

Im-et-Ker

101. — Les clefs pour l’X. Bernard Randé & Franck Taïeb
102. — Les clefs pour l’X (2). Roger Mansuy & Bernard Randé
103. — Les clefs pour les Mines. Françoise Fontanez & Bernard Randé
104. — Problèmes clefs pour mathématiques supérieures. Hervé Gianella, Romain Krust, Franck Taïeb & Nicolas Tosel
105. — Les clefs pour la PSI et la PSI*. Roger Mansuy & Bernard Randé
106. — Une année de colles en Math Sup MPSI. Éric Kouris
107. — Les clefs pour les Hautes Études Commerciales. Philippe Gallic & Jean-Louis Grappin
108. — Le jardin d’Eiden. Une année de colles en MP*. Jean-Denis Eiden
109. — Un Max de Maths. Maxime Zavidovique
110. — Mathématiques pour la voie économique et commerciale. Jérôme Gärtner
111. — Probabilités. Cours et exercices corrigés (1). Thierry Meyre
112. — Les clefs pour l’écrit MP de mathématiques (session 2015). Bernard Randé, Alix Deleporte-Dumont, Quentin Guignard
113. — Les clefs pour l’oral MP de mathématiques, X-ENS (session 2015). Quentin Guignard, Bernard Randé
114. — Les clefs pour l’écrit de mathématiques des concours 2016, filière MP. Clément de Seguins Pazzis
115. — Les clefs pour l’Info. Ismael Belghiti, Roger Mansuy et Jill-Jënn Vie.
116. — Les nouvelles clefs pour les Mines-CCP (tome I). Oral MP, 2015-16. Bernard Randé
117. — Agrégation interne. Algèbre générale, algèbre linéaire et un peu de géométrie. Georges Skandalis
118. — Florilège d’exercices de l’oral d’HEC. Jean-Louis Roque
119. — Les clefs pour l’écrit MP 2017 – Mathématiques. Clément de Seguins Pazzis
120. — Les clefs pour l’écrit de mathématiques et d’informatique. Filière PSI 2015-2016. L. Cozar, N. Jousse, B. Randé, L. Sartre
121. — Agrégation interne. Analyse. Georges Skandalis
122. — Les clefs pour l’oral MP de mathématiques, X-ENS (2016-2017). Thomas Blomme, Louise Gassot, Quentin Guignard, Bernard Randé
123. — Une année de colles en Math Sup MPSI : deuxième édition. Éric Kouris

Éric Kouris

Une année de colles en math sup MPSI

Deuxième édition



Calvage & Mounet



ÉRIC KOURIS est agrégé de mathématiques et ingénieur en construction mécanique et informatique. Il a traduit de l'anglais *Problèmes d'analyse*, volume 1 à 3, de W. J. Kaczor et M. T. Nowak (publiés par EdP Sciences), *Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaire* de V. V. Prasolov, *Séries et intégrales de Fourier* de H. Dym et H. P. McKean et, du russe, *Problèmes d'analyse réelle* de B. M. Makarov et coll. (publiés par Cassini). Il colle en math. sup. MPSI depuis une vingtaine d'années au lycée Janson de Sailly à Paris.

∞ Imprimé sur papier permanent

© Calvage & Mounet, Paris, 2018

ISBN 978-2-9163-5269-5



Pour Alain Legendre



Préface

L'année de mathématiques supérieures est rythmée par les cours, les devoirs à la maison, les contrôles et les interrogations orales, les fameuses colles. Chaque semaine, de la fin du mois de septembre au début du mois de juin, vous passerez des interrogations orales dans différentes disciplines. Dans la filière MPSI, vous aurez ainsi durant l'année trente colles de mathématiques.

Des colles, pour quoi faire ?

Une colle en mathématiques dure une heure. Il n'y a pas de format imposé mais, généralement, cela débute par une question de cours portant sur le programme de la semaine (... ou des semaines précédentes), suivie d'un ou plusieurs exercices.

Apprendre son cours

Comme son nom l'indique, la question de cours vise à s'assurer que vous apprenez régulièrement votre cours. Elle peut porter sur des définitions, des théorèmes et, éventuellement, leur démonstration ou sur les exercices classiques vus en cours. Le but de cette question n'est pas de vous coincer. La maîtrise du cours est le prérequis à la résolution de tous les exercices que l'on peut vous poser.

Le minimum que l'on attend de vous lorsque vous venez en colle est la connaissance du cours¹. Il y a peu d'intérêt à perdre une heure pour montrer que l'on n'a pas travaillé, sauf à aimer recevoir des mauvaises notes.

