Im-et-Ker

101. — Les clefs pour l'X. Bernard Randé & Franck Taïeb
102. — Les clefs pour l'X (2). Roger Mansuy & Bernard Randé
103. — Les clefs pour les Mines. FranCcoise Fontanez & Bernard Randé
104. — Problèmes clefs pour mathématiques supérieures. Hervé Gianella, Romain Krust, Franck Taïeb & Nicolas Tosel
105. — Les clefs pour la PSI et la PSI*. Roger Mansuy & Bernard Randé
106. — Une année de colles en Math Sup MPSI. Éric Kouris
107. — Les clefs pour les Hautes Études Commerciales. Philippe Gallic & Jean-Louis Grappin
108. — Le jardin d'Eiden. Une année de colles en MP*. Jean-Denis Eiden
109. — Un Max de Maths. Maxime Zavidovique
110. — Mathématiques pour la voie économique et commerciale. Jérôme Gärtner
111. — Probabilités. Cours et exercices corrigés (1). Thierry Meyre
112. — Les clefs pour l'écrit MP de mathématiques (session 2015). Bernard Randé, Alix Deleporte-Dumont, Quentin Guignard
113. — Les clefs pour l'oral MP de mathématiques, X-ENS (session 2015). Quentin Guignard, Bernard Randé
114. — Les clefs pour l'écrit de mathématiques des concours 2016, filière MP. Clément de Seguins Pazzis
115. — Les clefs pour l'Info. Ismael Belghiti, Roger Mansuy & Jill-Jênn Vie
116. — Les nouvelles clefs pour les Mines-CCP (tome I). Oral MP, 2015-16. Bernard Randé
117. — Agrégation interne. Algèbre générale, algèbre linéaire et un peu de géométrie. Georges Skandalis
118. — Florilège d'exercices de l'oral HEC, par jean-louis Roque

Florilège d'exercices de l'oral HEC

voie scientifique

par jean-louis Roque

Ancien élève de l'École normale supérieure
External lecturer at Essec Business School

Calvage & Mounet

Jean-Louis Roque, ancien élève de l'École normale supérieure, a commencé sa « carrière » de façon plutôt atypique. Après avoir été « remercié » par l'enseignement secondaire à la fin du collège, il a poursuivi dans l'enseignement technique au lycée Déodat de Séverac, à Toulouse, où il a obtenu « haut la main » un CAP de fonderie, de tournage, de fraisage, d'étau-limeur et d'électrotechnique. Il serait sûrement trop long d'expliquer comment, quelques années plus tard, il devenait agrégé et docteur de troisième cycle en Mathématique. Après une dizaine d'années de recherche auprès de Marie-Paule Malliavin, il a enseigné en classe préparatoire au Haut Enseignement Commercial, au lycée Pasteur de Neuilly-sur-Seine. Comme quoi, il ne faut jamais désespérer...

jl.roque@me.com

Tableau de couverture : Pascale Roque

Graphiques du texte : Justin Roque

Couverture : Alice Lebreton

ISBN 978-2-916352-62-6

9 782916 352626

∞ Imprimé sur papier permanent

Avertissement de l'auteur

à Camille, Capucine, Justin, Pascale et à mes parents

Ce manuel contient les énoncés et les corrections détaillées d'une sélection de vingt-neuf exercices et vingt-neuf *quickies*, gentiment transmis par Claude Menendian, et posés à l'oral de l'école des Hautes Études Commerciales des années 2014, 2015 et 2016.

L'oral s'articule de la façon suivante :

▷ le candidat prépare un exercice pendant trente minutes ;

▷ il se rend ensuite dans la salle d'interrogation où il expose l'exercice préparé à un jury constitué de deux examinateurs pendant une durée variant entre vingt et vingt-cinq minutes ;

▷ le jury pose alors, à froid, une question sur un tout autre thème — c'est la fameuse question sans préparation ou question courte ou *quicky* — , cette seconde partie durant une petite dizaine de minutes.

Voici maintenant un certain nombre de précisions qui doivent amener le candidat à affiner sa préparation.

Il est important de savoir que l'un des deux exercices, celui que l'on prépare ou la question courte, contient obligatoirement des questions de probabilités et/ou de statistiques.

La première question de l'exercice préparé est systématiquement une question de cours, d'où l'importance de bien maîtriser ce dernier parce que c'est sur ce point purement scolaire que le jury va forger sa première impression… En outre, et c'est une nouveauté de ces dernières années, on commence à y demander quelques démonstrations.

