Nano

101. — Benoît Kloeckner. *Un bref aperçu de la géométrie projective*
102. — Michel Balazard. *Le théorème des nombres premiers*
103. — Bruno Kahn. *Fonctions zêta et L de variétés et de motifs*
104. — Patrick Dehornoy. *Le calcul des tresses*

Patrick Dehornoy

LE CALCUL DES TRESSES

Une introduction, et au-delà

Calvage & Mounet

Patrick Dehornoy est professeur émérite à l'université de Caen et membre senior honoraire de l'Institut Universitaire de France. Ses travaux portent sur la théorie des ensembles, l'algèbre, et la topologie de basse dimension. Il est l'auteur d'une centaine d'articles de recherche et de huit livres.

patrick.dehornoy@unicaen.fr
https://dehornoy.users.lmno.cnrs.fr/

Mathematics Subject Classification (2010) : 20F36

ISBN 978-2-916352-79-4

9 782916 352794

∞ Imprimé sur papier permanent

Avant-propos

Présentation et motivation

Qu'elles soient faites de cheveux, de fils de laine ou de câbles électriques, tout le monde sait ce que sont les tresses. En revanche, il n'est pas évident que l'on puisse en faire une *théorie*, c'est-à-dire élaborer un corpus cohérent et mathématiquement intéressant de résultats à leur propos. Notre but ici est de persuader le lecteur d'une réponse résolument positive à cette question : les tresses sont des objets fascinants, aux propriétés mathématiques riches et variées.

Pour cela, on va se concentrer sur quelques résultats que l'on établira avec soin. Un point commun est que des démonstrations relativement sophistiquées sont requises en dépit d'énoncés très simples. Au cœur de l'approche, une opération naturelle de multiplication des tresses mènera à des structures de groupe, les *groupes de tresses*. Combinant des aspects algébriques et topologiques, ces groupes jouissent de multiples propriétés intéressantes et sont tout à la fois simples et compliqués.

Guide de lecture

Introductif, ce petit texte ne prétend à aucune exhaustivité et n'aborde que quelques-unes des nombreuses propriétés connues de groupes de tresses. Un accent spécial est mis sur les aspects algorithmiques et ce qui peut être appelé le « calcul des tresses », en particulier le *problème d'isotopie*, qui est la question de reconnaître si deux diagrammes de tresse *a priori* distincts peuvent être continûment déformés l'un sur l'autre. L'intérêt de cette question est qu'elle peut être abordée et résolue par de multiples voies, dont aucune n'est évidente, mais qui toutes mènent à des solutions concrètes que l'on pourra tester à la main ou avec un ordinateur.

Le texte comprend huit chapitres, certains (chapitres I, V, VII) de nature plus topologique, les autres plus algébriques. Si les chapitres I et II forment un socle commun pour toute la suite, les chapitres III à VII, qui présentent des approches diverses, sont assez indépendants les uns des autres.

De façon un peu plus détaillée, le chapitre I est consacré à la modélisation de la notion de tresse. On introduit pour tout n un *espace des tresses à n brins* dont les éléments sont des classes d'équivalence de tresses géométriques par rapport à une (en fait plusieurs) notion naturelle de déformation. Ensuite, on projette les tresses géométriques sur des diagrammes plans, que l'on code par des mots (« mots de tresse »), et on débouche sur le *problème d'isotopie des tresses*, à savoir reconnaître si deux diagrammes, ou les mots qui les codent, représentent la même tresse. On constate l'échec des tentatives naïves pour résoudre le problème d'isotopie, appelant au développement d'approches plus élaborées.

L'étude des espaces des tresses B_n, et en particulier l'obtention de solutions simples au problème d'isotopie, passe par l'existence sur B_n d'une structure de groupe, abordée dans le chapitre II. Une telle structure algébrique, spécifique aux tresses, explique en particulier pourquoi le problème d'isotopie associé, quoique non trivial, est néanmoins plus facile que celui d'autres objets topologiques analogues comme les nœuds. Comme point de départ, on établit une caractérisation de la structure de groupe en terme de présentation par générateurs et relations. Deux appendices complètent le chapitre, l'un consacré aux présentations de monoïde, l'autre aux présentations de groupe. Chacun offre un traitement assez complet et accessible sans connaissance préalable.

Ceci ne suffit pas à répondre en pratique aux questions sur B_n, à commencer par le problème de mot, c'est-à-dire le problème d'isotopie des tresses, et il faut donc continuer à travailler. On décrira dans le chapitre III une première solution, fondée sur l'approche développée dans les années 1960 par F.A. Garside dans sa thèse préparée sous la direction de G. Higman, et reposant sur l'analyse d'une structure auxiliaire, le monoïde B_n^+, qui se révélera *a posteriori* être un sous-monoïde du groupe B_n.