Encore faut-il bien s'entendre sur ce que veut dire maîtriser son cours. Il ne s'agit pas d'avoir une vague idée des théorèmes vus durant la semaine, mais de connaître parfaitement les hypothèses de chacun d'entre eux (voire de connaître un contre-exemple si l'on enlève une des hypothèses) et même d'en connaître les

1. Cet ouvrage ne vous propose aucune « méthode » pour apprendre votre cours. Une seule chose est sûre, il n'existe pas de méthode idéale et infaillible pour apprendre son cours (contrairement à ce que peuvent affirmer certains ouvrages proposant *la* méthode, généralement présentée en fiches, sous-fiches, tableaux synoptiques et, depuis quelques années, « contenus interactifs » sur des sites internet). C'est à vous de voir ce qui vous convient le mieux pour retenir la masse de connaissances que l'on vous demande d'apprendre.

démonstrations faites par votre professeur (lorsque celles-ci ne sont pas explicitement hors programme). Souvent les techniques utilisées dans les démonstrations vues en cours peuvent être recyclées dans la résolution de problèmes. Par exemple, les exercices XI.11 et D.11 du présent ouvrage reposent sur la technique utilisée pour démontrer la formule du binôme de Newton.

Se préparer aux oraux des concours

L'exercice après la question de cours poursuit, en partie, les mêmes buts. Il peut avoir un lien avec la question posée précédemment, comme il peut n'avoir aucun rapport avec celle-ci. L'exercice peut être une simple application du cours ou faire appel à une idée originale. Dans tous les cas, c'est l'occasion de voir ce que vous avez compris des théorèmes vus en cours au-delà de leur énoncé. Il ne suffit pas de pouvoir les réciter, encore faut-il voir quand les utiliser. En d'autres termes, on vous demande de faire le tri dans tout ce que vous avez appris afin de sélectionner les connaissances précises à mettre en oeuvre dans la résolution du problème posé. Et une fois que le plan d'action est dégagé, on vous demande en plus de rédiger votre solution. Il ne s'agit pas d'aligner des calculs en laissant au colleur le soin de deviner les liens logiques dans votre raisonnement. Vous pouvez être sûr qu'il mettra toute la mauvaise volonté qu'il faut pour ne pas comprendre.

C'est une occasion en plus du cours et des devoirs de mettre en pratique ce que vous avez appris, de vous y habituer². Mais, c'est aussi l'occasion de s'habituer à être en situation de stress en étant confronté à un problème que vous n'avez certainement jamais vu auparavant et sur lequel vous êtes évalué. C'est précisément la situation que vous aurez à affronter lors des épreuves orales des concours d'entrée dans les grandes écoles.

Il n'y a, de toute façon, pas de raison de vous abandonner au stress. Si vous bloquez sur un exercice, le colleur vous donnera des indications pour que vous avanciez dans l'exercice. L'évaluation faisant partie de la colle, le colleur vous aidera en cas de blocage. Si vous restez bloqué et ne produisez rien, il n'y a rien à évaluer, ce qui réduit la colle à une heure perdue. Encore faut-il que vous ayez fait le minimum que l'on attend de vous, apprendre votre cours. Ces remarques s'appliquent également aux épreuves orales des concours.

Après la colle

La colle ne s'arrête pas avec l'attribution d'une note à la fin de votre prestation. Votre travail dans les jours qui suivent consiste à reprendre l'exercice sur lequel vous avez travaillé. Ceci sera d'autant plus nécessaire que vous aurez rencontré des difficultés durant la colle. De cette façon, vous assimilerez mieux les techniques utilisées dans l'exercice et vous améliorerez votre connaissance et votre maîtrise du cours. Bien sûr, ceci nécessite que vous mettiez par écrit à la fin de la colle l'énoncé de l'exercice sur lequel vous avez travaillé (si le colleur ne vous en donne pas une copie).

2. « Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them. » (John von Neumann)

Cette remarque a une portée plus générale et peut s'étendre à la plupart des exercices que vous travaillez chez vous ou en cours. C'est en faisant et en refaisant des exercices que vous vous habituerez aux notions que vous étudiez.

Ce que contient ce livre

Des questions de cours

Cet ouvrage est divisé en trente chapitres, autant que de semaines de colle durant l'année de math. sup. Chaque chapitre commence par le programme de la semaine, ce que vous devez connaître lorsque vous venez en colle. Votre professeur ne suivra certainement pas exactement cette progression. Pour autant, toutes les notions au programme sont traitées. Dans certains chapitres, vous trouverez, en plus, un rappel des notions à maîtriser parfaitement. Viennent ensuite des exemples de questions de cours. La liste n'est pas limitative et vos colleurs en auront certainement d'autres à vous proposer. Cela vous donne néanmoins une bonne idée de ce que l'on peut vous demander.