Les questions d'algorithmique et de Scilab sont rares, mais possibles.

Les questions très calculatoires sont plus fréquentes qu'on ne pourrait le penser.

Comme le lecteur pourra aisément le constater en parcourant cet ouvrage, les difficultés sont assez disparates et, compte tenu de ce que nous venons de dire, le calcul des probabilités et la statistique inférentielle y tiennent une place non négligeable.

Comme d'habitude, nous recommandons aux futurs candidats de suivre les quelques conseils suivants.

1. Prendre quelques minutes au début de la préparation pour lire, en totalité, l'énoncé en vue de :

▷ découvrir, tout d'abord, les thèmes abordés ;

▷ repérer, c'est toujours bon pour le moral, certaines questions que l'on a déjà rencontrées auparavant. Il n'est pas interdit d'avoir vécu !

2. Ne pas s'obstiner à vouloir traiter dans l'ordre toutes les questions. Ne pas perdre trop de temps à « sécher » sur une question. Le passage aux questions suivantes donne souvent des pistes à propos des questions précédentes.

3. Réussir impérativement les questions calculatoires pendant sa demi-heure de préparation. Pour prendre quelques exemples, il est très difficile de mener à bien, au tableau, un pivot sur une matrice $(3,3)$, ou pire $(4,4)$, de mener à bien également une étude de fonction un peu « bourrine », lorsque les examinateurs vous reprennent à la moindre étourderie et vous somment d'en terminer rapidement !

4. Avoir une rigueur intellectuelle et mathématique à toute épreuve. Il faut être le premier convaincu par ce que l'on dit. Il ne faut pas oublier de distinguer les éventuels cas et les situations particulières. Il y a souvent des « facettes » dans nos travaux. Il faut également bannir les fautes grossières — divisions par zéro, manipulations diaboliques des inégalités, atrocités avec les variables muettes — grandes spécialités des gougnafiers. Attention également au *bluff* qui est fortement sanctionné.

5. Éviter les abréviations. Il faut parler un français pas nécessairement châtié mais correct.

6. Il faut enfin ne pas perdre de vue qu'il s'agit d'une épreuve orale. Il faut donc conseillé d'écrire le minimum de choses au tableau — les essentielles pour ne pas les nommer — et de véhiculer oralement le maximum d'arguments en regardant les examinateurs dans le blanc des yeux ! Éviter d'effacer trop rapidement des choses précieuses. Les tableaux sont grands, profitez-en !

7. Nous précisons que nous avons volontairement laissé les *sujets* des exercices comme ils nous ont étés originellement transmis, avec leurs rares faiblesses, et cela nous vaudra quelques commentaires parfois cinglants !

Nous vous souhaitons un bon et agréable travail.

Adishatz !

Margauchamfont, 25 avril 2017.

jean-louis Roque

Exercice 1

Les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{p})$.

1. Question de cours.– Définition de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires.

2. Dans cette question, on note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et Φ la fonction de répartition de Z.

Pour tout réel θ, on note P_θ la loi de la variable aléatoire $Y_\theta = (Z+\theta)^2$.

a. Exprimer la fonction de répartition de Y_θ en fonction de Φ.

b. La variable Y_θ possède-t-elle une densité ?

c. Reconnaître la loi P_0.

d. Montrer que pour tout $\theta \geqslant 0$, les lois P_θ et $P_{-\theta}$ sont identiques.

3.a. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs positives ou nulles. Établir, pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, l'inégalité

$$\mathrm{p}\big(\big|\sqrt{X} - a\big| \geqslant b\big) \leqslant \mathrm{p}\big(\big|X - a^2\big| \geqslant ab\big).$$

b. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente d'estimateurs d'un paramètre positif inconnu θ, ne prenant tous que des valeurs positives ou nulles. Déduire de la question précédente que la suite $\big(\sqrt{T_n}\,\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente d'estimateurs du paramètre $\sqrt{\theta}$.

4. Dans cette question, θ désigne un paramètre positif inconnu et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune P_θ définie dans la question 2.

a. Trouver une suite d'estimateurs sans biais $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \big(\varphi_n(X_1,\ldots,X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ du paramètre θ^2.

b. En déduire une suite convergente d'estimateurs du paramètre θ. Sont-ils sans biais ?

