Im-et-Ker

101. — Les clefs pour l'X. Bernard Randé & Franck Taïeb
102. — Les clefs pour l'X (2). Roger Mansuy & Bernard Randé
103. — Les clefs pour les Mines. Françoise Fontanez & Bernard Randé
104. — Problèmes clefs pour mathématiques supérieures. Hervé Gianella, Romain Krust, Franck Taïeb & Nicolas Tosel
105. — Les clefs pour la PSI et la PSI*. Roger Mansuy & Bernard Randé
106. — Une année de colles en Math Sup MPSI. Éric Kouris
107. — Les clefs pour les Hautes Études Commerciales. Philippe Gallic & Jean-Louis Grappin
108. — Le jardin d'Eiden. Une année de colles en MP*. Jean-Denis Eiden
109. — Un Max de Maths. Maxime Zavidovique
110. — Mathématiques pour la voie économique et commerciale. Jérôme Gärtner
111. — Probabilités. Cours et exercices corrigés (1). Thierry Meyre
112. — Les clefs pour l'écrit MP de mathématiques (session 2015). Bernard Randé, Alix Deleporte-Dumont, Quentin Guignard
113. — Les clefs pour l'oral MP de mathématiques, X-ENS (session 2015). Quentin Guignard, Bernard Randé
114. — Les clefs pour l'écrit de mathématiques des concours 2016, filière MP. Clément de Seguins Pazzis
115. — Les clefs pour l'Info. Ismael Belghiti, Roger Mansuy & Jill-Jênn Vie
116. — Les nouvelles clefs pour les Mines MP (tome I). Bernard Randé
117. — Les clefs pour l'écrit de mathématiques des concours 2016, filière PSI.

**Lionel Cozar, Nicolas Jousse, Bernard Randé,
Laurent Sartre**

Clefs pour l'écrit de mathématiques et d'informatique

Intégralité des concours 2016 et deux épreuves de 2015, filière PSI

Calvage & Mounet

Lionel Cozar est professeur agrégé en classes préparatoires depuis 20 ans. Actuellement en charge d'une classe de PSI, il enseigne aussi en option informatique.

Nicolas Jousse est professeur agrégé et docteur en mathématiques. Il enseigne les mathématiques et l'informatique en classe de mathématiques spéciales PC au lycée Michel Montaigne à Bordeaux.

Bernard Randé a été professeur en classes préparatoires durant de longues années. Il est agrégé, docteur en mathématiques, et auteurs de nombreux ouvrages aux éditions Calvage et Mounet, mais aussi Cassini et Vuibert. Il est membre du comité de rédaction de la RMS.

Laurent Sartre est professeur agrégé de physique et enseigne l'informatique en classes préparatoires scientifiques au lycée Montaigne de Bordeaux. Membre du comité de l'UPS, il participe activement à la mise en place de l'enseignement d'informatique en classes préparatoires.

∞ Imprimé sur papier permanent

aux élèves

Préface

La session 2016 des concours de la filière PSI, comme d'ailleurs des autres filières, est la deuxième à s'appuyer sur les « nouveaux » programmes des classes préparatoires, eux-mêmes dans la continuité des programmes modifiés du lycée. C'est dire si l'ampleur des changements de contenu vient de loin.

À l'analyse, les conséquences de ce changement de programme sont moindres que celles que l'on aurait pu attendre, à l'exception notable de la présence des probabilités, qui sont présentes dans sept des dix épreuves de mathématiques traitées dans cet ouvrage. Les probabilités semblent d'ailleurs être une discipline presque obligée pour les concepteurs d'épreuve.

Revenons sur les épreuves corrigées dans ce recueil. Tout d'abord, le lecteur y trouvera l'intégralité des épreuves de mathématiques 2016 de la filière PSI dans les principaux concours : Polytechnique-ENS de Cachan, Mines-Ponts, Centrale-SupElec, CCP, E3A. De même, y sont présentées les épreuves d'informatique pour tous 2016 de ces différents concours, quand elles existent. On notera que l'informatique pour tous fait (aussi) partie d'une épreuve de mathématiques dans les concours Centrale, CCP et E3A.

