Alain Debreil – Rached Mneimné

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ et ses métamorphoses

Une introduction à la symétrie

Calvage & Mounet

Alain DEBREIL est ancien élève de l'École Centrale Paris et ancien cadre (ingénieur R&D) chez Bull aux Clayes-sous-Bois. Il est l'auteur de *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes* et coauteur (avec J.-D. Eiden, R. Mneimné et T.-H. Nguyen) de *Formes quadratiques et Géométrie*, parus chez C&M, en 2016, et 2017 respectivement.

alain.debreil@les-mathematiques.net

Rached MNEIMNÉ est ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud et maître de conférences honoraire à Paris Diderot. Il est l'auteur de *Groupes de Lie classiques* et des *Éléments de géométrie – Actions de groupes*, parus chez Hermann et Cassini, respectivement. Il est également auteur de *Réduction des endomorphismes* et coauteur (avec A. Debreil, J.-D. Eiden et T.-H. Nguyen) de *Formes quadratiques et Géométrie*, parus chez C&M, en 2007 et 2017, respectivement.

rached.mneimne@imj-prg.fr

Mathematics Subject Classification (2010) :

20-B30 Symmetric groups
20-C30 Representations of finite symmetric groups
51-M05 Euclidean geometries (general) and generalizations
51-M04 Elementary problems in Euclidean geometries
57-S17 Finite transformation groups
20-F05 Generators, relations, and presentations
20-F55 Reflection and Coxeter groups

ISBN 978-2-916352-85-5

∞ Imprimé sur papier permanent

Celui qui y aura goûté, qui aura vu, ne fût-ce que de loin, la splendide harmonie des lois naturelles, sera mieux disposé qu'un autre à faire peu de cas de ses petits intérêts égoïstes ; il aura un idéal qu'il aimera mieux que lui-même, et c'est là le seul terrain sur lequel on puisse bâtir une morale. Pour cet idéal, il travaillera sans marchander sa peine et sans attendre aucune de ces grossières récompenses qui sont tout pour certains hommes ; et quand il aura pris ainsi l'habitude du désintéressement, cette habitude le suivra partout ; sa vie entière en restera comme parfumée.

Henri Poincaré

Table des matières

II. Les permutations de $\mathfrak{S}_4$ pour elles-mêmes

III. Les trente sous-groupes du groupe $\mathfrak{S}_4$

B. Suites exactes, scindages et produit semi-directs. La suite exacte courte de Klein

C. La signature

D. Le groupe diédral $\mathcal{D}_4$

Avant-propos

Il a fallu des millénaires avant que des choses aussi enfantines et omniprésentes que les groupes de symétries de certaines figures géométriques, les formes topologiques de certaines autres, le nombre zéro, les ensembles, trouvent admission dans le sanctuaire [des mathématiques] !

Alexandre Grothendieck

L'idée de groupe a germé avec Lagrange et Abel à travers la manipulation des permutations des zéros d'un polynôme. Évariste Galois a pu en tirer les premiers résultats non triviaux avec la simplicité du groupe alterné $\mathfrak{A}_5$ et (par conséquent) la non-résolubilité de l'équation générale du cinquième degré par radicaux.

C'est dire combien l'idée de permutations et de groupe est importante, et cela est abstraitement encore mieux souligné par le fait (dû à Cayley) que tout groupe se réalise comme sous-groupe d'un groupe symétrique.

Aussi, l'idée incarnant les groupes de permutations ou de transformations en algèbre et en géométrie classique est devenue centrale. On peut expliquer l'omniprésence des groupes en géométrie de par le fait qu'ils sont la formalisation de l'idée de *symétrie*, et de *transformations* qui préservent un système. Cela a été cristallisé encore mieux par le programme d'Erlangen de Félix Klein.

S'il s'agissait d'exprimer d'emblée et en deux mots ce qu'est le présent livre, on pourrait dire que c'est tout simplement *une petite introduction mathématique à l'idée de symétrie*.

Pourquoi le groupe $\mathfrak{S}_4$?

Il existe quinze classes d'isomorphie de groupes à vingt-quatre éléments et un peu moins de cinquante milliards telles classes pour les groupes d'ordre $2^{10} = 1024$. Chacun de ces groupes mériterait a priori que l'on s'y intéresse. Pourquoi s'intéresser donc à $\mathfrak{S}_4$?

