le plus tristement remarquable de la session 2016 en MP : sur les dix sujets, huit présentent au moins une erreur d'énoncé. Dans certains cas, ce sont des fautes vénielles faciles à corriger, généralement situées dans les toutes dernières questions et ne présentant donc pas de grand danger dans l'évaluation des candidats. Malheureusement, trois des dix sujets sont largement entachés d'erreurs : il s'agit des deux sujets du concours d'entrée à l'École Polytechnique et de la première épreuve du Concours Commun Mines-Ponts.

Vu cette constatation, il paraît essentiel que les candidats ne s'illusionnent pas sur la qualité des épreuves de concours : les énoncés parfaits y sont l'exception et non la règle. Il est donc nécessaire d'être entraîné à réagir en cas d'erreur supposée, à tout le moins il faut faire preuve d'esprit critique. Nous estimons qu'une bonne préparation des candidats nécessite qu'ils soient confrontés un jour ou l'autre à de réelles épreuves de concours. Nous avons ainsi pris le parti de reproduire les sujets d'origine quasiment à l'identique,

en prenant bien soin de n'y corriger *aucune* erreur d'énoncé, ni d'en introduire ! Tout au plus avons-nous consenti à en éliminer les rares fautes d'orthographe, tant que ces modifications n'affectaient pas le sens apparent des phrases incriminées. Les autres modifications subies par les énoncés sont d'ordre cosmétique et ne trouvent leur motivation que dans la nécessité d'une mise en page agréable de l'ouvrage. En outre, en vue d'une correction par le professeur, nous pensons que la numérotation des questions est plus agréable si elle suit un ordre croissant dans tout l'énoncé (sans avoir égard à la partie à laquelle elle appartient) : ce mode de numérotation, qui est celui des sujets d'origine à Polytechnique et au Concours Commun Mines-Ponts, a donc été adapté aux sujets des Écoles normales supérieures et du Concours Centrale-Supelec.

L'École Polytechnique nous avait habitué à des sujets d'une grande qualité formelle. Certes, une erreur d'énoncé se glissait épisodiquement dans ceux-ci, mais sans grande conséquence et suffisamment rarement pour que l'on puisse le pardonner. C'est peu dire que nous sommes tombé des nues en découvrant les deux livraisons 2016 de ce concours. Il s'agit, et de très loin, des deux sujets à la fois les plus mal écrits et les plus constellés d'erreurs que le concours ait proposés depuis des décennies. Le comble fut atteint lorsque, au lieu de publier les sujets originaux sur sa base de données en ligne, le service du concours leur substitua des *faux*, c'est-à-dire des réécritures expurgées de presque toute erreur, sans aucune explication. Le lecteur de cet ouvrage ne sera donc pas étonné des différences entre les énoncés d'origine tels que nous les reproduisons (nous disposons, pour preuve, de copies scannées des sujets) et les faux publiés sur le site internet de l'École Polytechnique. Comble de mauvais goût, le premier faux (épreuve A revue) ajoute une partie totalement nouvelle au sujet d'origine (cet ajout est en partie absurde puisqu'il fait admettre un énoncé sur la mesure de Lebesgue qui n'est pas intelligible avec le programme de MP). Quant au deuxième faux (épreuve B revue), il lève l'une des ambiguïtés de l'énoncé d'origine de la pire des façons imaginables : au lieu de supposer que toutes les variables X_k sont à valeurs strictement positives, il ne donne que leur loi, ce qui complique inutilement la première question et bien des suivantes.

Pour les trois sujets nettement déviants de la session 2016, nous proposons, sur le site web de notre éditeur, trois versions remaniées où toutes les erreurs ont été éliminées. Contrairement aux faux produits par Polytechnique, il s'agit de réécritures effectuées sur la base d'un corrigé détaillé. Le lecteur devra toutefois être attentif au fait que le corrigé que nous proposons dans cet ouvrage ne vise qu'à répondre à l'énoncé d'origine et non à la version remaniée de celui-ci.