$\boxed{\text{EURÊKA !}}$

1. DÉFINITION

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{p})$ *un espace probabilisé. Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles définies sur cet espace et* X *une variable aléatoire réelle également définie sur ce même espace. On dit que la suite* (X_n) *converge en probabilité vers* X *si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathrm{p}\big(|X_n - X| > \epsilon\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On écrit alors

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} X.$$

Il est facile de voir que cette définition peut également et largement *se traduire par*

$$\forall\epsilon > 0, \quad \mathrm{p}\big(|X_n - X| \geqslant \epsilon\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

2.a. Soit θ et x deux réels. Nous avons élémentairement

$$\big[Y_\theta \leqslant x\big] = \begin{cases} \varnothing & \text{si} \quad x < 0, \\ \big[-\sqrt{x} - \theta \leqslant Z \leqslant \sqrt{x} - \theta\big] & \text{si} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Comme Z ne charge *normalement* rien sur son passage, nous en déduisons que

$$F_{Y_\theta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ \Phi\big(\sqrt{x} - \theta\big) - \Phi\big(-\sqrt{x} - \theta\big) & \text{si} \quad x \geqslant 0, \end{cases}$$

que nous préférons facetter adroitement et de façon équivalente en

$$F_{Y_\theta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0, \\ \Phi\big(\sqrt{x} - \theta\big) - \Phi\big(-\sqrt{x} - \theta\big) & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$$

parce que nous le voulons bien !

Nous peaufinons enfin l'expression de notre répartition grâce à la célèbre propriété fonctionnelle(*) de la fonction Φ, à telle enseigne qu'*in fine*

$$F_{Y_\theta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0, \\ \Phi\big(\sqrt{x} - \theta\big) + \Phi\big(\sqrt{x} + \theta\big) - 1 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases} \tag{1}$$

b. Il est bien connu que la fonction Φ de Gauss est de très grande classe sur $\mathbb{R}$, pour ne pas dire carrément de classe $\mathcal{C}^\infty$ et il résulte des théorèmes généraux que F_{Y_θ} est déjà de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ puisque c'est assurément le cas de la fonction « racine carrée » sur $\mathbb{R}_+^*$. En outre, au vu et au su du premier cas de notre *seconde* présentation, la répartition de Y_θ est continue à *gauche* en zéro.

Les fonctions de répartition étant universellement partout continues à droite, il ne nous en faut pas plus pour clamer que :

- ▷ la fonction F_{Y_θ} est continue sur $\mathbb{R}$;
- ▷ la fonction F_{Y_θ} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.

Alors oui, la variable aléatoire Y_θ possède bel et bien une densité.

c. Dans le cas particulier $\theta = 0$, la récente expression (1) devient tout simplement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_{Y_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0, \\ 2\Phi\big(\sqrt{x}\big) - 1 & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$$

(*) Fameuse identité selon laquelle $\Phi(-s) = 1 - \Phi(s)$ pour tous les réels s.

et il s'ensuit quasi mentalement qu'une densité de Y_0 est la fonction f_{Y_0} définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_{Y_0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0, \\ \dfrac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}} & \text{si} \quad t > 0, \end{cases}$$

puisque nous sommes supposés maîtriser les finesses de la dérivation. Pour faciliter la reconnaissance, nous lui préférons le nouveau *look*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_{Y_0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0, \\ \dfrac{t^{-1/2}e^{-t/2}}{2^{1/2}\sqrt{\pi}} & \text{si} \quad t > 0, \end{cases}$$

qui permet au *physio* de tonitruer

$$Y_0 \hookrightarrow \Gamma\Big(2\,,\frac{1}{2}\Big),$$

puisque nul ne peut ignorer la fameuse égalité

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}.$$

↱ Cette loi est bien connue des statisticiens. Elle s'appelle loi du *khi-deux* à un degré de liberté et son logo est

$$\chi^2(1).$$

↱ Autre chose, comme les lois Gamma à deux paramètres semblent avoir disparu des écrans, nous apportons la précision suivante. Si θ et r sont deux réels strictement positifs, on dit qu'une variable aléatoire U suit la loi $\Gamma(\theta, r)$ si

$$\frac{U}{\theta} \hookrightarrow \gamma(r).$$

Cette remarque s'appliquera à nouveau quelques lignes plus loin.

d. Soit θ un réel positif. Nous ne dirons rien de plus que « *no comment* » puisque l'expression (1) *supra* et nos mirettes nous murmurent à l'oreille l'égalité

$$F_{Y_\theta} = F_{Y_{-\theta}},$$

et que les lois de probabilités sont *caractérisées* par les fonctions de répartition correspondantes.