Ce groupe, au cœur du programme d'algèbre en L3 et en M1, a en tout premier lieu une vertu pédagogique absolue. Son ubiquité est telle qu'il offre par ci et par là un éclairage particulièrement pertinent sur plus d'un chapitre aussi bien en algèbre qu'en géométrie. Qu'il soit intimement lié à la géométrie du tétraèdre régulier ou à celle du cube, ou participant avec quelques-uns de ses sous-groupes dans l'apprentissage délicat de la notion de produit semi-direct, ou dans l'étude de géométries finies comme dans le cas des plans affines sur $\mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$, tout cela ne fait que nous le rendre plus amical, voire familier.

Ni trop simple, ni hautement compliqué, ce groupe à vingt-quatre éléments offre un cadre remarquable pour apprendre les actions de groupes, et donc les théorèmes de Sylow ou les propriétés du birapport, mais aussi les subtilités autour des groupes $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_3)$ ou $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ et, en particulier, les automorphismes du groupe quaternionique $\mathbb{H}_8$.

Pour résumer à ce stade notre opinion, nous dirions que de même que l'on apprend dès le primaire la table de multiplication, choix pédagogique jamais remis en question avant le siècle dernier, nous pensons qu'il correspond en propédeutique à ce choix trois ou quatre exigences, dont une est (ou devrait être) la maîtrise du groupe $\mathfrak{S}_4$. Autrement dit, *tout apprenti mathématicien devrait connaître* $\mathfrak{S}_4$ *comme un enfant de neuf ans doit connaître sa table de multiplication*, c'est-à-dire à fond.

On peut, il est vrai, découvrir par exemple certaines propriétés du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ en commençant par le birapport ou par la géométrie du cube ou par l'étude sous l'angle de la théorie de Galois des équations du quatrième degré, etc. Nous ne suivrons pas cette voie, mais nous nous servirons plutôt de notre connaissance approfondie de $\mathfrak{S}_4$ pour mieux maîtriser les situations où il intervient.

Prérequis

La définition d'un groupe, d'homomorphisme (et en particulier d'automorphisme), de sous-groupes, d'espace-quotient G/H, de théorème de Lagrange, d'ordre d'un élément, de groupe cyclique, sous-groupe distingué, groupe-quotient.

Les premières notions sur les actions de groupes, d'orbite et de stabilisateurs, d'éléments conjugués, centralisateurs. Sous-groupes conjugués, normalisateurs. Une annexe est d'ailleurs consacrée à ces prérequis.

Corps finis, groupe linéaire, déterminant...

Nous pourrions légitimement exiger du lecteur de connaître les cinq groupes d'ordre 8, que sont C_8, $\mathbb{C}_4 \times C_2$, $C_2 \times C_2 \times C_2$, le groupe diédral $\mathcal{D}_4$ et le groupe quaternionique $\mathbb{H}_8$. Les deux derniers de ces groupes, lesquels sont non commutatifs, sont néanmoins introduits et étudiés soigneusement dans le livre.

Une bonne connaissance préalable des cinq groupes d'ordre 12, que sont $C_{12} \simeq C_3 \times C_4$, $C_6 \times C_2 \simeq C_2 \times C_2 \times C_3$, $\mathcal{D}_6 \simeq \mathfrak{S}_3 \times C_2$, le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$ et enfin le groupe $\widetilde{\mathfrak{S}_3}$ des sextinions, facilitera la tâche du lecteur [1].

On rappellera au fur et à mesure les autres notions que nous serons amenés à utiliser ou invoquer.

Plan du fascicule

Le livre est constitué de dix-sept chapitres courts et de six appendices. Le lecteur est invité à consulter dès à présent la table des matières.

On commence dans un premier chapitre par examiner rapidement les différentes façons de représenter une permutation et de mettre en évidence les avantages et les inconvénients comparés de ces représentations.

On fait connaissance au chapitre suivant avec les différentes permutations de $\mathfrak{S}_4$, comment elles se composent entre elles et on les

1. Qui est invité de toute façon à acquérir le précieux livre [9].

classera suivant leurs ordres. Les exercices de ce chapitre doivent être considérés comme faisant partie intégrante du texte.

On commence au chapitre d'après à dresser le treillis des trente sous-groupes de $\mathfrak{S}_4$. On insérera entre les parties quelques exercices intéressants ou utiles pour la suite. Une attention particulière doit être apportée au sous-groupe de Klein $\mathfrak{V}_4$. On verra alors en exercice comment le groupe $\mathfrak{S}_4$ s'identifie au groupe affine $\mathrm{GA}(2, \mathbb{F}_2)$.