À ces épreuves, nous avons ajouté deux épreuves de la session 2015 : l'épreuve II de mathématiques du concours des Mines, et l'épreuve I de mathématiques du concours Centrale-SupElec. Ces deux épreuves présentent en effet un intérêt particulier pour la préparation aux concours, la première parce qu'elle constitue une bonne révision du programme d'algèbre linéaire, la seconde en raison de son intérêt mathématique et de sa vue d'ensemble, à la fois sur le programme d'analyse de première année et sur les probabilités.

Globalement, on peut décerner à ces épreuves un satisfecit quant à la conformité au programme. On n'y trouve que peu d'erreurs sérieuses. En revanche, le niveau de difficulté et d'intérêt mathématique varie considérablement selon les épreuves. L'épreuve de Polytechnique-Cachan 2016 traite certes d'un sujet intéressant d'algèbre linéaire (le lemme de Farkas) mais n'utilise que des produits matriciels et, d'autre part, contient un pic de difficulté vers la fin, pic d'autant plus inattendu que l'énoncé laisse au candidat le soin de reconstituer la trame logique du problème. Le sujet Mines-Ponts 2016, lui aussi d'algèbre linéaire, est intéressant et, quoiqu'un peu obscur sans doute pour le candidat, bien progressif. Le sujet Centrale-SupElec I 2016 est d'une qualité assez analogue. La palme de la qualité revient probablement au sujet Centrale-SupElec II 2016, dans le domaine de l'analyse cette fois.

Lors de la réforme des enseignements des classes préparatoires de 1995, l'École Polytechnique avait mis en place une épreuve spécifique d'informatique, sa volonté étant alors clairement de recruter des étudiants dotés d'une culture algorithmique minimale. Depuis deux ans maintenant, l'informatique est également évaluée à tous les concours d'admission dans les écoles d'ingénieur (parfois au sein des épreuves de mathématiques), répondant, d'une part, à une volonté nationale d'affirmer l'importance d'une formation à la science informatique, d'autre part, aux besoins des écoles et des universités et, par voie de conséquence, à ceux des entreprises.

La résolution de nombreux problèmes d'ingénierie requiert l'usage raisonné de l'informatique. Des algorithmes doivent être construits. Leur efficacité et leur performance doivent être évaluées. Des structures de données pertinentes doivent être adoptées. Ces compétences sont celles que tout ingénieur ou chercheur doit acquérir. Elles sont aujourd'hui très largement évaluées dans les épreuves de concours.

Ce recueil de problèmes présente deux sujets posés à des concours d'admission dans les écoles d'ingénieur, à l'École Polytechnique et au concours Mines-Ponts. Les étudiants trouveront dans le recueil PSI et le recueil PC le sujet du concours Centrale-SupElec (commun à toutes les filières). Nous formulons le souhait que les solutions proposées apportent aux étudiants toute l'aide qu'ils peuvent attendre d'un corrigé en gardant à l'esprit qu'il convient de se former aux modes de pensée informatique au-delà de toute technicité en matière de programmation. Comme Michael R. Fellows et Ian Parberry l'ont écrit, l'informatique n'est pas plus la science des ordinateurs que l'astronomie n'est celle des télescopes. L'informatique est donc une science. Nous espérons que ce livre aidera les étudiants à en prendre conscience.

Les énoncés fournis dans cet ouvrage sont essentiellement les énoncés originaux, à cette réserve près qu'ils ont été modifiés pour des raisons typographiques, ce qui est véniel, mais aussi, dans certains cas, pour des raisons plus profondes. Détaillons. Nous avons pensé, en vue d'une correction par le professeur, que la numérotation des questions était plus agréable si elle suivait un ordre croissant dans tout l'énoncé (sans avoir égard à la partie à laquelle elle appartient). Nous avons donc souvent renuméroté les questions.

Pour la même raison, nous avons parfois subdivisé certaines questions en sous-questions, afin d'éviter la difficulté à noter une question globale attendant plusieurs réponses. D'autre part, nous avons modifié stylistiquement certaines questions : on nous pardonnera ces névroses d'auteur. Sur le fond, il nous est arrivé de modifier assez profondément certaines questions, essentiellement lorsque s'y trouvait une ambiguïté ou une erreur. Nous avons étendu cette faculté de modification à deux autres cas : celui où une question nous a semblé trop difficile ou trop technique, et nous l'avons alors guidée ou détaillée, et celui où l'énoncé ne mettait pas assez en lumière à nos yeux le processus de compréhension. Ajoutons que, dans de rares cas, nous avons ajouté une ou deux questions prolongeant naturellement celles effectivement posées. Ces modifications sont expliquées un peu plus en détail dans la partie *Appréciation du problème*, qui précède chaque énoncé.

