Im-et-Ker

101. — Les clefs pour l'X. Bernard Randé & Franck Taïeb
102. — Les clefs pour l'X (2). Roger Mansuy & Bernard Randé
103. — Les clefs pour les Mines. Françoise Fontanez & Bernard Randé
104. — Problèmes clefs pour mathématiques supérieures. Hervé Gianella, Romain Krust, Franck Taïeb & Nicolas Tosel
105. — Les clefs pour la PSI et la PSI*. Roger Mansuy & Bernard Randé
106. — Une année de colles en Math Sup MPSI. Éric Kouris
107. — Les clefs pour les Hautes Études Commerciales. Philippe Gallic & Jean-Louis Grappin
108. — Le jardin d'Eiden. Une année de colles en MP*. Jean-Denis Eiden
109. — Un Max de Maths. Maxime Zavidovique
110. — Mathématiques pour la voie économique et commerciale. Jérôme Gärtner
111. — Probabilités. Cours et exercices corrigés (1). Thierry Meyre
112. — Les clefs pour l'écrit MP de mathématiques (session 2015). Bernard Randé, Alix Deleporte-Dumont, Quentin Guignard
113. — Les clefs pour l'oral MP de mathématiques, X-ENS (session 2015). Quentin Guignard, Bernard Randé
114. — Les clefs pour l'écrit de mathématiques des concours 2016, filière MP. Clément de Seguins Pazzis
115. — Les clefs pour l'Info. Ismael Belghiti, Roger Mansuy et Jill-Jênn Vie.
116. — Les nouvelles clefs pour les Mines-CCP (tome I). Oral MP, 2015-16. Bernard Randé
117. — Agrégation interne. Algèbre générale, algèbre linéaire et un peu de géométrie. Georges Skandalis
118. — Florilège d'exercices de l'oral d'HEC. Jean-Louis Roque
119. — Les clefs pour l'écrit MP 2017 – Mathématiques. Clément de Seguins Pazzis
120. — Les clefs pour l'écrit de mathématiques et d'informatique. Filière PSI 2015-2016. L. Cozar, N. Jousse, B. Randé, L. Sartre
121. — Agrégation interne. Analyse. Georges Skandalis

Georges Skandalis

Agrégation interne

Analyse,
résumés de cours et exercices

Calvage & Mounet

Georges Skandalis est professeur à l'université Paris Diderot et participe à la préparation à l'agrégation interne depuis bientôt dix ans.
Il est ancien élève de l'ÉNS et membre de l'Institut de mathématiques de Jussieu-Paris rive gauche, dans l'équipe « Algèbres d'opérateurs ».

georges.skandalis@imj-prg.fr

ISBN 978-2-916352-39-8

9 782916 352398

∞ Imprimé sur papier permanent

À ma crispation et ses conséquences

Avant-propos

Ce volume est la deuxième partie du diptyque commencé l'an dernier avec le volume d'algèbre dans la même collection. Comme pour le livre d'algèbre, ce livre s'est construit au cours d'une dizaine d'années d'enseignement dans le cadre de la préparation à l'agrégation interne de mathématiques de l'université Paris Diderot — après plusieurs années passées dans le jury de ce concours, ainsi qu'à celui de l'agrégation externe.

Les thèmes abordés ici couvrent une bonne partie du programme d'analyse du concours : ce sont essentiellement ceux que j'ai enseignés au cours des années concernées. Cependant, la partie intégration et probabilités a été professée par Thierry Meyre et je ne peux que conseiller très chaleureusement son excellent ouvrage de probabilités dans la même série (voir bibliographie en fin de volume), mais aussi celui d'intégration, qui est en préparation et qui, je l'espère, ne devrait pas tarder à paraître.

La conception du présent livre est analogue à celle du précédent.

Comme pour le volume d'algèbre, je me suis efforcé de donner un point de vue très classique, en suivant relativement de près le programme officiel. De ce fait, plusieurs démonstrations, voire des énoncés du cours, font appel à des notions introduites plus loin dans le texte. Je me suis permis de dépasser un peu le cadre strict de ce programme uniquement dans quelques exercices.

