Bruno Kahn

Fonctions zêta et L de variétés et de motifs

Calvage & Mounet

Bruno Kahn est directeur de recherche au CNRS.

bruno.kahn@imj-prg.fr

Mathematics Subject Classification (2010) :

14G10 Zeta-functions and related questions

ISBN 978-2-916352-71-8

Imprimé sur papier permanent

© Calvage & Mounet, Paris, 2018

Introduction

Gauss a décrit la théorie des nombres comme la reine des mathématiques. Et, en effet, la quantité de mathématiques inventées pour des raisons arithmétiques est étonnante. Citons :

— une bonne partie de l'analyse complexe (Cauchy, Riemann, Weierstraß, Hadamard, Hardy-Littlewood...) ;

— la théorie des diviseurs (Kummer, Dedekind) puis des idéaux (E. Noether) ;

— la théorie des surfaces de Riemann (Riemann...) ;

— la version non analytique du théorème de Riemann-Roch pour les courbes (F. K. Schmidt) ;

— la refondation de la géométrie algébrique italienne sur la base de l'algèbre commutative (Weil) ; [1]

— la théorie des variétés abéliennes (Weil) ;

— une partie de la théorie des représentations linéaires des groupes finis (E. Artin, Brauer) ;

— une bonne partie de l'algèbre homologique : cohomologie des groupes, théorie des faisceaux sur un site quelconque (Cartan, Eilenberg, Serre, Tate, Grothendieck...) ;

— pour une part, la théorie des schémas (Grothendieck) ;

— le développement de la cohomologie étale (M. Artin, Grothendieck, Verdier, Deligne...), puis cristalline (Grothendieck, Berthelot, Ogus, Bloch, Deligne, Illusie...) ;

— pour une part, la notion de catégorie dérivée (Grothendieck, Verdier) ;

— le formalisme des six opérations (Grothendieck) ;

— la théorie de la monodromie dans le monde des schémas (Grothendieck, Serre, Deligne, Katz...) ;

et, bien sûr, la théorie des motifs !

---

1. van der Waerden et Zariski ont aussi participé à ce mouvement, pour des raisons différentes.

Les fonctions zêta et les fonctions L sont le point de rencontre des théories citées ci-dessus : elles couronnent la reine des mathématiques. Il est remarquable qu'une fonction de définition aussi élémentaire que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ait joué un rôle aussi profond, connaissant de vastes généralisations qui ont modelé l'évolution de la théorie des nombres jusqu'à aujourd'hui, et reste l'objet d'une conjecture dont les analogues pour les variétés sur les corps finis ont été fameusement démontrées par Weil et Deligne, mais que personne ne sait approcher dans le cas originel de Riemann.

Le texte qui suit est issu d'un cours de M2 donné à Jussieu en 2013. J'ai essayé d'y exposer une partie des résultats connus sur les fonctions zêta et L, mais aussi la problématique complexe qui les entoure, de manière ontogénétique : l'ontogenèse décrit le développement progressif d'un organisme depuis sa conception jusqu'à sa forme mûre. Dans ce but, j'ai parsemé le texte de citations et de commentaires, qui, je l'espère, offriront au lecteur ou à la lectrice une petite fenêtre sur l'histoire des idées dans ce domaine.

Après avoir rappelé les résultats (et hypothèse) classiques sur la fonction zêta de Riemann au chapitre I, j'introduis les fonctions zêta des $\mathbf{Z}$-schémas de type fini au chapitre suivant, lequel est consacré pour l'essentiel à la démonstration de l'hypothèse de Riemann pour les courbes sur un corps fini. À mon grand regret, je n'ai pas pu faire justice à la démonstration par Weil de l'inégalité de Castelnuovo-Severi dans [Wei2] : la retranscrire dans le langage des schémas m'aurait entraîné trop loin. Je me suis borné, au § II-9.5, à donner une idée de cette démonstration et à traiter le cas facile du genre 1 (dû à Hasse). Pour le cas général, j'ai fait comme tout le monde, en donnant la preuve de Mattuck-Tate et Grothendieck, qui repose sur une inégalité *a priori* plus faible ; à titre de lot de consolation, je compare les deux inégalités au § II-9.7 et montre que l'on peut récupérer la première à partir de la seconde et de l'additivité de Pic^τ (diviseurs numériquement triviaux). On trouvera une seconde démonstration de l'inégalité de Castelnuovo-Severi au chapitre suivant, via les variétés abéliennes (§ III-2.2), qui explique et éclaire la première.

