Avant-Propos

Ce livre s'est construit au cours d'une dizaine années d'enseignement dans le cadre de la préparation à l'agrégation interne de mathématiques de l'université Paris Diderot — après plusieurs années passées dans le jury de ce concours, ainsi qu'à celui de l'agrégation externe.

Ce volume fait partie d'un diptyque. Les thèmes abordés ici couvrent une bonne partie du programme d'algèbre et de géométrie du concours : ce sont essentiellement ceux que j'ai enseignés au cours des années — avec relativement peu de géométrie. On y traite des notions d'algèbre fondamentale, les polynômes compris. Dans une deuxième partie, on s'étend sur l'algèbre linéaire et quadratique, avec une incursion relativement courte ou timide en géométrie affine et euclidienne. L'autre volume est consacré à l'analyse.

Je me suis efforcé à donner un point de vue très classique, en suivant de relativement près le programme officiel. Je ne me suis permis que deux ou trois excursions un peu loin du programme de l'agrégation interne, en particulier un développement rapide sur le théorème de séparation de Hahn-Banach (chapitre X)... Pour le reste, je suis resté dans les limites du programme actuel de l'agrégation interne.

Pour garder au livre une taille raisonnable, beaucoup de démonstrations sont omises. J'ai laissé de côté certaines qui me semblaient plus faciles — ou plus faciles à trouver dans d'autres ouvrages, en particulier ceux en direction de la licence ou des CPGE. Dans les parties les plus élémentaires, on se contente d'énoncer des résultats de base —juste un plan relativement sommaire. Dans certains autres cas, j'ai choisi de donner des démonstrations rapides, en n'insistant que sur les arguments les plus cruciaux.

Certaines démonstrations, comme certaines parties, sont plus détaillées. Cela provient certainement d'un choix personnel. Cependant, le plus souvent, cela provient d'une demande des auditeurs de nos cours.

Le livre contient de nombreux exercices avec des solutions, quelquefois succinctes, mais complètes. Les exercices proposés sont pour la plupart classiques, même si certaines solutions m'ont semblé plus directes ou plus éclairantes que des solutions que l'on trouve ailleurs. Si quelques exercices du livre sont des exercices d'entraînement, la plupart sont assez consistants pour pouvoir être proposés comme « développement » dans une épreuve d'exposé et surtout pour l'épreuve d'exercices. Plusieurs d'entre eux sont beaucoup trop longs pour être proposés en entier à un oral du concours. Les dernières questions servent dans ce cas à approfondir l'exercice.

La difficulté des exercices se veut relativement variée pour permettre à chacun de choisir le niveau où il souhaite se placer. J'ai signalé quelques-uns des exercices les plus difficiles par un symbole (*).

Ce que l'on demande aux agrégatifs est de faire des liens entre des nombreuses notions de mathématiques du programme. Ce livre n'est donc pas conçu pour être lu de façon linéaire. Il est plutôt destiné à servir durant les trois heures que dure la préparation d'un sujet d'oral que l'on vient de tirer au hasard le jour du concours. De ce fait, plusieurs exercices, et aussi des démonstrations, voire des énoncés du cours, font appel à des notions introduites plus loin dans le texte. On n'a pas non plus craint les répétitions des hypothèses.

Le lecteur sera peut-être un peu déçu de ne pas trouver de bibliographie en fin de volume. Mon principal conseil à nos agrégatifs a toujours été de se tourner, chacun, vers les livres fréquentés pendant les années d'études.

Remerciements

Je remercie toute l'équipe d'enseignants qui, au fil des ans, a partagé avec moi les cours de la préparation : Daniel Bennequin, Gentiana Danila, Romain Dujardin, Catherine Gille, David Hermann, Thierry Meyre et Rached Mneimné. J'ai utilisé plusieurs exercices qu'ils ont proposés. Une mention spéciale pour Gentiana et Catherine, qui ont suivi le « poly d'algèbre » et m'ont fait corriger une multitude de coquilles et autres erreurs. Il ne faut pas non plus oublier Frédéric Han et Pascal, Molin qui ont organisé des séances de TP machine pour nos stagiaires, et les nombreux collègues qui nous ont donné un coup de main pour les oraux blancs, et en particulier Julie Deserti, avec qui j'ai assuré plusieurs oraux blancs...

Je remercie Jean-François Mestre, qui m'a soufflé, presque à son insu, de nombreux exercices.

Je ne pourrai citer ici tous les stagiaires de notre formation depuis dix ans. Presque tous ont contribué, par leurs questions, leurs remarques et conseils, à améliorer, directement ou indirectement, le manuscrit. En premier lieu, je tiens à remercier Muriel Leduc. Cet ouvrage est parti d'un projet de livre en commun avec elle. Parmi ceux qui m'ont le plus aidé et encouragé en relevant soigneusement ligne après lignes les petites ou grandes erreurs qui s'étaient glissées ou en m'incitant à ajouter des explications supplémentaires, citons Julien Baldacci, Boris Bertin, Nicolas Biehler, Charlotte Boudier, Jessica Brisac, Florence Caruana, Stéphanie Colin, Pascale Creuse, Cécile Damongeot, Jennifer Dapilly, Angélique Di Benedetto, Catherine Durieu, Anaïs Goëau, Mehdi Hanebali, Marie Joubert, Harun Karagoz, Julien Nicolas, Clotilde Pegeot, Éléonore Petit, Nicolas Poulain, Philippe Raynaud, Stéphanie Rondeau, Fabien Sommier, Élisabeth Thoyon... et j'en oublie...

Un grand merci à Alain Debreil pour son aide précieuse.

Table des matières

Deuxième partie.– Algèbre linéaire 137

X. Géométrie affine en dimension finie