Précisons maintenant la structure de chaque chapitre.

Prérequis. – Cette partie précise les parties des programmes de première et deuxième année concernées par le problème.

Appréciation du problème. – Cette partie souligne l'intérêt pédagogique du problème, ainsi que sa difficulté et sa longueur. Il signale, si besoin est, la présence d'une quantité plus ou moins élevée d'erreurs d'énoncé.

Énoncé. – Comme indiqué, l'énoncé est fondamentalement conforme à l'original, à la numérotation près des questions. Les erreurs d'énoncé sont authentiques.

Corrigé. – Le corrigé est rédigé dans les règles de l'art, comme il devrait l'être par un élève le jour du concours. Une attention particulière a été portée à l'adéquation du corrigé avec le niveau du concours.

Commentaires. – Les commentaires soulignent l'intérêt mathématique du problème et reviennent sur les temps forts de ce dernier. On n'y indique qu'exceptionnellement les pièges et erreurs possibles du candidat. Parfois, des solutions alternatives de certaines questions sont brièvement suggérées. Un retour est effectué sur les éventuelles erreurs d'énoncé du problème, en signalant où se situe l'erreur et en motivant les initiatives que nous avons prises dans le corrigé pour affronter ces difficultés. Sont également proposées des références bibliographiques autour du thème du problème.

Théorèmes utilisés. – On cite les noms des principaux théorèmes utilisés. Les énoncés complets de ces théorèmes sont précisés en appendice. Seuls les théorèmes importants sont référencés, et plus particulièrement ceux vus en deuxième année, les propositions relevant de la pratique standard n'étant pas relevées.

En général, un étudiant vise une certaine catégorie d'écoles : il trouvera dans ce livre matière à s'y préparer. Aucun problème du concours E3A ne figure dans cet ouvrage, mais l'étudiant le présentant y sera très bien préparé en travaillant les problèmes des Concours Communs Polytechniques. Cependant, pour qui serait attiré par des écoles recrutant leurs élèves à l'aide de questionnaires à choix multiples, une préparation spécifique est certainement nécessaire, et cet ouvrage ne suffira donc pas.

On ne saurait présenter un concours sans avoir une certaine idée de ses attendus. Ceux-ci évoluent au cours des années. Le candidat sera d'autant plus conscient de la spécificité actuelle de chaque concours qu'il aura travaillé sur des millésimes récents. Il est bien entendu illusoire de tenter de deviner les thèmes futurs d'un concours à partir des sujets déjà tombés. On peut en revanche, pour un concours donné, s'attendre à une certaine constance dans le niveau de difficulté des questions, la longueur

des problèmes, les qualités testées, le niveau d'exigence de la rédaction des solutions. La lecture des rapports de concours sera indispensable au futur candidat et il devra la confronter aux corrigés présentés ici.

Des règles de conduites générales doivent être adoptées indépendamment du concours visé. Il est indispensable de lire attentivement le préambule. Il est aussi préférable d'avoir une idée globale de l'énoncé en le lisant dès le début de l'épreuve, au moins dans ses grandes lignes : on peut ainsi définir une stratégie et se faire une idée de la longueur de l'énoncé. Rien n'est pire, par exemple, que de tenter de démontrer un résultat intermédiaire qui est en réalité le but du problème. La lecture des questions subséquentes peut souvent donner des idées sur la réponse à une question ouverte de l'énoncé. On peut aussi mesurer l'indépendance des questions, détecter celles qu'il est absolument nécessaire de traiter, ou au contraire celles que l'on peut admettre sans perdre le fil de l'énoncé. En outre, il est parfaitement légitime et accepté par les correcteurs que l'on puisse considérer implicitement comme acquis un résultat fourni par l'énoncé quand bien même on ne l'aurait pas traité, à condition bien entendu de ne pas l'utiliser avec effet rétroactif : admettre la troisième question pour traiter la deuxième sera toujours considéré comme un non-respect des règles tacites du « jeu ». En principe, le candidat invité explicitement à déduire un résultat d'un autre (l'incontournable « En déduire que ») doit obéir à cette injonction ; si, pour des raisons exceptionnelles, il souhaite donner une démonstration directe de l'énoncé à démontrer, sans se servir du résultat qu'on lui demande d'utiliser, il doit avoir de très solides raisons pour le faire et s'expose en principe à une petite sanction. Dans cet ouvrage, nous avons, à trois reprises, pris le parti de désobéir à une requête de déduction, voire d'inverser l'ordre dans lequel, à l'intérieur d'une même question, les résultats étaient établis. Cette décision n'a été prise que parce qu'il nous est apparu qu'agir de la sorte simplifiait nettement le raisonnement dans les cas en question, en espérant la clémence du jury.