Des exercices corrigés

Enfin, chaque chapitre contient au moins dix exercices. À quelques rares exceptions près, tous ont été posés en colle.

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Cependant, par souci d'économie, une première question commune à plusieurs exercices n'est donnée qu'une fois. Ceci est signalé par une remarque précédant le premier exercice de la série. C'est le cas, par exemple, des exercices XIX.1 à XIX.3 et des exercices C.12 à XXIV.11.

Le niveau peut varier beaucoup d'un exercice à l'autre. Cependant, si quelques uns sont très faciles, le niveau global est assez élevé. La sélection des exercices part du principe que pour obtenir plus des élèves, il faut leur demander plus.

Vous retrouverez dans cet ouvrage quelques grands classiques figurant dans la plupart des livres s'adressant aux élèves de math. sup. (ce n'est pas parce qu'un exercice est considéré comme un classique qu'il faut l'éviter). Vous y trouverez aussi bon nombre d'exercices que vous ne trouverez pas ailleurs dans la littérature s'adressant aux élèves de sup. Pour autant, il n'y a aucune prétention ici à l'originalité.

Si vous bloquez sur un exercice, comme en colle, des indications sont fournies pour vous aider. Elles se trouvent après les énoncés et il y a des indications pour à peu près toutes les questions.

Viennent enfin les solutions détaillées et entièrement rédigées. En général, une solution commence par une ou plusieurs références bibliographiques, suivies de la solution proprement dite. Vous pouvez, bien sûr, passer directement de l'énoncé d'un exercice à sa solution sans faire aucune recherche. Vous pouvez même mémoriser ce que vous avez lu pendant quelques heures et, si vous avez la chance de tomber sur cet exercice durant votre colle, faire illusion. Mais, la note que

vous aurez ne doit surtout pas vous aveugler. Vous n'avez en fait rien appris et, quelques jours plus tard, il ne restera rien de ce que vous aviez mémorisé. Pour reprendre les propos d'un enseignant, « vos progrès en mathématiques se mesurent au volume de brouillon que vous avez produit ». L'important n'est pas de résoudre une question, mais de chercher suffisamment pour que la solution proposée vous apporte quelque chose si vous n'aviez pas trouvé par vous-même. De cette façon, il en restera une trace dans votre esprit et vous serez capable de faire cet exercice si on vous le pose dans quelques temps, non pas en vous souvenant de ce que vous avez lu, mais en produisant un raisonnement menant à la résolution du problème. Pour reprendre la citation de von Neumann, le but est de vous habituer aux notions que vous étudiez jusqu'à ce qu'elles vous paraissent naturelles.

Les solutions sont parfois complétées par des remarques prolongeant la question traitée. Ce peut être un assouplissement des hypothèses, une application directe du résultat obtenu, une mise en perspective historique ou encore un renvoi à un autre exercice traitant un thème connexe.

Certains exercices sont très difficiles. N'hésitez pas à regarder les indications, le colleur vous les donnerait si vous aviez cet exercice en colle. Mais, avant de passer à la solution, faites un effort de recherche. En plus de vous aider à assimiler les notions vues en cours, vous aurez certainement le plaisir de résoudre l'exercice, en vous aidant au besoin des indications. Et plus l'exercice est difficile, plus le plaisir procuré par sa résolution est grand.

Certains exercices, sans être particulièrement difficiles, sont très longs. En pratique, durant la colle, seules les premières questions sont abordées. Par exemple, la question c) de l'exercice XXIV.11 est rarement traitée, la question d) n'est jamais abordée. Les deux premières questions forment un tout cohérent et, dans le cadre d'une colle, on peut s'arrêter là. Mais, autant profiter du format offert par le livre et que ne permet pas la limite temporelle de la colle pour voir plus loin et approfondir le résultat étudié.

Quelques très rares exercices dépassent largement les limites du programme de la math. sup. C'est le cas, par exemple, de l'exercice A.2 (un des rares, dans cet ouvrage, à n'avoir pas été donné en colle). C'est l'occasion de voir ce que l'on peut faire avec les connaissances que vous avez acquises en cours lorsque l'on s'aventure au-delà du programme.

Une bibliographie

Comme dit précédemment, il n'y a aucune prétention à l'originalité, la plupart des exercices sont accompagnés de références bibliographiques. La bibliographie se trouve à la fin de l'ouvrage et est divisée en deux parties. La première contient les références à des articles publiés dans des revues mathématiques (seule une petite partie est accessible librement sur internet). La seconde partie contient les livres et chaque entrée est accompagnée d'un commentaire (certains vous mettent en garde sur le niveau des ouvrages cités).

