Si $\alpha > 0$, alors $|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}| = \frac{1}{n^\alpha}$ tend vers 0 en décroissant et, d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Propriété. Une série absolument convergente est convergente.

Remarque. La réciproque est fausse. En effet, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais n'est pas absolument convergente.

1.2. Relations de comparaison

Propriété. Si v_n est de signe constant à partir d'un certain rang et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

Remarque. Ce résultat est faux si v_n ne garde pas un signe constant à partir d'un certain rang. Par exemple, si $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors $u_n \sim v_n$ au voisinage de l'infini, mais la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est convergente (d'après le critère spécial des séries alternées) alors que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est divergente (comme étant la somme d'une série convergente et d'une série divergente).

Propriété. Si $v_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et si la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est convergente, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge.

Remarques. ▷ Ce résultat est faux si v_n n'est pas positif à partir d'un certain rang. En effet, on a $\frac{1}{n} = O\big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big)$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, alors que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

▷ On a le même résultat avec $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Propriété. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs à partir d'un certain rang telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$. Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, il en est alors de même pour la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$.

Propriété (*développement asymptotique*). Soit f une fonction possédant un développement limité à l'ordre p au voisinage de 0,

$$f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + o(x^p).$$

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = f(u_n)$. On a

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} a_0 + a_1 u_n + \cdots + a_p u_n^p + o(u_n^p).$$

On souhaite étudier la nature de la série de terme général v_n. La question qui se pose est de savoir à quel ordre p effectuer le développement limité de f au voisinage de 0. L'entier p qui convient est le plus petit entier naturel tel que u_n^p soit de signe constant, ou bien tel que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^p$ soit absolument convergente.

Exemples. $\triangleright$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln\big(1+\frac{(-1)^n}{n}\big)$ est convergente. En effet,

$$\ln\Big(1+\frac{(-1)^n}{n}\Big) \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot$$

D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. De plus, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln\big(1+\frac{(-1)^n}{n}\big)$ converge.

$\triangleright$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ diverge, car

$$\ln\Big(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big) \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\cdot$$

D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. De plus, $\frac{-1}{2n} + o(\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ est divergente comme étant la somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Propriété (*règle de Riemann* en $+\infty$). Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes positifs.

- $\triangleright$ S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
- $\triangleright$ S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

Exemples. $\triangleright$ Pour tout $\sigma > 1$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\sigma (\ln n)^\beta}$ est convergente, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^\sigma(\ln n)^\beta} = 0$ pour $\alpha \in \,]1\,,\sigma[$.

$\triangleright$ Pour tout $\sigma < 1$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\sigma(\ln n)^\beta}$ est divergente, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^\sigma(\ln n)^\beta} = +\infty$ pour $\alpha \in \,]\sigma\,,1[$.

Exercice 2.24 (*inégalité de Carleman*, d'après X) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle à valeurs strictement positives. On suppose que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k u_k$.

a) i) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{w_n}{n} = 0$.

ii) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{w_n}{n(n+1)} = \frac{-w_N}{N+1} + \sum_{n=1}^{N} u_n.$$

En déduire que la série $\sum \frac{w_n}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

b) i) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\sum\limits_{k=2}^{n} \ln k \geqslant n\big(\ln(n+1) - 1\big)$. En déduire que

$$\Big(\prod_{k=1}^{n} u_k\Big)^{1/n} \leqslant \frac{e}{n+1}\Big(\prod_{k=1}^{n} k u_k\Big)^{1/n} \leqslant \frac{e w_n}{n(n+1)}.$$

ii) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \big(\prod\limits_{k=1}^{n} u_k\big)^{1/n}$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\prod_{k=1}^{n} u_k\Big)^{1/n} \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

Exercice 2.25 (d'après Centrale) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soient

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sqrt{k} \qquad \text{et} \qquad \lambda_n = b_n + b_{n+1}.$$

a) Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) i) Montrer que $b_{2n} \sim \sqrt{\frac{n}{2}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

ii) En déduire un équivalent de b_n en $+\infty$.

c) i) Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \neq 0$ (*indication* : on pourra utiliser une série télescopique).

ii) Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{b_n} = \frac{2\times(-1)^n}{\sqrt{n+1}} - \frac{2\lambda_n}{n+1} + O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big).$$

En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{b_n}$.

Exercice 2.26 (d'après X) Soit $\sum u_n$ une série divergente à termes strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

a) Soient $\alpha > 1$ et $N \in \mathbb{N}$. Donner une majoration de la somme $\sum_{n=0}^{N} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ en la comparant à une intégrale. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.

b) On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{S_n}$ converge. Soit $N \in \mathbb{N}$. Donner une minoration de $\sum_{n=0}^{N} \frac{u_n}{S_{n-1}}$ en comparant cette somme à une intégrale. Conclure.

c) En déduire que pour tout $\alpha \leqslant 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ diverge.

Exercice 2.27 (séries de Hardy, d'après X) On appelle *série de Hardy* la série numérique de terme général $\left(u_n = \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer la nature de la série de Hardy pour $\alpha > 1$.

b) Dans cette question, on suppose que $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

   i) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

   ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $u_n - v_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1/2}}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire la nature de la série de Hardy.

c) Montrer que

$$\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n}) = -\frac{\pi\sin(\pi\sqrt{n})}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2\cos(\pi\sqrt{n})}{8n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\cdot$$

lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire la nature de la série de Hardy lorsque $\alpha = \frac{1}{2}\cdot$

d) Dans cette question, on suppose que $\alpha < \frac{1}{2}$. Posons $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\pi\sqrt{k})}{k^\alpha}\cdot$

   i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\pi\sqrt{k})}{\sqrt{k}} = \frac{S_n}{n^{1/2-\alpha}} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k\left(\frac{1}{k^{1/2-\alpha}} - \frac{1}{(k+1)^{1/2-\alpha}}\right)\cdot$$

   ii) En déduire la nature de la série de Hardy.

3. Énoncés des problèmes

Problème 2.1 (série de Dirichlet) On appelle *série de Dirichlet* toute série de la forme $\sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n z}$, où $z \in \mathbb{C}$, $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite à valeurs complexes et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels positifs, strictement