Ce livre se veut plutôt un outil de révision et d'approfondissement de connaissances acquises pendant les études du candidat. Il n'est pas conçu pour être lu de façon linéaire. Pour lui garder une taille raisonnable, beaucoup de démonstrations du cours sont omises. J'ai ainsi laissé de côté certaines qui me semblaient plus faciles — ou plus faciles à trouver dans d'autres ouvrages, en particulier ceux en direction de la licence ou des CPGE. Dans de nombreuses parties, je me suis contenté d'énoncer les résultats de base. Dans certains autres cas, j'ai choisi de donner des démonstrations rapides, en n'insistant que sur les arguments les plus cruciaux. Certaines parties, en revanche, sont plus détaillées. Cela provient certainement d'un choix personnel. Cependant, le plus souvent, cela provient d'une demande des auditeurs de nos cours.

Le livre contient de nombreux exercices avec des solutions, quelquefois succinctes mais complètes. Les exercices proposés sont pour la plupart classiques, même si certaines solutions m'ont semblé plus directes ou plus éclairantes que les solutions correspondantes que l'on trouve ailleurs.

Si quelques exercices du livre sont des exercices d'entraînement, la plupart sont assez consistants pour pouvoir être proposés comme « développement » dans une épreuve d'exposé et, plus encore, pour l'épreuve d'exercices.

La difficulté des exercices se veut relativement variée pour permettre à chacun de choisir le niveau où il souhaite se placer.

Plusieurs d'entre eux sont beaucoup trop longs pour être proposés en entier à un oral du concours. Les dernières questions servent dans ce cas à approfondir l'exercice. Cet approfondissement est parfois bien utile afin de bien se préparer aux questions du jury.

Contrairement au livre d'algèbre, j'ai inclus une bibliographie sommaire, nécessairement très partielle. On y cite majoritairement les ouvrages préférés des stagiaires. Mon principal conseil à nos agrégatifs a toujours été de se tourner, du moins dans un premier temps, vers les livres fréquentés pendant leurs années d'études.

Remerciements

Je remercie toute l'équipe d'enseignants qui, au fil des ans, a partagé avec moi les cours de la préparation : Daniel Bennequin, Gentiana Danila, Romain Dujardin, Catherine Gille, David Hermann, Thierry Meyre et Rached Mneimné. J'ai utilisé plusieurs exercices qu'ils ont proposés. Une mention spéciale pour David Hermann, qui a suivi le « poly d'analyse » et m'a fait corriger une multitude de coquilles et autres erreurs. Il ne faut pas non plus oublier Frédéric Han et Pascal Molin, qui ont organisé des séances de TP machine pour nos stagiaires, et les nombreux collègues qui nous ont donné un coup de main pour les oraux blancs, et en particulier Julie Deserti, avec qui j'ai assuré plusieurs oraux blancs...

Je ne pourrai citer ici tous les stagiaires de notre formation depuis dix ans. Presque tous ont contribué, par leurs questions, leurs remarques et conseils, à améliorer, directement ou indirectement, le manuscrit. Parmi ceux qui m'ont le plus aidé et encouragé en relevant soigneusement ligne après ligne les petites ou grandes erreurs qui s'étaient glissées ou en m'incitant à ajouter des explications supplémentaires, citons Julien Baldacci, Boris Bertin, Nicolas Biehler, Charlotte Boudier, Jessica Brisac, Florence Caruana, Stéphanie Colin, Pascale Creuse, Cécile Damongeot, Jennifer Dapilly, Angélique Di Benedetto, Catherine Durieu, Cindy Gazda, Anaïs Goëau, Mehdi Hanebali, Marie Joubert, Harun Karagoz, Muriel Leduc, Marie Meunier, Julien Nicolas, Clotilde Pegeot, Éric Pons, Amélie Piétrement, Éléonore Petit, Nicolas Poulain, Philippe Raynaud, Stéphanie Rondeau, Fabien Sommier, Élisabeth Thoyon, Irène Veeravalli ... et j'en oublie ...

Un grand merci à Bernard Randé, pour une lecture rapide mais efficace de ce livre, à Alberto Arabia et à Alain Debreil, pour leur aide précieuse.