Puisque nous en sommes là, précisons la structure de chaque chapitre.

Prérequis. Cette partie énumère les parties du programme de deuxième année concernées par le problème. On considère que le programme de première année a été traité, et fait universellement partie des prérequis.

Appréciation du problème. Outre les modifications apportées à l'énoncé, cette partie précise l'intérêt mathématique et pédagogique du problème, ainsi que sa difficulté et sa longueur.

Énoncé. Comme indiqué, l'énoncé, tout en étant parfois retouché, reste essentiellement, voire intégralement, conforme à l'original.

Corrigé. Le corrigé est rédigé dans les règles de l'art, comme il devrait l'être par un élève le jour du concours. Une attention particulière a été portée à l'adéquation du corrigé avec le niveau du concours et de l'épreuve.

Commentaires. Les commentaires sont brefs et centrés sur des moments importants du problème. On n'a pas listé toutes les erreurs envisageables, faute d'un temps infini pour le faire, mais plutôt tenté d'éclairer, en prenant le recul nécessaire, les intentions de l'énoncé.

Théorèmes utilisés. On cite, en référence de la question concernée, l'énoncé complet du ou des théorèmes utilisés. On prendra garde que seuls les théorèmes importants sont référencés, et plus particulièrement ceux vus en deuxième année, les propositions relevant de la pratique standard n'étant pas relevées. Par exemple, on énoncera le théorème spectral, mais pas le théorème des fonctions intermédiaires.

Il y a certainement deux circonstances lors desquelles un étudiant composera sur un sujet de concours : lors de ses années de préparation, et le jour du concours. L'objectif de cet ouvrage est donc doublement contraint : faire travailler le candidat, à un moment où il ne l'est encore que virtuellement.

Les enseignants pourront peut-être trouver intérêt à confronter leurs solutions et leurs points de vue à ceux proposés dans ce livre. Nous espérons que les étudiants en tireront un profit substantiel.

En général, un étudiant vise une certaine catégorie d'écoles et trouvera dans ce livre matière à s'y préparer. Les concours d'entrée à l'École polytechnique et à l'Ens de Cachan, aux Mines, à Centrale, les CCP et E3A, rassemblent de fait une très forte majorité des écoles d'ingénieur. Les rares autres ont des niveaux voisins. Néanmoins, des écoles recrutant leurs élèves à l'aide de questionnaires à choix multiples devraient être préparées à l'aide d'autres textes.

Au-delà de la valeur mathématique de l'énoncé, il reste important pour le futur candidat d'avoir quelqu'idée d'un concours donné. Les jurys changent, les années se suivent sans se ressembler absolument, la politique de recrutement subit des inflexions. La spécificité actuelle de chaque concours est une réalité, à laquelle on est d'autant mieux préparé que les millésimes sont récents. Cette spécificité concerne, non pas, évidemment, le thème abordé, qu'il est aussi vain de chercher à prévoir que le temps qu'il fera au mois d'avril de l'année prochaine, mais les attentes du jury, les qualités testées, le niveau d'exigence.

Quelle que soit l'école, le candidat devra adopter des règles générales. Il est bon d'avoir une idée globale de l'énoncé en le lisant dès le début de l'épreuve, au moins dans ses grandes lignes. Cela permet en effet de définir une stratégie. Rien n'est pire, par exemple, que d'aborder la première question à l'aide de techniques qui feront l'objet de la troisième partie, ou de tenter de démontrer de prime abord un résultat intermédiaire qui est en réalité le but du problème. Des questions ultérieures peuvent, parfois, donner des indications sur la réponse à une question ouverte de l'énoncé. On peut aussi mesurer l'indépendance des questions, détecter celles qu'il est absolument nécessaire de traiter, ou au contraire celles que l'on peut admettre. La règle est en effet qu'il est loisible de considérer comme acquis un résultat fourni par l'énoncé, quand bien même on ne l'aurait pas traité, à condition bien entendu de ne pas l'utiliser avec effet rétroactif : admettre la troisième question pour traiter la deuxième sera toujours considéré comme un possible cercle vicieux.

