

Alain Debreil – Rached Mneimné

Le groupe symétrique \mathfrak{S}_4 et ses métamorphoses

Une introduction à la symétrie



Calvage & Mounet

ALAIN DEBREIL est ancien élève de l'École Centrale Paris et ancien cadre (ingénieur R&D) chez Bull aux Clayes-sous-Bois. Il est l'auteur de *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes* et coauteur (avec J.-D. Eiden, R. Mneimné et T.-H. Nguyen) de *Formes quadratiques et Géométrie*, parus chez C&M, en 2016, et 2017 respectivement.

alain.debreil@les-mathematiques.net

RACHED MNEIMNÉ est ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud et maître de conférences honoraire à Paris Diderot. Il est l'auteur de *Groupes de Lie classiques* et des *Éléments de géométrie – Actions de groupes*, parus chez Hermann et Cassini, respectivement. Il est également auteur de *Réduction des endomorphismes* et coauteur (avec A. Debreil, J.-D. Eiden et T.-H. Nguyen) de *Formes quadratiques et Géométrie*, parus chez C&M, en 2007 et 2017, respectivement.

rached.mneimne@imj-prg.fr

Mathematics Subject Classification (2010) :

- 20-B30 Symmetric groups
- 20-C30 Representations of finite symmetric groups
- 51-M05 Euclidean geometries (general) and generalizations
- 51-M04 Elementary problems in Euclidean geometries
- 57-S17 Finite transformation groups
- 20-F05 Generators, relations, and presentations
- 20-F55 Reflection and Coxeter groups

ISBN 978-2-916352-85-5



⊗ Imprimé sur papier permanent

© Calvage & Mounet, Paris, 2020

Celui qui y aura goûté, qui aura vu, ne fût-ce que de loin, la splendide harmonie des lois naturelles, sera mieux disposé qu'un autre à faire peu de cas de ses petits intérêts égoïstes ; il aura un idéal qu'il aimera mieux que lui-même, et c'est là le seul terrain sur lequel on puisse bâtir une morale. Pour cet idéal, il travaillera sans marchander sa peine et sans attendre aucune de ces grossières récompenses qui sont tout pour certains hommes ; et quand il aura pris ainsi l'habitude du désintéressement, cette habitude le suivra partout ; sa vie entière en restera comme parfumée.

Henri Poincaré

Table des matières

I. Le groupe $\mathfrak{S}(E)$

1. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}(E)$	1
2. Diverses écritures d'une permutation	2
2.1. Comme une application $E \rightarrow E$	3
2.3. Par cycles à supports disjoints	3
2.5. À l'aide de liens	5
2.6. Par une matrice	6
3. La permutation de l'enfant-Gauss	6
4. Intérêts de chacune des écritures	7
4.1. Composition des permutations	7
4.2. Ordre d'une permutation	9
4.4. Signature d'une permutation	10
5. Conjugaison d'une permutation	12
6. Décomposition en produit de transpositions	13
7. La permutation de l'enfant-Gauss	14
8. Exercices	17
8.1. Dérangements pairs et impairs	17
8.2. Action de \mathfrak{S}_n sur $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$	17
8.4. Permutations et arrangements	18

II. Les permutations de \mathfrak{S}_4 pour elles-mêmes

1. Lister les éléments de \mathfrak{S}_4	19
2. Un regard rapide sur cette liste	20
3. Centralisateurs dans \mathfrak{S}_4	20
4. Exercices	21
4.1. Le centre de \mathfrak{S}_n	21
4.2. Composer transposition et double-transposition	21
4.3. La composée σ d'un 3-cycle et d'un 4-cycle	22
4.4. Ordres à trouver	22
4.5. Composée de deux 4-cycles dans \mathfrak{S}_4	22
4.6. Conjugaison des 3-cycles dans \mathfrak{A}_4	23
4.7. Composée de deux 3-cycles	23
4.8. Pas d'élément d'ordre 6	24
4.9. Un 2-Sylow avant la lettre	24
4.10. Des générateurs de \mathfrak{A}_4	25
4.11. Nombre minimal de transpositions génératrices	25