Cela peut constituer le point de départ à l'approfondissement d'un sujet. N'hésitez pas à en parler à votre professeur, qui saura vous conseiller. Une référence donnée

ici peut ne contenir que l'énoncé du problème, mais ni solution ni développement. À l'inverse, les développements peuvent être très volumineux et vous risquez de vous perdre dans des théories dépassant de loin votre niveau (par exemple, l'article [A2] contient le résultat présenté dans l'exercice XIX.3 et une ébauche de démonstration, noyés au milieu de mathématiques d'un niveau dépassant de loin celui de la math. sup.).

Notations mathématiques

Les notations utilisées ici sont celles que vous rencontrerez en cours tout au long de l'année. Nous utilisons deux notations pour le produit scalaire de deux vecteurs, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ou $\vec{u} \cdot \vec{v}$, suivant le contexte. Seule la notation pour la partie entière d'un nombre réel différera peut-être de celle utilisée par votre professeur. Nous avons choisi de noter $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x .

Remerciements

Carine Apparicio a rédigé les programmes hebdomadaires et les questions de cours se trouvant au début de chaque chapitre, à l'usage de sa classe. Je la remercie vivement de me permettre de les reproduire ici (en les modifiant parfois très légèrement).

Toutes les figures ont été réalisées avec le logiciel TexGraph (<http://texgraph.tuxfamily.org/>) conçu par Patrick Fradin, que je remercie pour son aide. Je remercie aussi les spécialistes de L^AT_EX 2_ε du forum <http://www.mathematex.net/> pour leur aide et leurs conseils techniques.

Je tiens également à remercier Gilles Auriol, Olivier Bordellès, Gilles Boutte, Patricia Chwat, Frédéric Denizet, Jean-Pierre Ehrmann, Bruno Ingrao, Anne Pogodalla, Bernard Schott et Claire Tête qui ont bien voulu consacrer du temps à relire des parties du manuscrit afin de proposer des améliorations et de trouver les erreurs. Il en reste certainement . . .

Je veux aussi remercier chaleureusement Rached Mneimné pour avoir accepté de publier ce projet aux éditions Calvage et Mounet et m'avoir apporté ses conseils avisés et ses connaissances afin d'améliorer le contenu de cet ouvrage.

Mes remerciements vont aussi à Radja Sauperamianie qui a dessiné la couverture et à Angela Taylor qui a réalisé les deux illustrations qui ouvrent et referment ce livre.

Enfin, cet ouvrage n'existerait pas sans la confiance que m'ont accordée les enseignants de classes préparatoires pour lesquels je colle ou j'ai collé. Il n'existerait pas non plus sans leurs élèves, qui ont activement travaillé sur les exercices qui leur étaient proposés, en indiquant d'éventuels problèmes dans la rédaction d'un énoncé, en m'obligeant à préciser les indications à apporter au cours de la résolution et, parfois, en produisant une solution originale, par exemple la première solution de l'exercice XVII.9 ou la seconde solution de l'exercice XX.4 b).

Éric Kouris

Il y a plusieurs moyens d'échapper au sérieux :

- ▷ le comique, qui est pour l'auteur une façon de communiquer au lecteur les raisons de son allégresse ;
- ▷ l'humour, que l'auteur ne semble pas désirer communiquer, mais qu'il lui laisse apercevoir ;
- ▷ et surtout la jubilation, que l'auteur évite soigneusement de communiquer à qui que ce soit.

C'est au lecteur de la débusquer lui-même, hors de toute trace de comique ou d'humour.

Ce n'est pas si facile, car la jubilation parfois ressemble fort à l'ennui et même à la mélancolie.

Le lecteur ne peut être à peu près sûr qu'il s'agit vraiment de jubilation de l'auteur, que s'il la partage.

Et encore ! Ce n'est pas si simple !

François Caradec, *La jubilation* (tiré de *Entre Miens*)

Préface à la deuxième édition

Cependant, si l'on me demande en quoi consiste véritablement l'art de la mémoire, je répondrai que c'est dans l'exercice et le travail. Apprendre beaucoup, méditer beaucoup, et, si on le peut, tous les jours, voilà ce qu'il y a de plus efficace. Rien ne s'accroît autant par la culture, rien ne diminue autant par la négligence. On ne saurait donc, comme je l'ai recommandé, faire apprendre de trop bonne heure aux enfants tout ce qu'ils pourront retenir ; et, à quelque âge que ce soit, quiconque voudra cultiver sa mémoire doit se résoudre à dévorer d'abord l'ennui de repasser sans cesse ce qu'il a écrit, ce qu'il a lu, et de remâcher, pour ainsi dire, les mêmes aliments.