La longueur apparente du problème est un élément d'appréciation dont l'interprétation n'est pas facile. Il est d'ailleurs ardu de pouvoir évaluer le niveau de difficulté des questions par une lecture superficielle, alors même que la difficulté contribue de manière décisive à la longueur réelle d'un problème. Quoiqu'il en soit, il n'est pas du tout évident que le jury soit plus tolérant à une rédaction lâche lorsque le nombre de questions à traiter est particulièrement élevé. Le seul réconfort que le candidat négligent pourra s'attendre à trouver dans ce cas-là est la possibilité qui lui est offerte de se rattraper sur des questions ultérieures. *A contrario*, les points perdus lors d'une épreuve courte sont plus difficiles à compenser, et il est donc souhaitable d'être particulièrement vigilant à la précision de la rédaction dans ce cas. Signalons tout de même que beaucoup de problèmes n'ont

pas vocation à être traités dans leur intégralité : leur longueur peut être justifiée par l'impératif moral de clore une démonstration, mais aussi par la possibilité de balayer un spectre plus large de thèmes du programme.

Le jour du concours, les erreurs d'énoncé, une fois repérées, devront être signalées explicitement, et le candidat devra à cet égard faire preuve d'initiative. Les épreuves des concours 2016 sont particulièrement à même de le préparer à ce genre de désagrément . . .

La question de la rédaction est évidemment cruciale. Le corrigé détaillé, tel que nous le proposons, est un modèle. Nous avons la faiblesse de penser qu'une copie reproduisant notre corrigé aurait systématiquement tous les points prévus au barème des épreuves concernés. Autrement dit, nos corrigés contiennent tout ce qu'il nous semble nécessaire de mettre et (presque) rien de ce qui nous paraît inutile. Ce n'est donc pas une succession d'éléments de démonstration.

Deux points de rédaction méritent d'être signalés : d'une part l'intitulé de la question n'a pas sa place dans une copie, d'autre part les objets ou hypothèses non introduits par l'énoncé doivent l'être par le candidat. Nous rappelons qu'en toute rigueur l'énoncé « Montrer que si A est vrai alors B l'est aussi » n'indique pas que A est supposé vrai. Il convient donc de commencer la réponse par « Supposons A vraie », à moins bien sûr que le candidat opte pour le raisonnement par contraposition. Dans le même ordre d'idée, si l'on doit montrer un énoncé du type « Pour tout x dans l'ensemble E la propriété $A(x)$ est vraie », alors on ne peut pas considérer que l'énoncé fixe un quelconque objet x . C'est donc au candidat de commencer sa réponse par une déclaration de type « Soit x dans E » s'il souhaite fixer un tel objet pour les besoins de sa démonstration.

Lorsqu'aïdé de son brouillon, le candidat a une idée assez nette de solution, il doit faire l'effort d'en mesurer rapidement la durée de rédaction. Si elle lui paraît élevée, quelque effort de réflexion supplémentaire n'est pas inutile pour tenter de simplifier la preuve avant de la coucher par écrit. Toutefois, il est contre-productif de passer trop de temps pour raffiner à l'extrême les démonstrations et leur rédaction. En écrivant cet ouvrage, nous avons essayé de nous mettre dans la peau d'un candidat réel et avons donc visé la plus grande efficacité possible, en traitant ces épreuves en temps limité dans les conditions normales de concours. Le lecteur ne sera donc pas étonné de ne pas systématiquement trouver ici la preuve la plus élégante pour une question donnée (même si nous espérons y être parvenu le plus souvent). Les commentaires qui suivent le corrigé évoquent parfois certaines pistes alternatives.