$3.a$. Soit a, b et u trois réels positifs. Grâce à une importante identité du *teenager*, nous avons

$$\left|u - a^2\right| = \left|\sqrt{u} - a\right| \times \left|\sqrt{u} + a\right|,$$

d'où il ressort *hyperpositivement* que

$$\left|u - a^2\right| \geqslant a\left|\sqrt{u} - a\right|.$$

Comme X est à valeurs positives, on en déduit mentalement l'inclusion événementielle

$$\Big[\left|\sqrt{X} - a\right| \geqslant b\Big] \subset \Big[\left|X - a^2\right| \geqslant ab\Big],$$

et comme la probabilité est un opérateur croissant...

b. Nous allons momentanément quitter le cadre *stateux* pour nous concentrer sur une suite (U_n) de variables aléatoires positives convergeant en probabilité vers une constante positive c, et notre destinée est alors d'établir que

$$\sqrt{U_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sqrt{c}.$$

Soit donc $\epsilon > 0, n \in \mathbb{N}^*$ et organisons-nous de façon urgente.

▹ Si $c > 0$, la précédente inégalité entraîne

$$0 \leqslant \mathrm{p}\big(|\sqrt{U}_n - \sqrt{c}\,| \geqslant \epsilon\big) \leqslant \mathrm{p}\big(|U_n - c\,| \geqslant c\,\epsilon\big),$$

et nous savons par hypothèse que

$$\mathrm{p}\big(|U_n - c\,| \geqslant c\,\epsilon\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

puisque la suite (X_n) converge en probabilité vers c et que le produit $c\,\epsilon$ est ici *strictement* positif. Il en résulte *by squeeze* que

$$\mathrm{p}\big(|\sqrt{U}_n - \sqrt{c}\,| \geqslant \epsilon\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et tout le monde est ravi.

▹ Si c est nul, la situation est assez différente d'autant que l'inégalité du $3.a$ n'est plus du tout opérationnelle. Il est cependant facile de justifier que

$$0 \leqslant \mathrm{p}\big(|\sqrt{U}_n| \geqslant \epsilon\big) \leqslant \mathrm{p}\big(|U_n| \geqslant \epsilon^2\big),$$

les valeurs absolues étant par ailleurs jetables (à la corbeille), et de conclure à nouveau par *squeeze*.

↱ Nous venons, dans le cas de la fonction « racine carrée », de *démontrer* un des aspects du théorème de la fonction continue. Ce théorème figure depuis 2015 dans le programme officiel, mais sous forme admise...

Nous pouvons maintenant rejoindre le camp de l'inférence en annonçant $\theta \in \mathbb{R}_+$. Il est dit par hypothèse que

$$T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}_\theta} \theta,$$

et nous venons d'en déduire que

$$\sqrt{T_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}_\theta} \sqrt{\theta}.$$

So...

4. Soit à nouveau Z une variable normale centrée réduite. Il est dit que la variable X_1 admet la même loi que

$$(Z+\theta)^2,$$

si bien que la variable X_1 possède une variance, la raison essentielle étant que les variables gaussiennes sont largement réputées pour possèder tous les moments du monde. Nous gardons au chaud ces précieuses informations.

a. Étant donné que le *teenager* nous rappelle que

$$(Z+\theta)^2 = Z^2 + 2\theta Z + \theta^2,$$

le lecteur devrait rapidement — et linéairement ! — se convaincre de ce que

$$\mathsf{E}_\theta(X_1) = 1 + \theta^2,$$

les moments — du moins les premiers — de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ étant connus comme *the white wolf*.

Compte tenu de ce qui mijote quelques lignes plus haut, il a été vu en classe que la suite

$$\left(\overline{X}_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*},$$

des moyennes empiriques est une suite convergente d'estimateurs sans biais du paramètre

$$1+\theta^2,$$

et l'on en déduit quasi mentalement que la suite

$$(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*},$$

où,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad T_n = \overline{X}_n - 1,$$

est une suite convergente d'estimateurs sans biais du paramètre θ^2.

b. Tout le monde est alors tenté de se tourner vers la question $3.b$, mais il y a un obstacle de taille : les estimateurs T_n que nous venons de mettre en avant n'ont aucune raison de prendre des valeurs positives ou nulles. Voici alors un petit lemme probabiliste qui pourrait nous enlever l'épine du pied.