La longueur apparente du problème est un élément important d'appréciation, quoique parfois délicat à utiliser. Comment, dans le cas d'un problème très long, établir un compromis efficace entre le nombre des questions traitées et la qualité de la rédaction ? Le rapport du jury fournira certainement des éclaircissements à ce sujet. Ce rapport est d'ailleurs, dans tous les cas, un élément important d'information pour le taupin qui devra, lors de sa parution, le mettre en regard avec les corrigés présentés dans cet ouvrage.

Le jour du concours, les erreurs d'énoncé, une fois repérées, devront être signalées explicitement, et le candidat devra à cet égard faire preuve d'initiative. Dans le cas présent, les auteurs, après avoir cherché à les éliminer, espèrent n'en avoir pas introduit de nouvelles.

Se pose la question cruciale de la rédaction. Puisqu'une bonne partie du travail en classes préparatoires est consacrée à son apprentissage, il n'est pas utile de s'y étendre. Cependant, nous devons signaler que le corrigé détaillé, tel qu'il est proposé, a pour vocation à être un modèle (cela ne signifie pas qu'il réalise cette vocation). En d'autres termes, il contient tout ce qu'il nous semble nécessaire de mettre, et rien de ce qui nous paraît inutile. Ce n'est donc pas une rédaction succincte, où seules seraient présentées les idées ou les preuves non triviales, pas plus qu'un discours sur le thème du problème. Néanmoins, il faut préciser ce point de vue un peu absolu. Pratiquement, le candidat est conduit à viser à la plus grande efficacité. Nous n'avons donc pas cherché à fournir à tout prix la solution la plus élégante, dont la brièveté apparente cache la durée d'élaboration. Pour permettre à l'étudiant une vraie réflexion sur son travail, les commentaires qui suivent le corrigé explorent parfois certaines alternatives, et les évaluent.

Chaque concours a sa propre langue, qui s'exprime aussi bien dans les locutions que dans les notations. Il convient de s'y prêter, afin de ne pas se trouver dans une situation équivoque. Certains concours, par exemple, utilisent le symbole ∞ là où certains autres écrivent $+\infty$. Il faut, le cas échéant, justifier le changement de notation. Si, le jour du concours, on est conduit à utiliser telle ou telle notation, tournure ou encore davantage abréviation qui ne serait peut-être pas dans le lexique implicite du jury, mieux vaut le signaler avec trop de détails que pas assez : rien n'interdit de prévoir, en début de copie par exemple, un endroit où, au fur et à mesure des besoins, on précisera ces idiotismes. Sans cela, le correcteur serait peut-être surpris de lire « d'après le TVI », et un correcteur surpris est souvent un correcteur de mauvaise humeur. Le candidat préférera alors écrire « d'après le TVI (théorème des valeurs intermédiaires) » et réemployer cette abréviation librement dans la suite.

Il va de soi que la présentation manuscrite ne prend pas la même forme que la présentation imprimée, et l'usage de l'encadré ou du souligné est tout à fait légitime, et souvent même fort utile.

La rédaction proposée ici est probablement trop soutenue pour un jour de concours, où les articulations logiques peuvent se limiter à des « donc » et des « or ». Cependant, la trame logique, l'appel des hypothèses, la mise en évidence des conclusions doivent être respectés, et de ce point de vue le corrigé fourni n'en fait pas trop.

Reste à définir le degré de détail dans les preuves. Celui que nous proposons vise à être largement suffisant. Notre point de vue a été celui que devrait avoir un candidat, à savoir adapter la minutie des arguments au niveau de l'épreuve.

Si celle-ci soumet au candidat une question facile, il faut y répondre en détail, car à quoi sert-il de répondre à une question facile en disant que c'est évident ? En revanche, si une vérification du même ordre intervient au milieu d'une question ardue, s'en dispenser peut être acceptable, à condition toutefois de signaler l'existence de cette vérification. Dans le même ordre d'idée, le degré de détail dans les réponses peut diminuer au fur et à mesure que l'on avance dans l'énoncé, ne fût-ce que parce que le candidat aura déjà prouvé sa capacité à utiliser les techniques les plus élémentaires au cours des premières questions. Enfin, il faut tenir compte de l'esprit de l'énoncé.

L'objectif des commentaires est de permettre à l'étudiant de consolider ses connaissances mathématiques et de répondre efficacement aux attentes du jury. On y trouvera enfin une mise en perspective du contenu mathématique de l'épreuve.