Suite directe du précédent, le chapitre IV continue à exploiter les propriétés des monoïdes B_n^+ pour étudier les groupes B_n. Le nouvel ingrédient ici est la relation de divisibilité à gauche du monoïde B_n^+, qui a une structure de treillis. Ceci permet de construire, pour les tresses positives d'abord, puis pour les tresses quelconques, des formes normales uniques, c'est-à-dire de définir, pour chaque tresse à n brins, une décomposition distinguée en fragments élémentaires, essentiellement des permutations de $\{1, ..., n\}$, menant à une nouvelle solution efficace et simple en pratique au problème d'isotopie.

On revient dans le chapitre V à une approche topologique. Développée par E. Artin dès les années 1920, celle-ci est basée sur l'action des tresses sur le groupe fondamental d'un disque percé et mène à une représentation fidèle du groupe B_n dans le groupe des automorphismes d'un groupe libre de rang n. On en déduit à la fois une nouvelle solution du problème d'isotopie, et une démonstration de l'équivalence des diverses notions d'isotopie des tresses géométriques, laissée en suspens depuis le chapitre I. Cependant, certains résultats ne seront ici établis que *modulo* une propriété supplémentaire des tresses (« propriété de comparaison ») laissée pendante.

Le premier but du chapitre VI est de fournir une démonstration de cette propriété de comparaison, ce que l'on fait à l'aide d'une méthode dite de réduction des poignées. L'intérêt de la méthode va au-delà, dans la mesure où elle fournit une nouvelle solution au problème d'isotopie, qui, en pratique, est heuristiquement plus efficace que la mise en forme normale du chapitre IV.

On a utilisé les aspects topologiques des tresses pour définir une action du groupe B_n sur le disque pointé $\mathbb{D}_n$ dans le chapitre V. Dans le chapitre VII, on fait agir les tresses sur des familles de courbes tracées dans une extension de $\mathbb{D}_n$ et, en comptant des intersections, obtenir une action sur des suites d'entiers appelées coordonnées de Dynnikov. Cette approche mène à des formules étonnantes mettant en jeu les opérations max et + et à une nouvelle solution, extrêmement efficace, pour le problème d'isotopie des tresses.

Enfin, le but du chapitre VIII est d'ouvrir quelques pistes ultérieures, vers les groupes B_n eux-mêmes d'abord, avec quelques mots sur les monoïdes duaux, sur les représentations linéaires, et sur les applications potentielles en cryptographie, puis vers les nombreuses extensions et généralisations des groupes de tresses, avec quelques exemples sur les groupes de tresses de surface et les groupes d'Artin-Tits, pour finir sur un problème ouvert et l'offre d'une récompense alléchante (mais tout à fait sérieuse)...

De nombreux compléments et quelques démonstrations qui n'ont pas trouvé leur place sont proposés en exercices tout au long du texte. Des solutions rédigées sont disponibles à l'adresse
`https://dehornoy.users.lmno.cnrs.fr/Books/Tresses/Exos.pdf`

Prérequis

L'option prise ici est de ne supposer que très peu de connaissances préliminaires, jamais au-delà du programme des premières années de licence. La plupart des résultats sont établis « à partir de zéro ». Dans quelques cas où des notions plus avancées sont nécessaires (monoïdes et groupes présentés, théorème de Ore, groupe fondamental d'un disque percé), une introduction détaillée est fournie en appendice en fin du chapitre.

Remerciements

Issu de notes de cours enseignés devant des publics variés, le texte a bénéficié de nombreuses discussions avec les étudiants de Caen, de Paris, et de Canton, et avec les collègues du Groupement de Recherche « Tresses » du CNRS (GDR 2105). Qu'ils soient ici collectivement remerciés. Une mention spéciale est due à mes amis Dale ROLFSEN et Seiichi KAMADA. Enfin, dans des circonstances perturbées par un problème de santé, je remercie pour leur aide Pierre DEHORNOY, John GUASCHI, et, tout spécialement, Jean FROMENTIN.

Arnières-sur-Iton, juin 2019

Table des matières

Chapitre I

Tresses géométriques

Le but de ce chapitre est de définir et commencer à étudier les tresses au sens mathématique. Pour cela, dans la section 1, on modélise une tresse matérielle par une famille d'arcs de $\mathbb{R}^3$, et l'on introduit pour tout n un *espace des tresses à n brins* dont les éléments sont des classes d'équivalence de tresses géométriques par rapport à une (en fait plusieurs) notion naturelle de déformation. Dans la section 2, on projette les tresses géométriques sur des diagrammes plans que l'on code par des mots (« mots de tresse »), et l'on débouche sur le *problème d'isotopie des tresses*, à savoir reconnaître si deux diagrammes, ou les mots qui les codent, représentent la même tresse. Dans la section 3, enfin, on constate l'échec de quelques tentatives naïves pour résoudre le problème d'isotopie, appelant au développement d'approches plus élaborées.

Note importante. L'option retenue dans tout ce texte est de démontrer les résultats annoncés. Ceux de ce chapitre sont en général naturels et compréhensibles, mais leur démonstration précise requiert souvent un formalisme géométrique un peu lourd. Que lectrices et lecteurs ne se laissent pas décourager et avancent résolument, quitte à sauter les détails, surtout entre 1.3.4 et 2.2.1 : une fois les bases acquises, la suite de l'étude, et en particulier les arguments algébriques, ne poseront plus ce type de difficulté.