Le chapitre IV est consacré à bien mettre en place le cadre affine euclidien en dimension 3, et en particulier l'examen dans ce cadre des classes de conjugaison des sous-groupes finis d'isométries du groupe de la géométrie en présence. Ce chapitre qui semble a priori déborder du cadre étroit de notre ouvrage est néanmoins crucial pour bien maîtriser les questions subtiles de géométrie où le groupe $\mathfrak{S}_4$ se trouve parfois impliqué.

On étudiera au chapitre V le tétraèdre régulier, et l'on y repèrera les 2-Sylow de $\mathfrak{S}_4$. Le chapitre VI est voué à l'étude des déplacements du cube, en attendant le chapitre VIII pour prendre en compte les antidéplacements qui le conservent et le chapitre IX qui fera le point sur ces questions géométriques à travers l'examen nécessaire du groupe $\mathfrak{S}_4 \times C_2$ de *toutes* les isométries du cube.

Le chapitre VII est un tête-à-tête assez court entre cube et tétraèdre régulier.

Les trois chapitres suivants plairont aux amateurs des groupes finis. Le premier d'entre eux est consacré au groupe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ et à l'isomorphie

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4.$$

On déduira de cette étude le groupe des automorphismes de $\mathbb{H}_8$. Le chapitre qui suit est voué à l'étude du groupe binaire octaédral (ou cubique), extension de $\mathfrak{S}_4$ par C_2 et vivant au dessus d'icelui dans le groupe spécial unitaire $\mathrm{SU}(2)$, revêtement universel du groupe $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$. Quant au dernier de ces trois, il examine la grande famille de tous les groupes d'ordre 24 et met en lumière comment s'y distingue $\mathfrak{S}_4$, le plus brillant d'entre eux.

Le chapitre XIII concerne la théorie des représentations linéaires complexes irréductibles. On y trouve plusieurs tables de caractères, celle de $\mathfrak{S}_4$ bien sûr, mais également celles de plusieurs de ses confrères ou amis.

La correspondance de Galois est étudiée au chapitre XIV, tout comme la résolubilité des équations du troisième et quatrième degrés.

Les deux chapitres qui suivent concernent les présentations. On y fait les rappels nécessaires pour une bonne maîtrise de cette notion délicate, mais aussi des groupes de Coxeter.

Enfin, le birapport est étudié au dernier chapitre. Nous renvoyons le lecteur à la table des matières pour le contenu des six appendices, qui peuvent être lus à part, le lecteur débutant ayant intérêt à y aller en priorité.

Un vœu

Les auteurs aimeraient que d'autres collègues suivent leur exemple en singularisant un objet mathématique particulier et s'emploient dès lors à chercher ses occurrences un peu partout dans le champ mathématique. Par exemple, un petit ouvrage comme le présent sur les espaces projectifs $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Un autre sur la distribution de Dirac, ou sur la fonction de Riemann $\mathrm{R}(x)=\sum_n \frac{\sin n^2\pi x}{n^2}$, le corps à un élément, l'hyperbole équilatère, le fibré cotangent, les matrices nilpotentes, le théorème des résidus, etc. Ou tant d'autres livres du même style…

Histoire de ce livre

Elle reste évidemment à écrire ! Cependant, il est à penser d'ores et déjà, et en toute modestie, que ce livre survivra à ses auteurs. S'il leur a donné beaucoup de moments de partage et de plaisir, il est en partie le fruit d'une vieille familiarité avec les objets qui y figurent. Il a demandé aussi à l'un et l'autre l'apprentissage approfondi de plusieurs notions qu'ils avaient cru longtemps bien acquises, mais que les besoins du présent livre leur ont montré tout naturellement qu'elles ne l'étaient pas entièrement. Il va sans dire que le choix de la matière qui devait en principe se confiner à $\mathfrak{S}_4$ et ses avatars, s'est élargi, au goût et au caprice des auteurs, sur certains territoires quelques peu périphériques, notamment vers des groupes finis pas vraiment apparentés (mais pourtant instructifs) et aussi vers quelques lieux en géométries affine et affine euclidienne.

Le livre écrit dans un temps record est loin d'épuiser le sujet, et ferme les yeux délibérément sur certains aspects qui auraient exigé des auteurs un investissement que leurs obligations ne permettaient pas. Les auteurs demandent de ce fait aux lecteurs pour qui ces aspects sont trop frappants par leur absence d'être bien indulgents, et à tous les autres de croire qu'ils ont donné en la circonstance du meilleur d'eux-mêmes.

Un grand merci enfin à Abderrazak Bouaziz et à Philippe Caldero pour l'intérêt qu'ils ont témoigné pour ce travail.

Île de France, décembre 2019