Michel Balazard

Le théorème des nombres premiers

Calvage & Mounet

MICHEL BALAZARD est chargé de recherches au Centre national de la recherche scientifique. Il exerce son activité à l'université d'Aix-Marseille. Ses travaux mathématiques concernent la théorie analytique des nombres.

balazard@math.cnrs.fr

Mathematics Subject Classification (2010) :

11-N05 Distribution of primes

ISBN 978-2-91-635252-7

9 782916 352527

∞ Imprimé sur papier permanent

*« Mon maître Jules Tannery citait volontiers une phrase de Liouville ;
après avoir comparé les démonstrations longues
aux démonstrations courtes, il concluait : En somme,
les démonstrations longues ont un grand avantage, c'est d'être longues,
et les démonstrations courtes ont un grand avantage, c'est d'être courtes. »*

ÉMILE BOREL

Préface

Une introduction à l'application des méthodes de l'analyse réelle à l'étude de la répartition des nombres premiers : le titre décrivant précisément l'intention qui a guidé l'écriture de ce livre est décidément trop long ! Celui choisi n'est cependant pas trompeur, et le texte a bien pour fil conducteur l'énoncé emblématique de la théorie analytique des nombres, la loi asymptotique de répartition des nombres premiers.

Cet énoncé affirme que le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x est asymptotiquement équivalent à $x/\ln x$, quand x tend vers l'infini. La démonstration dont l'exposé détaillé est l'objet de ce livre est traditionnellement qualifiée d'*élémentaire*, mais ce mot n'a de sens que si l'on précise quels « éléments de mathématique » sont admis dans l'argumentation. En l'occurrence, on s'autorise l'utilisation des notions nécessaires à la formulation même du théorème : l'analyse réelle, les fonctions arithmétiques.

La démonstration classique d'Hadamard et la Vallée Poussin (1896) mit en œuvre les idées géniales de Riemann sur l'application de la théorie des fonctions d'une variable complexe à l'étude des nombres premiers. Ces idées étaient si originales, et le résultat si brillant, presque parfait, que peu nombreux furent ceux qui se décidèrent à chercher une autre voie, élémentaire, vers la démonstration. Celle-ci ne fut finalement trouvée que plus d'un demi-siècle plus tard, par Erdős et Selberg (1949). Leurs idées renouvelèrent profondément ce domaine de recherches ; elles sont maintenant harmonieusement insérées dans la théorie générale des fonctions arithmétiques. J'ai conçu mon exposé des idées d'Erdős et Selberg à partir de celui de Postnikov et Romanov (1955), et mon projet a été de présenter cette démonstration comme l'un des résultats, venant à son heure, d'une théorie devant être développée avec toute l'ampleur qu'elle mérite, et non comme un tour de force technique, isolé et stérile.

L'ambition et le volume limités de ce livre indiquent qu'il ne s'agit pas d'une introduction systématique à la théorie analytique des nombres. Même en se limitant à la variable réelle, des aspects importants ne sont pas traités : séries de Dirichlet, intégrale de Stieltjes, fonctions multiplicatives, méthodes de crible... À l'inverse, j'ai développé certains à-côtés qui n'étaient pas indispensables au but poursuivi, notamment à propos de la formule sommatoire d'Euler et Maclaurin ou de la méthode de Tchebychev. Pour approfondir la connaissance et la pratique de cette discipline, la lecture de l'*Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres* de Tenenbaum est vivement recommandée.

La première version du présent texte, parue en russe dans la collection de l'école d'été « Mathématiques contemporaines » des éditions du CMFCM [1], était la version développée d'une série de quatre cours donnés à l'école d'été « Mathématiques Contemporaines » de Dubna (Russie) en 2009, école destinée aux élèves des lycées et des universités. Le contenu a été également l'objet de deux exposés dans le cadre du séminaire pour étudiants « Mathematic Park » à Paris en 2010. La présente version est plus approfondie, mais reste certainement accessible à partir des connaissances acquises dans les deux premières années d'université.

Les soixante-trois exercices permettent d'assimiler activement les notions et techniques introduites. De style et de difficulté très variables, ils présentent parfois des résultats utilisés librement dans la suite de l'exposé, ou demandent d'expliciter numériquement certaines estimations, éventuellement à l'aide d'un ordinateur. Des solutions sont proposées en fin d'ouvrage. Elles sont suivies par des notes bibliographiques sur certains paragraphes et exercices, indiquant quelques prolongements possibles à la lecture de ce livre. Bien entendu, l'absence de références pour tel ou tel énoncé ne doit pas être interprétée comme une prétention à l'originalité de ma part.

1. *Асимптотический закон распределения простых чисел*, paru en 2013 aux éditions du Centre moscovite de formation continue en mathématiques (acronyme russe : МЦНМО ; anglais : MCCME).

Remerciements

De nombreux mathématiciens m'ont apporté une aide précieuse par leur lecture attentive et critique du manuscrit, et par d'utiles corrections et améliorations. Je tiens à remercier plus particulièrement Xavier Caruso, Arnaud Chadozeau, Sébastien Darses, Quentin Guignard, Marc Hindry, Victor Kleptsyn, Bruno Martin, Grigory Merzon et Eric Saias.

Quelques conventions et notations

Les adjectifs « positif », « négatif », « supérieur », « inférieur » sont employés au sens strict : x est positif si $x > 0$, etc. En revanche, les adjectifs « croissante » et « décroissante » le sont au sens large : la fonction f est croissante si $\forall x, y$, $(x \leqslant y) \Rightarrow \big(f(x) \leqslant f(y)\big)$.

L'adjectif « intégrable » est employé pour désigner une fonction à valeurs réelles, définie sur un segment, et intégrable au sens de Riemann ; en particulier, une telle fonction est bornée. Une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est dite *localement intégrable* si sa restriction à tout segment inclus dans I est intégrable.

Le symbole $\sim$ désigne l'équivalence asymptotique. L'écriture

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to \infty)$$

signifie que

$$f(x)/g(x) \to 1 \quad (x \to \infty).$$

Nous utilisons également les symboles O (notation de Bachmann) et o (notation de Landau). L'écriture

$$f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big) \quad (x \in \mathrm{A})$$

signifie qu'il existe une constante positive C telle que

$$|f(x)| \leqslant \mathrm{C}|g(x)| \text{ pour tout } x \in \mathrm{A},$$

et l'écriture

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \quad (x \to \infty)$$

signifie que

$$f(x)/g(x) \to 0 \quad (x \to \infty).$$

Nous emploierons parfois la notation de Vinogradov $f(x) \ll g(x)$, au lieu de $f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$.

La notation $f(a-0)$ désigne la limite à gauche de f au point a ; de même $f(a+0)$ désigne la limite à droite.

Nous utilisons la notation d'Iverson : $[\mathrm{A}] = 1$ si la propriété A est vérifiée, et $[\mathrm{A}] = 0$ sinon.

Table des matières