Le chapitre III est consacré aux conjectures de Weil. Elles y sont toutes démontrées, sauf la plus difficile : l'« hypothèse de Riemann ». J'y donne aussi un aperçu de la preuve p-adique, par Dwork, de la rationalité des fonctions zêta de variétés sur un corps fini (avant le développement des méthodes cohomologiques de Grothendieck !).

Le chapitre IV revient à des mathématiques plus élémentaires, en introduisant les fonctions L de Dirichlet, de Hecke et d'Artin. J'y donne la démonstration du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique par la méthode exposée par Serre dans [Ser3] ; il serait cependant dommage, comme me l'a souligné Pierre Charollois, d'oublier la méthode originelle de Dirichlet, qui donnait des renseignements supplémentaires anticipant la formule analytique du nombre de classes (voir remarque IV-2.2.4 (2)). J'introduis ensuite les deux généralisations des fonctions L de Dirichlet : celle de Hecke et celle d'Artin. J'énonce sans démonstration le théorème principal de Hecke : prolongement analytique et équation fonctionnelle (théorème IV-3.8.5), puis j'explique comment Artin et Brauer en déduisent les mêmes résultats pour les fonctions L non abéliennes (théorème IV-4.7.1).

Le chapitre suivant est la pièce de résistance de ce texte. Il commence par introduire l'idée approximative des fonctions L à la Hasse-Weil, et se termine en décrivant leur définition précise par Serre [109]. Entretemps, je décris les apports fondamentaux de Grothendieck et Deligne : rationalité et équation fonctionnelle des fonctions L de faisceaux l-adiques en caractéristique p, avec des démonstrations essentiellement complètes, théorie des poids et théorèmes de Deligne sur l'hypothèse de Riemann (dernière conjecture de Weil), cette fois sans démonstrations. Notamment, on trouvera au § V-4.4 une exposition de l'équation fonctionnelle des fonctions L développée par Grothendieck dans [CorrGS, lettre du 30-9-64], et au théorème V-6.8.2 un énoncé précis, et des éléments assez complets de démonstration, du théorème de Grothendieck et Deligne sur la rationalité et l'équation fonctionnelle des fonctions L de Hasse-Weil en caractéristique > 0, confirmant une conjecture de Serre (conjecture V-6.8.1) dans ce cas.

Le dernier chapitre est consacré aux motifs et à leurs fonctions zêta. Je me suis limité à un cas élémentaire : celui des motifs purs de Grothendieck associés aux variétés projectives lisses sur un corps fini. On peut aller beaucoup plus loin en utilisant les catégories triangulées de motifs introduites par Voevodsky et développées par Ivorra, Ayoub et Cisinski-Déglise, mais cela dépasserait le cadre de ce livre (voir [60]). J'explique tout de même comment ce point de vue clarifie considérablement l'usage d'une cohomologie de Weil pour démontrer la rationalité et l'équation fonctionnelle, et ne résiste pas au plaisir d'appliquer cette théorie pour démontrer un théorème un peu oublié de Weil : la conjecture d'Artin pour les fonctions L non abéliennes en caractéristique positive (§ VI-15).

Enfin, deux appendices donnent des compléments d'algèbre catégorique. J'ai aussi agrémenté le texte d'exercices, sans rien essayer de systématique.

Mise à part la théorie de Hecke, le versant automorphe de l'histoire n'est essentiellement pas abordé ; je me suis contenté de brèves allusions ici et là.

Il reste une question à éclaircir : quelle est la différence entre une fonction zêta et une fonction L ? Moralement, une fonction L est une fonction zêta « à coefficients » (dans un faisceau, dans une représentation...), et on retrouve une fonction zêta en prenant des coefficients triviaux (cf. § V-3). La situation se complique quand on considère les produits eulériens associés par Hasse et Weil à une courbe sur un corps de nombres... Et quelle terminologie et notation prendre dans le cas des motifs ? Pour les motifs purs, j'ai adopté ici celles des fonctions zêta, qui semblent bien établies ; il serait sans doute plus simple d'unifier la terminologie en laissant tomber l'une des deux notations, mais c'est évidemment délicat pour des raisons de tradition.

J'ai profité des expositions antérieures de la théorie, auxquelles j'ai largement emprunté : elles seraient trop nombreuses pour les citer toutes, je renvoie pour cela à la bibliographie. Je remercie aussi le public du cours, et tout particulièrement Matthieu Rambaud, de m'avoir signalé quantité de coquilles. Je remercie enfin Joseph Ayoub, Pierre Charollois, Luc Illusie, Amnon Neeman, Ram Murty et Jean-Pierre Serre pour des commentaires pertinents sur ce texte.