LEMME DE CONVERGENCE DU TRANSFERT ABSOLU

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{p})$ un espace probabilisé, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur cet espace et U un aléa numérique également défini sur notre espace. On a l'implication :

$$U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} U \quad\Rightarrow\quad |U_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} |U|.$$

La preuve se fait quasi mentalement *via* l'une des versions de l'inégalité du triangle, grâce à laquelle nous avons

$$\big||U_n| - |U|\big| \leqslant |U_n - U|.$$

Le réel strictement positif ϵ étant alors donné, il s'avère transitivement que

$$\Big[\big||U_n| - |U|\big| > \epsilon\Big] \subset \big[\,|U_n - U| > \epsilon\big],$$

inclusion qui, selon une classique croissance, induit l'encadrement

$$0 \leqslant \mathsf{p}\Big[\big||U_n| - |U|\big| > \epsilon\Big] \leqslant \mathsf{p}\big[\,|U_n - U| > \epsilon\big].$$

Le *squeezing process* se charge désormais de terminer l'affaire.

↱ Comme nous l'avons déjà signalé, le nouveau programme 2015 inclut le grand théorème de la fonction continue, qui raconte que, pour toute fonction continue f sur un domaine *ad hoc*, on a :

$$U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} U \quad \Rightarrow \quad f(U_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} f(U).$$

Ce bien bel outil est officiellement admis — dans le cas général sa preuve n'est pas si commode — mais nous l'avons *démontré supra* dans le cas de la « racine carrée » et ici dans celui de la « valeur absolue ».

Grâce à ce lemme, il est maintenant acquis que $\big(|T_n|\big)$ est une suite convergente estimant encore θ^2, et la question $3.b$ arrive à point nommé en assurant que $\big(\sqrt{|T_n|}\,\big)$ est une suite convergente d'estimateurs de θ puisque ce dernier est positif...

Il reste à répondre à la question de l'éventuel « non biaisage ». Si tel était le cas, nous devrions avoir

$$\forall\theta \geqslant 0, \qquad \mathsf{E}_\theta\big(\sqrt{|T_n|}\,\big) = \theta,$$

et, en particulier,

$$\mathsf{E}_0\big(\sqrt{|T_n|}\,\big) = 0, \quad i.e. \quad \mathsf{E}_0\Big(\sqrt{|\,\overline{X}_n - 1|}\,\Big) = 0.$$

Or, depuis un récent c, la loi P_0 est la distribution

$$\Gamma\Big(2\,,\frac{1}{2}\Big),$$

et grâce aux sublimes propriétés de la loi gamma — stabilité, homothétie, ... — il est très facile de découvrir que

$$\overline{X}_n \hookrightarrow \Gamma\Big(\frac{2}{n}\,,\frac{n}{2}\Big).$$

Dans ces conditions, et selon le théorème de transfert, l'intégrale qui gère l'espérance

$$\mathsf{E}_0\Big(\sqrt{|\,\overline{X}_n - 1|}\,\Big),$$

à savoir

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{|t-1|} \times \frac{t^{\frac{n}{2}-1} e^{-nt/2}}{(2/n)^{n/2}\,\Gamma(n/2)} dt,$$

souffre peu de problème existentiel — un t^2-*shot* en vient aisément à bout — et, conformément au théorème de stricte positivité, elle a bien l'air d'être *strictement* positive. En conséquence et en ce qui concerne le côté *unbiased*, on peut définitivement oublier. . .

Quicky 1

1. Montrer que la matrice réelle

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}$$

est diagonalisable si, et seulement si, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

est diagonalisable.

2. Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et soit D une droite vectorielle stable par f.

a. Montrer que D admet un supplémentaire stable par f.

b. Montrer que si P est un supplémentaire de D stable par l'endomorphisme f, la restriction de f à P définit un endomorphisme diagonalisable de P.

EURÊKA !

1. Nous nous permettons de rappeler une condition nécessaire et suffisante qui va très bientôt être au cœur de nos plus profonds débats.

CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE DE LA BASE PROPRE

Soit n un entier naturel non nul et soit H une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors, la matrice H est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de l'espace vectoriel $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de H.

Remarquons également, à la lecture de la matrice M, que le vecteur

$$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

est, quoi qu'il arrive, un vecteur propre de M, attaché d'ailleurs à la valeur propre 0.

Nous pouvons désormais attaquer l'affaire et comme il semble que nous ayons affaire à un authentique « si, et seulement si », c'est naturellement en deux temps que nous nous organisons.