Quintilien, *Institution oratoire*, livre XI

Ce que contient ce livre

La structure de l'ouvrage n'a pas changé dans cette nouvelle édition. Chaque chapitre commence encore par le programme de la semaine, suivi de questions de cours, puis d'exercices accompagnés d'indications et d'une solution détaillée.

Mais, le programme de math. sup. MPSI ayant changé depuis la première édition, le contenu de l'ouvrage s'est adapté à ce changement. Ainsi, nous avons supprimé les chapitres portant sur des notions qui ont disparu du programme de math. sup. et de math. spé. (à l'exception de la formule de Taylor–Lagrange) et déplacé en annexe les exercices portant sur des notions maintenant enseignées en math. spé. Nous avons, bien sûr, ajouté de nouveaux chapitres portant sur les notions nouvelles, séries numériques et probabilités. Enfin, nous avons enrichi la plupart des autres chapitres (en fait, tous sauf celui sur les développements limités), en y ajoutant de nouveaux exercices et en complétant certains exercices déjà présents dans l'édition précédente, par l'ajout de questions, de remarques ou de nouvelles solutions.

Enfin, nous avons choisi une police de caractères un peu plus petite que dans l'édition précédente, en espérant que cela ne gêne pas le lecteur.

Remerciements

Carine Apparicio a rédigé les programmes hebdomadaires et les questions de cours se trouvant au début de chaque chapitre, à l'usage de sa classe. Je la remercie à nouveau vivement de me permettre de les reproduire ici (en les modifiant parfois très légèrement).

Les figures sont encore réalisées avec le logiciel TexGraph (<http://texgraph.tuxfamily.org/>) conçu par Patrick Fradin, que je remercie pour son aide. Je remercie aussi les spécialistes de $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ du forum <http://www.mathematex.net/> pour leur aide.

Je tiens également à remercier Olivier Bordellès, Olivier Garet, Georges Skandalis, Frédéric Testard et Claire Tête, qui ont bien voulu consacrer du temps à relire des parties du manuscrit afin de proposer des améliorations et de trouver d'éventuelles erreurs. Il en reste certainement ...

Je veux aussi remercier Alberto Arabia et Rached Mneimné pour avoir accepté de publier une seconde édition de ce projet aux éditions Calvage et Mounet et pour m'avoir encore apporté leurs conseils (toujours) avisés et leurs connaissances.

Enfin, cette édition, comme la précédente, n'existerait pas sans la confiance que m'accordent les enseignants de classes préparatoires pour lesquels je colle ou j'ai collé. Elle n'existerait pas non plus sans les élèves qui ont travaillé, lors de colles, sur les exercices qui vous sont proposés dans cet ouvrage.

Éric Kouris

Table des matières

I. Révisions et compléments d'algèbre – Nombres complexes	1
II. Nombres complexes (suite) – Éléments de logique	41
III. Relations binaires – Notion d'application	61
IV. Rappels d'analyse – Fonctions usuelles	77
V. Fonctions usuelles (suite)	95
VI. Calcul intégral	117
VII. Étude locale des fonctions au voisinage d'un point	143
VIII. Équations différentielles	155
IX. Le corps ordonné \mathbb{R}	173
X. Suites numériques	191
XI. Groupes, anneaux, corps	233
XII. Arithmétique dans \mathbb{Z}	259
XIII. Polynômes à une indéterminée	303
XIV. Algèbre linéaire (sans dimension)	343
XV. Limites et continuité	359
XVI. Algèbre linéaire : la théorie de la dimension finie	387
XVII. Algèbre linéaire et dimension finie	399
XVIII. Dérivation d'une fonction d'une variable réelle	419
XIX. Dérivation d'une fonction – Étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$	437
XX. Matrices	463
XXI. Matrices (suite)	487
XXII. Intégration	537
XXIII. Intégration (suite)	571
XXIV. Fractions rationnelles, calcul des primitives	595
XXV. Groupe symétrique, déterminants	621
XXVI. Espaces euclidiens	675
XXVII. Séries à termes réels ou complexes	705
XXVIII. Ensembles finis et dénombrement	767
XXIX. Probabilités – Variables aléatoires (début)	795
XXX. Variables aléatoires définies sur un univers fini (suite)	819
A. Morphisme et quotient	847
B. Formules de Taylor	875
C. Convexité	895
D. Fonctions réelles de deux variables réelles	923
Bibliographie	947
Index	963