Guide de lecture

Ce livre n'est pas l'exposition systématique d'une théorie des fonctions zêta et L — qui n'existe pas, contrairement par exemple à la théorie du corps de classes. J'ai choisi avant tout de mettre en relief l'histoire des idées. Ainsi, certaines démonstrations sont complètes, mais dans d'autres cas j'ai préféré mettre l'accent sur les idées principales plutôt que d'offrir une preuve complète, mais trop technique ; quand une telle preuve est déjà disponible, je renvoie à des ouvrages contenant les éléments manquants. Au contraire, dans d'autres cas j'ai fourni des détails qui ne sont pas explicites dans la littérature.

Voici des points que j'ai cru bon de détailler, parce que je n'ai pas réussi à les trouver exposés ailleurs.

— § V-2 : discussion de la notion de bonne réduction en relation avec les fonctions zêta de Hasse-Weil (voir notamment la proposition V-2.2).

— § V-4 : l'équation fonctionnelle de Grothendieck décrite dans [CorrGS, lettre du 30-9-64] (théorèmes V-4.4.1 et V-4.5.1).

— Le théorème V-6.8.2, déduisant de cette équation fonctionnelle celle décrite par Serre dans [109, 4.1, exemple a)], avec une précision résultant de « Weil II » (Deligne [30]).

— § VI-8 : théorie de la spécialisation pour les motifs purs.

— §§ VI-12 et VI-13 : la fonction zêta d'un endomorphisme d'un motif, sa rationalité et son équation fonctionnelle (voir aussi § A-2.8 pour une version catégorique abstraite, qui reproduit celle de [59, I] de manière un peu affaiblie).

— § VI-15 : preuve motivique de la conjecture d'Artin en caractéristique positive.

— § A-2.4 : notion de « catégorie avec suspension ».

J'ai rappelé sans démonstration des résultats standard comme le théorème de Riemann-Roch, la théorie des variétés abéliennes ou les bases de la théorie algébrique des nombres, pour lesquels il existe d'excellentes expositions.

J'ai aussi supposé les lecteurs familiers avec un certain nombre de choses, variant d'un chapitre à l'autre.

— Chapitres I, II et §§ IV-1, IV-2 : des bases d'analyse complexe.

— § I-10 et chapitre IV : des bases de théorie algébrique des nombres, comme par exemple dans le livre de Lang [Lan2], dans Cassels-Fröhlich [CF] ou dans beaucoup d'autres ouvrages.

— Chapitres II et III : des bases de géométrie algébrique, comme on les trouve par exemple dans le livre de Hartshorne [Har2] ; des bases de la théorie de l'intersection, comme on les trouve dans le livre de Fulton [Ful].

— § IV-3 : des bases de topologie générale.

— §§ IV-4 et IV-6 : des bases de théorie des représentations linéaires des groupes finis, comme dans le livre de Serre [Ser1].

— Chapitre V : des bases nettement plus sérieuses de théorie des schémas et de cohomologie étale, ces dernières développées dans [SGA4, SGA4$\frac{1}{2}$, SGA5] et [Mil]. Ce chapitre est sans doute le plus difficile à lire.

— Chapitre VI, quelques bases d'algèbre catégorique, comme dans le livre de Mac Lane [Mcl].

Table des matières

Chapitre I

La fonction zêta de Riemann

C'est

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \cdot$$

Elle a été étudiée par Euler, puis par Riemann.

1. Un peu d'histoire

1.1. Euler

Il établit

— $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ (problème de Bâle, 1735).

— *Produit eulérien* : $\zeta(s) = \displaystyle\prod_{p \text{ premier}} (1 - p^{-s})^{-1}$ (thèse, 1737).

Il obtient une formule plus générale

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!},$$

où les B_n sont les *nombres de Bernoulli-Seki*[2].

2. Seki Takakazu ou Seki Kôwa est un mathématicien japonais contemporain de Bernoulli, qui a découvert les « nombres de Bernoulli » à la même période que ce dernier, soit vers la fin du XVII^e siècle.

1.2. Riemann ([91], 1859)

Il étudie la fonction $\zeta(s)$, pour $s \in \mathbf{C}$.

— Elle converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.

— Prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$, pôle simple en $s = 1$, résidu $= 1$.

— Équation fonctionnelle (conjecturée essentiellement par Euler, en 1749) : si $\Lambda(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$, alors

$$\Lambda(s) = \Lambda(1-s).$$

— Hypothèse de Riemann sur la distribution des zéros de $\zeta(s)$.