1. L'espace des tresses géométriques

1.1. Des tresses matérielles aux tresses géométriques

1.1.1.— On se propose d'élaborer une théorie des tresses. Au départ, les tresses sont des objets matériels, comme les tresses de cheveux, ou la sculpture de la figure I.1 : des brins se croisant et conservant une orientation générale constante sans faire de nœud.

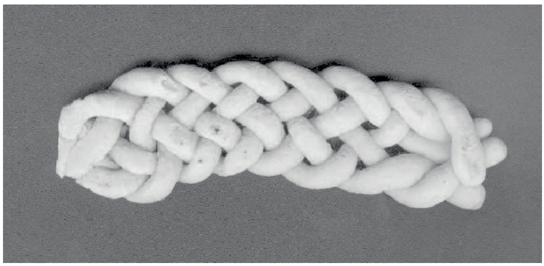

FIGURE I.1.— Une tresse en pâte à sel

1.1.2.— Théoriser de tels objets commence par une modélisation : décider quels aspects analyser et comment formaliser les objets matériels en des objets mathématiques susceptibles d'être étudiés. Dans le cas présent, on négligera les aspects métriques, donc tout ce qui concerne l'épaisseur des brins, leur longueur, leur espacement, leur courbure, ... pour ne retenir que les aspects topologiques, à savoir la façon dont les brins se croisent, quel brin passe par-dessus ou par-dessous, *etc.* La théorie que l'on va développer est donc avant tout une théorie des croisements.

1.1.3.— Puisque les paramètres métriques des brins sont ignorés, il est naturel de modéliser ceux-ci par des courbes de l'espace $\mathbb{R}^3$. Dans une tresse matérielle, les brins ont un début et une fin, et ne s'interrompent pas en chemin. On considérera donc des fragments de courbes continues, appelés *arcs* dans toute la suite. Par conséquent, on modélisera une tresse à n brins par la réunion de n arcs. Et comme les brins se croisent, mais ne se traversent pas les uns les autres, on requerra que ces arcs soient deux à deux *disjoints.*

1.1.4.— Ensuite, comme on pense à des tresses matérielles finies [1], il est loisible de supposer que les n arcs partent de n points fixés du plan $\{0\}\times\mathbb{R}^2$, par exemple $(0,1,0),\ldots,(0,n,0)$ et parviennent à n points fixés du plan $\{1\}\times\mathbb{R}^2$, par exemple $(1,1,0),\ldots,(1,n,0)$.

1.1.5.— Enfin, on veut exclure les nœuds. On interdira donc aux arcs de rebrousser chemin, conservant ainsi une direction générale constante. Pour un arc γ reliant le plan $\{0\}\times\mathbb{R}^2$ au plan $\{1\}\times\mathbb{R}^2$, cette condition revient à exiger que γ soit tracée dans $[0,1]\times\mathbb{R}^2$ et que son intersection avec chaque plan $\{x\}\times\mathbb{R}^2$ pour $0\leqslant x\leqslant 1$ soit réduite à un point : si γ rebroussait chemin, il existerait un plan $\{x\}\times\mathbb{R}^2$ coupant γ en au moins trois points.

1.1.6.— Ce faisant, on est parvenu à la notion suivante.

Définition (tresse géométrique). Une *tresse géométrique à n brins* est une réunion β de n arcs de $\mathbb{R}^3$, disjoints deux à deux, reliant les n points $(0,i,0)$, $i=1,\ldots,n$, aux n points $(1,i,0)$, $i=1,\ldots,n$, à l'intérieur de la bande $[0,1]\times\mathbb{R}^2$, et dont l'intersection avec tout plan $\{x\}\times\mathbb{R}^2$ comprend exactement n points. La famille des tresses géométriques à n brins est notée [2] $\mathcal{GB}_n$.

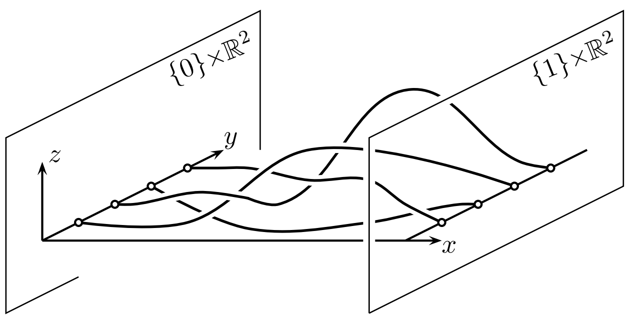

FIGURE I.2.— Une tresse géométrique à quatre brins : la réunion de quatre arcs disjoints joignant les points $(0,i,0)$, $i=1,\ldots,4$, aux points $(1,i,0)$, $i=1,\ldots,4$, ne se coupant pas et gardant une orientation positive par rapport à l'axe des x.

1. Au moins dans un premier temps ; on peut imaginer des tresses infinies...
2. La notation est un anglicisme : « tresse » se dit « braid » en anglais.