Table des matières

Chapitre I

Suites de nombres réels

Références pour ce chapitre : les livres classiques de premières années, vos livres de L1-L2, DEUG ou CPGE ([LM, LFA, Mo, RDO], etc.). Pour les développements décimaux —surtout des nombres rationnels, on consultera volontiers [Pe] (voir biblio. p. 331).

1. Nombres réels

L'analyse est en très grande partie basée sur les nombres réels. En effet, on se rend vite compte que le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est insuffisant. Des nombres comme $\sqrt{2}$, le nombre π, le nombre e... ne sont pas rationnels. Bref, $\mathbb{Q}$ n'est pas complet... On est ainsi amené à introduire le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Une fois $\mathbb{R}$ construit, on n'aura pas tout à fait fini puisque des idées d'algèbre et géométrie nous conduiront ensuite à construire le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Mais qu'est-ce qu'un nombre réel ? Un nombre réel peut être donné comme solution d'une équation plus ou moins simple :

- $\sqrt{2}$ est solution de l'équation $x^2 = 2$;
- π de l'équation $\sin x = 0$...

En tout cas, tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Ainsi, on peut construire $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des limites de nombres rationnels ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$). Cette idée se réalise de la façon suivante.

- On sait quand une suite de nombres rationnels devrait avoir une limite : cela a lieu si et seulement si c'est une suite de Cauchy.
- On sait quand deux suites de nombres rationnels devraient avoir la même limite : cela a lieu si et seulement si leur différence tend vers 0.

La construction mathématique est alors la suivante. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de nombres rationnels (c'est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres rationnels) ; sur $\mathcal{C}$ on définit une relation R en écrivant

$$(u_n)\,R\,(v_n) \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0.$$

On démontre que R est une relation d'équivalence, et l'on définit $\mathbb{R}$ comme le quotient d'équivalence $\mathcal{C}/R$. On plonge alors $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: l'image des nombres rationnels sont les classes des suites constantes ; on définit les opérations (addition, multiplication) sur $\mathbb{R}$: on les définit sur les suites et l'on vérifie qu'elles passent au quotient. On écrit $x \leqslant y$ s'il existe des suites (u_n) et (v_n) de classes respectives x et y telles que l'on ait $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; on vérifie enfin que $\leqslant$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$; en particulier, on définit $\mathbb{R}_+$ comme l'ensemble des classes des suites positives.

Une autre façon de concevoir $\mathbb{R}$ est de *choisir* pour chaque nombre réel une suite de nombres rationnels convergeant vers ce nombre. Par exemple, comme notre façon de compter est basée sur le nombre 10, un nombre réel est limite de la suite de ses développements décimaux. On aurait pu évidemment choisir un développement en base b pour un entier $b \geqslant 2$ quelconque... Mais comme nos mains nous offrent dix doigts, c'est le nombre 10 qui a été choisi !

2. Développement décimal des nombres réels

Sur l'écriture décimale des nombres entiers positifs

Pour décrire les nombres entiers, on pourrait imaginer :

- utiliser un symbole différent pour chaque nombre — cela est évidemment impossible : il faudrait une infinité de symboles différents...
- représenter un entier n par n barres — cette méthode est utilisée lors de dépouillements de scrutins et certaines rencontres sportives ; on regroupe alors par paquets de cinq ou de dix ; cependant, pour des nombres moyennement grands, cette méthode est fastidieuse tant à l'écriture qu'à la lecture.

L'écriture décimale permet avec dix symboles de pouvoir exprimer de façon relativement compacte n'importe quel nombre entier.

Nous ne rappelons pas ici le principe de cette écriture, ni les algorithmes des opérations dans cette écriture. Rappelons en revanche les tests de division que cette écriture permet.

2.1. Division par 10^n. Un nombre entier est divisible par 10^n si et seulement si les n derniers chiffres de son écriture décimale sont nuls. Le reste d'un nombre entier dans la division par 10^n est le nombre obtenu en conservant les n derniers chiffres de son écriture décimale. On en déduit qu'un nombre est divisible par 2^n (ou 5^n) si et seulement si le nombre obtenu en conservant les n derniers chiffres de son écriture décimale l'est.

