

Michel Balazard

Le théorème des nombres premiers



Calvage & Mounet

MICHEL BALAZARD est chargé de recherches au Centre national de la recherche scientifique. Il exerce son activité à l'université d'Aix-Marseille. Ses travaux mathématiques concernent la théorie analytique des nombres.

balazard@math.cnrs.fr

Mathematics Subject Classification (2010) :

11-N05 Distribution of primes

∞ Imprimé sur papier permanent

© Calvage & Mounet, Paris, 2016

ISBN 978-2-91-635252-7



« Mon maître Jules Tannery citait volontiers une phrase de Liouville ;
après avoir comparé les démonstrations longues
aux démonstrations courtes, il concluait : En somme,
les démonstrations longues ont un grand avantage, c'est d'être longues,
et les démonstrations courtes ont un grand avantage, c'est d'être courtes. »

ÉMILE BOREL

Préface

Une introduction à l'application des méthodes de l'analyse réelle à l'étude de la répartition des nombres premiers : le titre décrivant précisément l'intention qui a guidé l'écriture de ce livre est décidément trop long ! Celui choisi n'est cependant pas trompeur, et le texte a bien pour fil conducteur l'énoncé emblématique de la théorie analytique des nombres, la loi asymptotique de répartition des nombres premiers.

Cet énoncé affirme que le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x est asymptotiquement équivalent à $x/\ln x$, quand x tend vers l'infini. La démonstration dont l'exposé détaillé est l'objet de ce livre est traditionnellement qualifiée d'*élémentaire*, mais ce mot n'a de sens que si l'on précise quels « éléments de mathématique » sont admis dans l'argumentation. En l'occurrence, on s'autorise l'utilisation des notions nécessaires à la formulation même du théorème : l'analyse réelle, les fonctions arithmétiques.

La démonstration classique d'Hadamard et la Vallée Poussin (1896) mit en œuvre les idées géniales de Riemann sur l'application de la théorie des fonctions d'une variable complexe à l'étude des nombres premiers. Ces idées étaient si originales, et le résultat si brillant, presque parfait, que peu nombreux furent ceux qui se décidèrent à chercher une autre voie, élémentaire, vers la démonstration. Celle-ci ne fut finalement trouvée que plus d'un demi-siècle plus tard, par Erdős et Selberg (1949). Leurs idées renouvelèrent profondément ce domaine de recherches ; elles sont maintenant harmonieusement insérées dans la théorie générale des fonctions arithmétiques. J'ai conçu mon exposé des idées d'Erdős et Selberg à partir de celui de Postnikov et Romanov (1955), et mon projet a été de présenter cette démonstration comme l'un des résultats, ve-

nant à son heure, d'une théorie devant être développée avec toute l'ampleur qu'elle mérite, et non comme un tour de force technique, isolé et stérile.

L'ambition et le volume limités de ce livre indiquent qu'il ne s'agit pas d'une introduction systématique à la théorie analytique des nombres. Même en se limitant à la variable réelle, des aspects importants ne sont pas traités : séries de Dirichlet, intégrale de Stieltjes, fonctions multiplicatives, méthodes de crible... À l'inverse, j'ai développé certains à-côtés qui n'étaient pas indispensables au but poursuivi, notamment à propos de la formule sommatoire d'Euler et Maclaurin ou de la méthode de Tchebychev. Pour approfondir la connaissance et la pratique de cette discipline, la lecture de *l'Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres* de Tenenbaum est vivement recommandée.

La première version du présent texte, parue en russe dans la collection de l'école d'été « Mathématiques contemporaines » des éditions du CMFCM¹, était la version développée d'une série de quatre cours donnés à l'école d'été « Mathématiques Contemporaines » de Dubna (Russie) en 2009, école destinée aux élèves des lycées et des universités. Le contenu a été également l'objet de deux exposés dans le cadre du séminaire pour étudiants « Mathematic Park » à Paris en 2010. La présente version est plus approfondie, mais reste certainement accessible à partir des connaissances acquises dans les deux premières années d'université.

Les soixante-trois exercices permettent d'assimiler activement les notions et techniques introduites. De style et de difficulté très variables, ils présentent parfois des résultats utilisés librement dans la suite de l'exposé, ou demandent d'explicitier numériquement certaines estimations, éventuellement à l'aide d'un ordinateur. Des solutions sont proposées en fin d'ouvrage. Elles sont suivies par des notes bibliographiques sur certains paragraphes et exercices, indiquant quelques prolongements possibles à la lecture de ce livre. Bien entendu, l'absence de références pour tel ou tel énoncé ne doit pas être interprétée comme une prétention à l'originalité de ma part.

1. *Асимптотический закон распределения простых чисел*, paru en 2013 aux éditions du Centre moscovite de formation continue en mathématiques (acronyme russe : МЦНМО ; anglais : MCCME).

Remerciements

De nombreux mathématiciens m'ont apporté une aide précieuse par leur lecture attentive et critique du manuscrit, et par d'utiles corrections et améliorations. Je tiens à remercier plus particulièrement Xavier Caruso, Arnaud Chadozeau, Sébastien Darses, Quentin Guignard, Marc Hindry, Victor Kleptsyn, Bruno Martin, Grigory Merzon et Eric Saias.