L'équation fonctionnelle donne une formule pour $\zeta(s)$ aux entiers négatifs (devinée par Euler) :

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1} \quad (n > 0), \qquad \zeta(0) = -\frac{1}{2}\cdot$$

La motivation de Riemann est le *théorème des nombres premiers* (distribution des nombres premiers). Ce dernier résultat est anticipé par Čebyšev (1848 – 1850) et finalement démontré par Hadamard et de la Vallée Poussin (1896).

Nous allons démontrer ci-dessous certains de ces résultats. Une partie de l'exposition qui suit est empruntée à Serre [Ser3].

2. Convergence absolue

2.1. Proposition. *La fonction $\zeta(s)$ converge absolument et uniformément sur tout compact du domaine $\mathrm{Re}(s) > 1$, où elle définit une fonction holomorphe, et diverge pour $s = 1$.*

Démonstration. Pour la convergence et la divergence, si $s = \sigma + it$ avec $\sigma, t \in \mathbf{R}$, on a $|n^{-s}| = n^{-\sigma}$, et l'on peut donc supposer $s \in \mathbf{R}$. On utilise alors l'énoncé suivant.

2.2. Lemme (test intégral). *Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une fonction décroissante. Alors, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(t)dt < \infty$.*

Démonstration. On a les inégalités :

$$f(n) = \int_n^{n+1} f(n)dt \geq \int_n^{n+1} f(t)dt \geq \int_n^{n+1} f(n+1)dt = f(n+1),$$

soit

$$\int_{n-1}^{n} f(t)dt \geq f(n) \geq \int_{n}^{n+1} f(t)dt,$$

et l'on somme. □

Cette démonstration donne aussi l'inégalité

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} n^{-s} \right| \leq \int_{N-1}^{\infty} t^{-\operatorname{Re}(s)} dt = \frac{(N-1)^{1-\operatorname{Re}(s)}}{\operatorname{Re}(s)-1},$$

d'où la convergence uniforme ; l'holomorphie résulte finalement du lemme suivant, appliqué aux sommes partielles. □

2.3. Lemme. *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$, et soit $f_n : U \to \mathbf{C}$ une suite de fonctions holomorphes, convergeant uniformément sur tout compact de U vers f. Alors, f est holomorphe dans U, et les dérivées f_n' des f_n convergent uniformément sur tout compact vers la dérivée f' de f.*

Démonstration. Soit D un disque fermé contenu dans U, de bord ∂D, orienté trigonométriquement, et soit $z_0 \in \mathring{D}$. On applique aux f_n la formule de Cauchy :

$$f_n(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f_n(z)}{z-z_0}\, dz.$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz,$$

ce qui montre que f est holomorphe dans U, d'où la première partie du lemme. La formule

$$f'(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, dz$$

donne la seconde partie, de la même manière. □

3. Produit eulérien

3.1. Proposition (Euler). *On a la factorisation*

$$\zeta(s) = \prod_{p} \frac{1}{1-p^{-s}},$$

où le produit, sur l'ensemble des nombres premiers, converge absolument pour $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Démonstration. Disons qu'une fonction $a : \mathbf{N} - \{0\} \to \mathbf{C}$ est *multiplicative* si elle vérifie l'identité $a(mn) = a(m)a(n)$ pour tous m, n premiers entre eux ; on dit que a est *complètement multiplicative* si la même identité vaut pour tous m, n. La proposition résulte alors du lemme suivant, appliqué à la fonction $a(n) = n^{-s}$. □

3.2. Lemme. *Soit a une fonction multiplicative. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a(n)| < +\infty$;

(ii) $\displaystyle\prod_{p} \big(1 + |a(p)| + \cdots + |a(p^m)| + \dots\big) < +\infty.$

Si ces conditions sont vérifiées, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n) = \prod_{p} \big(1 + a(p) + \cdots + a(p^m) + \dots\big),$$

et si a est complètement multiplicative :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n) = \prod_{p} \frac{1}{1 - a(p)}\cdot$$

Démonstration. Supposons (i) vérifié. En particulier, $\sum a(p^m)$ converge absolument pour tout p. Pour $x \in \mathbf{N}$, on a donc :

$$\sum_{n \in E(x)} a(n) = \prod_{p<x} \sum_{m} a(p^m),$$

où

$$E(x) = \{n \in \mathbf{N} - \{0\} \mid \text{tous les facteurs premiers de } n \text{ sont } < x\}.$$

D'où,

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a(n) - \prod_{p<x} \sum_{m} a(p^m)\Big| = \Big|\sum_{n \notin E(x)} a(n)\Big| \leqslant \sum_{n \geqslant x} |a(n)|,$$

ce qui montre que le produit infini converge vers $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a(n)$. En appliquant cela à $|a(n)|$, on voit que la convergence est absolue, donc (ii) est vrai.