2.2. Division par 3, par 9. Tout nombre entier est congru modulo 9, donc modulo 3, à la somme de ses chiffres (dans l'écriture décimale) : c'est la base de la *preuve par* 9. En effet, 10 est congru à 1 modulo 9, donc 10^k est congru à 1 modulo 9 pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $\sum_{k=0}^{n} a_k\, 10^k$ est congru à $\sum_{k=0}^{n} a_k$ modulo 9.

2.3. Division par 11. Remarquons que 10 est congru à -1 modulo 11, donc 10^k est congru à $(-1)^k$ modulo 11 pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\sum_{k=0}^{n} a_k\, 10^k$ est congru modulo 11 à $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. On trouve ainsi facilement le reste modulo 11 d'un nombre entier.

Approximation décimale des nombres réels

2.4. Définition. Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est dit *décimal* s'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = m\, 10^{-n}$. En particulier, un nombre décimal est rationnel.

Approximation décimale. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Posons $p_n = E(10^n x)$ (où E désigne la partie entière), $a_n = 10^{-n} p_n$ et $b_n = 10^{-n}(p_n + 1)$, de sorte que $p_n \in \mathbb{Z}$ et $a_n \leqslant x < b_n$. Les nombres a_n et b_n sont décimaux ; le nombre a_n est appelé l'*approximation décimale par défaut* de x à l'ordre n. Si $x \neq a_n$, on dit que b_n est l'*approximation décimale par excès* de x à l'ordre n.

Comme $10p_n \leqslant 10^{n+1}x < 10(p_n + 1)$, il vient $10p_n \leqslant p_{n+1} < 10(p_n + 1)$; en particulier, la suite (a_n) est croissante ; et puisque $p_{n+1} < 10(p_n + 1)$, il vient $p_{n+1} + 1 \leqslant 10(p_n + 1)$, donc la suite (b_n) est décroissante. Enfin, puisque $b_n - a_n = 10^{-n}$, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes ; puisque pour tout n on a $a_n \leqslant x \leqslant b_n$, la limite commune de ces deux suites est x.

Discutons quelques aspects de cette approximation décimale.

2.5. Densité de $\mathbb{Q}$. L'approximation décimale nous permet d'écrire tout nombre réel comme limite d'une suite de nombres décimaux. En d'autres termes, les nombres décimaux forment un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}$; on en déduit *a fortiori* que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2.6. Développement décimal propre

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre entier $c_n = p_n - 10p_{n-1}$ est compris entre 0 et 9. C'est la *n-ième décimale de x après la virgule.* On a (par récurrence sur n) $a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k 10^{-k}$ et, puisque x est la limite des a_k, il vient

$$x = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k 10^{-k}.$$

Cette expression s'appelle le *développement décimal propre* de x. On obtient alors l'*écriture décimale (infinie) de x* sous la forme

$$x = a_0, c_1 c_2 c_3 \ldots$$

b) Inversement, donnons-nous une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres entiers relatifs tels que pour $n \geqslant 1$ on ait $0 \leqslant c_n \leqslant 9$. La série (à termes positifs) de terme général $(c_k 10^{-k})_{k\geqslant 1}$ est convergente, car majorée par la série géométrique $\sum 9\,10^{-k}$. Posons $x = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k 10^{-k}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, le nombre $q_n = \sum_{k=0}^{n} c_k 10^{n-k}$ est entier, et l'on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} c_k 10^{n-k} \leqslant 9 \sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k} = 1.$$

Cette inégalité est stricte à moins que $c_k = 9$ pour tout $k > n$.

Distinguons deux cas.

- Si l'ensemble des k tels que $c_k \neq 9$ est infini, le développement décimal propre de x est
$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k 10^{-k}.$$
- Supposons qu'à partir d'un certain rang, tous les chiffres c_k sont égaux à 9. Notons $m \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $c_k = 9$ pour tout $k > m$; posons $c'_k = c_k$ pour $k < m$ et $c'_m = 1 + c_m$. Le développement décimal propre de x est
$$x = \sum_{k=0}^{m} c'_k 10^{-k}.$$
Dans ce dernier cas, l'expression
$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k 10^{-k} = \sum_{k=0}^{m} c_k 10^{-k} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} 9.10^{-k}$$
s'appelle le *développement décimal impropre* de x.