Quelques conventions et notations

Les adjectifs « positif », « négatif », « supérieur », « inférieur » sont employés au sens strict : x est positif si $x > 0$, etc. En revanche, les adjectifs « croissante » et « décroissante » le sont au sens large : la fonction f est croissante si $\forall x, y, (x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))$.

L'adjectif « intégrable » est employé pour désigner une fonction à valeurs réelles, définie sur un segment, et intégrable au sens de Riemann ; en particulier, une telle fonction est bornée. Une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , est dite *localement intégrable* si sa restriction à tout segment inclus dans I est intégrable.

Le symbole \sim désigne l'équivalence asymptotique. L'écriture

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow \infty)$$

signifie que

$$f(x)/g(x) \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \infty).$$

Nous utilisons également les symboles O (notation de Bachmann) et o (notation de Landau). L'écriture

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \in A)$$

signifie qu'il existe une constante positive C telle que

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \text{ pour tout } x \in A,$$

et l'écriture

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow \infty)$$

signifie que

$$f(x)/g(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty).$$

Nous emploierons parfois la notation de Vinogradov $f(x) \ll g(x)$, au lieu de $f(x) = O(g(x))$.

La notation $f(a-0)$ désigne la limite à gauche de f au point a ; de même $f(a+0)$ désigne la limite à droite.

Nous utilisons la notation d'Iverson : $[A] = 1$ si la propriété A est vérifiée, et $[A] = 0$ sinon.

Table des matières

I. La loi asymptotique de répartition des nombres premiers

1. Sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée	1
2. Brève histoire du théorème des nombres premiers	2
3. Les fonctions arithmétiques et leurs fonctions sommatoires	5
Exercices du chapitre I	7

II. La formule sommatoire d'Euler et Maclaurin

1. La formule de Sonine	9
2. Le second théorème de la moyenne	11
3. Fonctions, polynômes et nombres de Bernoulli	13
4. Formule d'Euler et Maclaurin avec reste intégral	15
5. Quatre applications de la formule de Sonine	16
5.1. Fonction $f_{1,0}(t) = 1/t$	16
5.2. Fonction $f_{0,1}(t) = \ln t$	17
5.3. Fonction $f_{1,1}(t) = t^{-1} \ln t$	18
5.4. Fonction $f_{0,2}(t) = \ln^2 t$	18
Exercices du chapitre II	19

III. L'algèbre des fonctions arithmétiques

1. Le théorème fondamental de l'arithmétique	21
2. La convolution des fonctions arithmétiques	22
3. Séries de Dirichlet formelles	24
4. La fonction de von Mangoldt	25
5. La fonction de Möbius	25
6. Dérivation dans l'algèbre de Dirichlet	28
7. Fonctions de von Mangoldt généralisées	30
Exercices du chapitre III	31

IV. Les fonctions arithmétiques comme opérateurs

1. Fonction sommatoire du produit de convolution de deux fonctions arithmétiques	33
2. Les opérateurs S_f	34
3. Fonctions en escalier et fonctions lisses	36
4. Transformation d'Abel	37
5. Table de valeurs de l'opérateur S_1	37
6. Inversion de Möbius	38
7. Généralisations possibles	39
Exercices du chapitre IV	39

V. La fonction sommatoire de la fonction de von Mangoldt

1. Forme équivalente du théorème des nombres premiers	43
2. Premières observations	45
3. Identité pour la fonction ψ	46
4. Ordre de grandeur de $\psi(x)$	49
5. L'identité de Selberg	50
Exercices du chapitre V	52

VI. Estimation des sommes de convolution

1. L'opérateur S_1 et les sommes de Riemann	55
2. Le lemme d'Axer, première version	57
3. Fonctions à variation bornée	59
4. Le lemme d'Axer, seconde version	61
5. Majorations	62
Exercices du chapitre VI	63

VII. La méthode de Tchebychev

1. Inversion de Möbius approchée	65
2. Premier exemple	67
3. Étude d'une suite de fonctions de Möbius approchées	68
4. Application à d'autres fonctions sommatoires	71
Exercices du chapitre VII	72

VIII. La valeur moyenne de la fonction de Möbius

1. Le lemme d'Ayer appliqué à l'étude asymptotique de $\psi(x)$	75
2. Autres applications du lemme d'Ayer	76
3. Petites valeurs de $M(x)/x$	77
4. Première tentative	79
5. Inégalité intégrale vérifiée par $M(x)$	81
Exercices du chapitre VIII	83

IX. Inégalités intégrales

1. Réduction du problème à une pure question d'analyse	85
2. Formulation additive du problème	86
3. Un critère de convergence	88
4. Majoration de l'intégrale	89
5. Le lemme principal	91
6. Fin de la démonstration de la proposition IX-2.1	93
Exercices du chapitre IX	94

X. Conclusion

1. Vue d'ensemble	95
2. Et après ?	97

Solutions des exercices	99
Notes bibliographiques	133
Bibliographie	139
Index	143