Supposons (ii) vérifié. Alors,

$$\sum_{n<x} |a(n)| \leqslant \sum_{n \in E(x)} |a(n)| = \prod_{p<x} \big(1 + |a(p)| + \cdots + |a(p^m)| + \dots\big),$$

donc (i) est vrai. □

3.3. Corollaire. *La fonction $\zeta(s)$ ne s'annule pas pour* $\mathrm{Re}(s) > 1$. $\square$

3.4. Exercice (Euler). Montrer que $\sum_{p\in\mathcal{P}} 1/p$ diverge.

4. Séries formelles de Dirichlet

Cette notion est très pratique pour faire des calculs formels sans (pour commencer) se soucier de convergence.

4.1. Définition (cf. [Ell, ch. 3, A4]). On appelle *série formelle de Dirichlet* (à coefficients complexes) une expression

$$f = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s},$$

où n décrit l'ensemble des entiers positifs, et les a_n sont des nombres complexes. Si $f = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$ et $g = \sum_{n\geqslant 1} \frac{b_n}{n^s}$ sont deux séries formelles de Dirichlet, on définit leur somme et leur produit par

$$f + g = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n + b_n}{n^s},$$

$$fg = \sum_{n\geqslant 1} \frac{c_n}{n^s},$$

avec $c_n = \sum_{pq=n} a_p b_q$.

Les séries formelles de Dirichlet forment un anneau commutatif unitaire : l'algèbre des séries formelles de Dirichlet à coefficients complexes, notée $\mathrm{Dir}(\mathbf{C})$.

4.2. Remarque. L'algèbre $\mathrm{Dir}(\mathbf{C})$ n'est autre que l'*algèbre large* du monoïde multiplicatif $\mathbf{N} - \{0\}$ [BA3, ch. III, § 2, n° 10]. En écrivant tout entier comme produit de facteurs premiers, on voit donc qu'elle est isomorphe à l'algèbre des séries formelles à coefficients complexes en une infinité dénombrable de variables (cf. [BLie2, ex. 2 de l'appendice]).

4.3. Définition. Soit $f = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$ une série formelle de Dirichlet.

Si $f \neq 0$, on appelle *ordre* de f, et l'on note $\omega(f)$, le plus petit entier n tel que $a_n \neq 0$. Si $f = 0$, on pose $\omega(f) = +\infty$.

4.4. Proposition. *Les sous-ensembles* $\{f \mid \omega(f) \geqslant N\}$ *de* $\mathrm{Dir}(\mathbf{C})$ *sont des idéaux de* $\mathrm{Dir}(\mathbf{C})$. *Ils définissent une topologie sur* $\mathrm{Dir}(\mathbf{C})$ *pour laquelle* $\mathrm{Dir}(\mathbf{C})$ *est un anneau topologique complet.* □

4.5. Corollaire

(1) *Une suite* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est sommable dans* $\mathrm{Dir}(\mathbf{C})$ *si et seulement si on a* $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(f_n) = +\infty$.

(2) *Une suite* $(1 + f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, *où* $\omega(f_n) > 1$ *pour tout* n, *est multipliable dans* $\mathrm{Dir}(\mathbf{C})$ *si et seulement si* $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(f_n) = +\infty$. □

Le lemme 3.2 donne l'énoncé qui suit.

4.6. Proposition. *Soit* $a : \mathbf{N} - \{0\} \to \mathbf{C}$ *une fonction complètement multiplicative, et soit* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Dans l'identité formelle*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a(n)}{n^s} = \prod_p \Big(1 - \frac{a(p)}{p^s}\Big)^{-1},$$

le membre de gauche converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ *si et seulement si le membre de droite converge absolument pour* $\mathrm{Re}(s) > \alpha$.

4.7. Exercice

(a) Démontrer l'identité suivante dans $\mathrm{Dir}(\mathbf{C})$:

$$\zeta(s)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad \text{avec}$$

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n \text{ est produit de } k \text{ nombres premiers} \\ & \text{tous distincts}\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(La fonction $\mu(n)$ est appelée *fonction de Mœbius.*)

(b) Déduire de (a) la *formule d'inversion de Mœbius* : si $b_n = \sum\limits_{d\mid n} a_d$, alors $a_n = \sum\limits_{d\mid n} \mu(d) b_{n/d}$.

Plus généralement, soit $f : [1, +\infty[\to \mathbf{C}$ une fonction et soit $F(x) = \sum\limits_{n\leqslant x} f(\frac{x}{n})$. Alors, on a $f(x) = \sum\limits_{n\leqslant x} \mu(n) F(\frac{x}{n})$.