2.7. Une bijection. Notons $A = \mathbb{Z} \times [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres entiers relatifs tels que pour $n \geqslant 1$ on ait $0 \leqslant c_n \leqslant 9$. Notons aussi $A' \subset A$ l'ensemble des suites (c_n) comportant une infinité de termes distincts de 9. On a construit une application $f : \mathbb{R} \to A$ qui à $x \in \mathbb{R}$ associe son développement décimal propre, et une application $g : A \to \mathbb{R}$ donnée par $g\Big((c_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_k 10^{-k}$.

On a vu ci-dessus que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ (2.6.a) et que $f \circ g\Big((c_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A'$ (2.6.b). On en déduit que f et g induisent par restriction des bijections réciproques l'une de l'autre entre $\mathbb{R}$ et A'.

2.8. Théorème de Cantor. *Le corps $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

Soit $f : \mathbb{N}^* \to [0,1[$ une application. Nous allons démontrer que f n'est pas surjective. Définissons alors le nombre réel $a = 0, a_1 a_2 \cdots a_n \ldots$ de la manière suivante.

- On choisit la première décimale a_1 de a dans l'ensemble $[\![0,8]\!]$ et distincte de la première décimale de $f(1)$; on a donc $a \neq f(1)$.
- On choisit ensuite a_2 dans l'ensemble $[\![0,8]\!]$ et distinct de la deuxième décimale de $f(2)$; donc $a \neq f(2)$.
- On choisit de même la n-ième décimale a_n de a dans $[\![0,8]\!]$ et distincte de la n-ième décimale de $f(n)$; donc, $a \neq f(n)$.
- Comme on a choisi $a_j \neq 9$, le développement $a = 0, a_1 a_2 \ldots$ est le développement décimal propre de a. Comme $a \neq f(n)$ pour tout n l'application f n'est pas surjective. □

2.9. Remarque : développement décimal des nombres strictement négatifs. Pour les nombres réels négatifs l'usage est d'écrire $x = -|x|$ où l'on développe $|x|$ dans son écriture décimale. Ainsi, le nombre $-\pi$ s'écrit $-3,14159\ldots$ et non $(-4), 85840\ldots$

3. Cas des nombres rationnels

Soit a un nombre rationnel positif. Notons $a = \dfrac{p}{q}$ son *écriture irréductible*, *i.e.* avec p et q des nombres entiers premiers entre eux. Nous allons étudier le développement décimal de a : nous démontrerons qu'il est périodique, et étudierons sa période en fonction du dénominateur q.

a) • Si les seuls diviseurs premiers de q sont 2 et 5, on écrit $q = 2^k 5^\ell$. Alors, $10^m a \in \mathbb{N}$ où $m = \max(k, \ell)$, de sorte que a est un nombre décimal (avec m chiffres après la virgule).

- Inversement, si le nombre a est décimal avec m chiffres après la virgule, on a $10^m a \in \mathbb{N}$, de sorte que $q|10^m$ (puisque $\dfrac{p}{q}$ est l'écriture irréductible de $\dfrac{10^m a}{10^m}$), puis que q est de la forme $2^k 5^\ell$ avec $k \leqslant m$ et $\ell \leqslant m$. Enfin, si a possède exactement m chiffres après la virgule, $10^{m-1}a \notin \mathbb{N}$, donc $m = \max(k,\ell)$.

b) • Supposons que le dénominateur q est premier avec 10 et $q \neq 1$. Notons $p = dq + r$ la division euclidienne de p par q avec $1 \leqslant r \leqslant q-1$. Notons que $r \neq 0$ puisque p et q sont premiers entre eux et $q > 1$. Comme q et 10 sont premiers entre eux, la classe de 10 est un élément du groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Notons k l'ordre de 10 dans ce groupe. Il en résulte que $10^k \equiv 1 \quad [q]$, donc q divise $10^k - 1$. Écrivons alors $10^k - 1 = bq$ et, enfin,

$$a = d + \frac{br}{10^k - 1} = d + br \sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-nk}.$$

Remarquons que $br < bq = 10^k - 1$. Notons $br = \sum_{j=1}^{k} c_j 10^{k-j}$ son développement décimal (autrement dit l'écriture décimale de l'entier br est $br = c_1 c_2 \cdots c_k$).
On a alors $a = d + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{k} c_j 10^{-(nk+j)}$. Le développement décimal de a est donc $a = d + \sum_{j=1}^{+\infty} c_j 10^{-j}$, où l'on a prolongé les c_j par périodicité, posant $c_{j+nk} = c_j$ (pour $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant j \leqslant k$). En d'autres termes, le développement décimal de a est $a = d, c_1 \cdots c_k c_1 \cdots c_k \ldots$; il est périodique après la virgule, et k est un multiple de sa période.