Chaque épreuve a ses propres notations. Il convient de s'y conformer. Par exemple, dans certains sujets les lois de probabilités sont notées P , dans

d'autre \mathbb{P} . Autant que possible, nous avons ici essayé de respecter les notations des énoncés d'origine, si bien que d'un corrigé à l'autre les notations changent. Néanmoins, les notations des corrigés sont tout à fait conformes à celles des énoncés auxquels ils répondent. Le candidat devra, le cas échéant, justifier toute déviation par rapport aux notations du problème, et avoir des arguments solides à proposer. Quant aux abréviations, nous conseillons vivement de n'en faire aucun usage à moins que l'énoncé le permette explicitement et spécifiquement.

Il va de soi que la présentation manuscrite ne prend pas la même forme que la présentation imprimée : dans le premier cas l'usage de l'encadré ou du souligné est à la fois légitime et vivement conseillé, à condition de faire preuve de parcimonie. On prendra alors soin d'encadrer des énoncés mathématiques complets et non des portions de ceux-ci : typiquement, on encadrera « $A = B$ » mais pas « $= B$ ». On encadrera systématiquement les résultats ne figurant pas dans l'énoncé.

La rédaction proposée ici est probablement trop littéraire pour un jour de concours, où les articulations logiques peuvent se limiter à des « donc » et des « or ». Cependant, la trame logique, l'appel des hypothèses, l'introduction des objets du discours lorsqu'ils ne sont pas fournis par l'énoncé (l'inévitable « Soit x »), la quantification précise des énoncés, la mise en évidence des conclusions doivent être respectés, et de ce point de vue le corrigé fourni n'en fait pas trop.

Reste à définir le degré de détail dans les démonstrations. Celui que nous proposons vise à être celui attendu par le jury suivant le concours concerné, plus une légère marge de sécurité. Notre point de vue a été celui que devrait avoir un candidat, à savoir adapter la minutie des arguments au niveau du concours visé et de la question traitée. Un exemple typique réside dans la rédaction des raisonnements par récurrence : dans la plupart des sujets ceux-ci sont tout à fait élémentaires, et par conséquent largement escamotés. En revanche, lors de la seconde épreuve des Concours Communs Polytechniques, nous avons soigneusement rédigé tous les raisonnements par récurrence, ce qui nous a semblé nécessaire par la brièveté de l'épreuve, la réputation de pointillisme de son jury d'écrit, et par le fait que le raisonnement par récurrence est systématiquement le point névralgique des questions concernées.

Le niveau de détail des solutions aux épreuves de Polytechnique est plus grand que dans celle en six heures de l'ÉNS Ulm. Cela ne signifie absolument pas que la rédaction est plus rigoureuse dans le premier cas que dans le second, mais que certaines vérifications banales sont faites dans celui-là, et pas dans celui-ci. Ces questions méritent une réflexion préalable, en liaison avec l'énoncé lui-même. Si celui-ci pose une question facile, il faut

généralement y répondre en détail, car à quoi sert-il de répondre à une question facile en disant que c'est évident ? En revanche, si une vérification du même ordre intervient au milieu d'une question ardue, s'en dispenser peut être acceptable à condition toutefois d'en signaler l'existence. Par ailleurs, lorsqu'une technique a déjà été utilisée par un candidat avec des justifications détaillées, il est non seulement possible mais parfaitement judicieux, lors des utilisations ultérieures de la même technique, d'accélérer la rédaction, à condition toutefois de faire référence à la question où la méthode a été mise en œuvre de manière soigneuse. En effet, un correcteur lit une copie dans son intégralité, et l'évaluation d'une réponse du candidat peut être influencée par ses réponses antérieures (voire ultérieures!).

Le candidat prendra garde au fait que cet ouvrage concerne exclusivement les épreuves de la filière MP : la rédaction des solutions y suit donc les règles du programme d'icelle. Un point particulier est la rédaction des changements de variable dans les intégrales : le programme de seconde année stipule en effet que, tant que le calcul est correct, il n'est pas nécessaire pour le candidat de rappeler les hypothèses générales du théorème si la fonction de changement de variable est *standard* (fonction puissance, fonction affine, logarithme, exponentielle). Le lecteur habitué à la pratique des anciens programmes ne doit donc pas s'étonner de ne nous voir indiquer qu'exceptionnellement que le changement de variable est bijectif et de classe \mathcal{C}^1 .

Le lecteur trouvera aussi dans cet ouvrage les épreuves corrigées d'informatique pour tous du concours de l'École Polytechnique et du concours Mines-Ponts.

Lors de la réforme des enseignements des classes préparatoires de 1995, l'École Polytechnique avait mis en place une épreuve spécifique d'informatique, sa volonté étant alors clairement de recruter des étudiants dotés d'une culture algorithmique minimale. Depuis deux ans maintenant, l'informatique est également évaluée à tous les concours d'admission dans les écoles d'ingénieurs (parfois au sein des épreuves de mathématiques), répondant, d'une part, à une volonté nationale d'affirmer l'importance d'une formation à la science informatique, d'autre part, aux besoins des écoles et des universités et, par voie de conséquence, à ceux des entreprises.

La résolution de nombreux problèmes d'ingénierie requiert l'usage raisonné de l'informatique. Des algorithmes doivent être construits. Leur efficacité et leur performance doivent être évaluées. Des structures de données pertinentes doivent être adoptées. Ces compétences sont celles que tout ingénieur ou chercheur doit acquérir. Elles sont aujourd'hui très largement évaluées dans les épreuves de concours.

Ce recueil de problèmes présente deux sujets posés à des concours d'admission dans les écoles d'ingénieurs, à l'École Polytechnique et au concours Mines-Ponts. Les étudiants trouveront dans le recueil PSI et le recueil PC

le sujet du concours Centrale-SupÉlec (commun à toutes les filières). Nous formulons le souhait que les solutions proposées apportent aux étudiants toute l'aide qu'ils peuvent attendre d'un corrigé en gardant à l'esprit qu'il convient de se former aux modes de pensée informatique au-delà de toute technicité en matière de programmation. Comme Michael R. Fellows et Ian Parberry l'ont écrit, l'informatique n'est pas plus la science des ordinateurs que l'astronomie n'est celle des télescopes. L'informatique est donc une science. Nous espérons que ce livre aidera les étudiants à en prendre conscience.

Qu'il nous soit permis de remercier chaleureusement les professeurs de Mathématiques de la filière MPSI/MP du Lycée Sainte-Geneviève : Michel Colin, Christophe Lafitte, Frédéric Morlot, François Moulin et Jean Nougayrède. Leur relecture attentive et avisée des chapitres de l'ouvrage a contribué de manière décisive à la qualité de celui-ci.

Nous remercions plus spécialement François Moulin pour son assistance technique sur la mise en page du livre, Quentin Guignard, qui nous a prêté main forte pour achever notre solution de la dernière question du second problème du Concours Centrale-Supelec (nous admettons de manière pénaude avoir été incapables, après plus d'une heure de recherche, de résoudre intégralement cette dernière), et enfin Nicolas Tosel, dont la grande culture a permis d'enrichir la mise en perspective des épreuves.

L'auteur tient enfin à remercier son épouse et ses beaux-parents, qui lui ont permis de réaliser le premier jet de l'ouvrage dans des conditions idéales, à l'ombre du soleil languedocien.

Rédaction achevée le 30 juin 2016,
à Versailles.

Clément de Seguins Pazzis