- Inversement, si le développement décimal d'un nombre réel a est périodique de période ℓ après la virgule, on a : $a = d, c_1 \cdots c_\ell c_1 \cdots c_\ell \ldots$, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} a &= d + \sum_{j=1}^{+\infty} c_j 10^{-j} \\ &= d + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\ell} c_j 10^{-(n\ell+j)} \\ &= d + \Big(\sum_{j=1}^{\ell} c_j 10^{\ell-j}\Big)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-n\ell}\Big). \end{aligned}$$

Enfin, $a = d + \dfrac{u}{10^\ell - 1}$ où $u = \sum_{j=1}^{\ell} c_j 10^{\ell-j}$, donc l'écriture irréductible de a est $\dfrac{p}{q}$ où q est un diviseur de $10^\ell - 1$. En particulier, 10 et q sont premiers entre eux, et l'ordre de 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ divise ℓ.

c) Dans le cas général, on écrit $q = 2^k 5^\ell q'$ avec $q' > 1$ et premier avec 10. Posons $m = \max(k, \ell)$. Alors, l'écriture irréductible de $10^m a$ est de la forme $\dfrac{p'}{q'}$, de sorte que l'écriture décimale de a est périodique à partir de la $(m+1)$-ème décimale après la virgule de période k, où k est l'ordre de 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z})^*$.

On a donc démontré l'énoncé qui suit.

3.1. Théorème

- *Le développement décimal d'un nombre réel est fini ou périodique (à partir d'un certain rang) si et seulement si ce nombre est rationnel.*
- *Soit a un nombre rationnel. Écrivons $a = \dfrac{p}{2^k 5^\ell q}$ avec $k, \ell \in \mathbb{N}$ et q premier avec $10p$. Posons $m = \max(k, \ell)$.*

  a) Le développement décimal de a est fini si et seulement si $q = 1$.

  b) Si $q \neq 1$, le développement décimal de a est périodique à partir du $(m+1)$-ème chiffre après la virgule, et sa période est l'ordre de 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$. $\square$

3.2. Remarque. On peut remplacer le développement décimal par le développement en base b, où b est un nombre entier $\geqslant 2$ quelconque. On pourra ainsi écrire :

- tout nombre $A \in \mathbb{N}$ (de manière unique) sous la forme $A = \sum_{k=0}^{N} a_k b^k$ avec $N \in \mathbb{N}$ et, pour tout $i \in [\![0, N]\!]$, $a_i \in [\![0, b-1]\!]$; cette suite (a_i) s'appelle le développement en base b de l'entier A.
- tout nombre réel positif A est somme d'une série $A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b^{-k}$ avec $a_0 \in \mathbb{N}$ et, pour $i \geqslant 1$, $a_i \in [\![0, b-1]\!]$, avec unicité si l'on impose que l'ensemble des $i \in \mathbb{N}$ tels que $a_i \neq b-1$ est infini. La suite (a_i) s'appelle alors le développement en base b propre du nombre réel A.
- Le développement en base b d'un nombre réel est fini ou périodique (à partir d'un certain rang) si et seulement s'il est rationnel.
- Soit A un nombre rationnel. Écrivons $A = \dfrac{p}{mq}$ où $p, m, q \in \mathbb{N}$ sont deux à deux premiers entre eux, q est premier avec b et m divise une puissance b^k de b.

  a) Le développement en base b de A est fini (*i.e.* $a_i = 0$ à partir d'un certain rang) si et seulement si $q = 1$.

  b) Si $q \neq 1$, le développement en base b de A est périodique à partir du rang $k+1$. Sa période est l'ordre de b dans le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$.