III. Les trente sous-groupes du groupe \mathfrak{S}_4

1. La liste des sous-groupes de \mathfrak{S}_4	28
2. Les 2-Sylow de \mathfrak{S}_4	31
3. Le treillis des sous-groupes de \mathfrak{S}_4	32
4. La fleur des trois 2-Sylow de \mathfrak{S}_4	34
5. Commentaires sur le treillis des sous-groupes de \mathfrak{S}_4	34
5.1. Construction étape par étape	34
5.2. Quelques propriétés qui y sont codées	35
6. Les normalisateurs des sous-groupes	37
7. Le théorème du treillis-quotient	38
7.1. L'énoncé	38
7.2. Application au cas de $\mathfrak{A}_4 \triangleleft \mathfrak{S}_4$	39
8. Le groupe \mathfrak{S}_4 comme produit semi-direct	39
8.1. Quelques prérequis	39
8.2. Produits semi-directs internes dans \mathfrak{S}_4	39
9. Le groupe des automorphismes de \mathfrak{S}_4	40
10. Exercices	42

IV. Isométries de l'espace affine euclidien \mathcal{E}_3

1. Introduction	53
2. Rappels	56
2.1. Isométries affines en dimension 2	56
2.2. Isométries en dimension 3	57
3. Les éléments de $O(2)$. Rotations et réflexions linéaires .	57
4. Isométries linéaires en dimension 3	58
5. Les involutions de l'espace	59
6. Les sous-groupes $C_2 \times C_2$ de l'espace	59
7. Les sous-groupes cycliques de l'espace	60
7.1. Sommaire	60
7.2. Examen attentif	61
7.3. Tableau récapitulatif	63
7.6. Examen des orbites génériques des groupes cycliques	65
8. Les trois classes de conjugaison de \mathcal{D}_4 dans l'espace . .	66
9. Une seule classe de conjugaison de sous-groupes $C_2 \times C_4$	67
10. Une seule classe de conjugaison de $C_2 \times C_2 \times C_2$	68
11. Sous-groupes de $O(3)$	69
12. Une seule classe de conjugaison de sous-groupes $\mathcal{D}_4 \times C_2$	70
13. Classes de conjugaison de sous-groupes \mathfrak{A}_4 , \mathfrak{S}_4 et \mathfrak{A}_5 .	71
14. Classes de conjugaison de sous-groupes $\mathfrak{A}_4 \times C_2$ dans l'espace	72
15. Composer une ipfu et une translation	73

V. Les isométries du tétraèdre régulier

1. Le bouquet des sept axes du tétraèdre régulier	76
2. Les 2-Sylow de \mathfrak{S}_4 repérés dans le tétraèdre régulier . .	77
3. Exercices	78

VI. Les déplacements du cube

1. Le Klein dans le cube	81
2. Les autres déplacements du cube	82
2.1. Les autres symétries directes	82
2.2. Les huit rotations d'un tiers-de-tour	82
2.3. Les six rotations d'un quart-de-tour	83
3. Les 2-Sylow repérés dans les déplacements du cube . .	83
4. Exercices	84

VII. Entre tétraèdre et cube

VIII. Les isométries du cube

1. Les $19 = 9 + 10$ involutions du cube	89
2. Les classes de conjugaison des \mathcal{D}_4 dans le cube	90
3. La classe des quatre \mathcal{D}_6 dans le cube	93
4. Le cube et le produit en couronne $C_2 \wr \mathfrak{S}_3$	95
4.2. Premier cas	96
4.3. Second cas	99
5. Les trois 2-Sylow de $\mathfrak{S}_4 \times C_2$	100
5.2. Le treillis du groupe $\mathcal{D}_4 \times C_2$	101
6. Le treillis du groupe total du cube	101

IX. Groupe total du cube : $\mathfrak{S}_4 \times C_2 \simeq \mathbf{O}(3, \mathbb{F}_3)$

1. Deux diagrammes commutatifs	103
2. Les deux \mathfrak{S}_4 du cube	104
3. Les quatre \mathcal{D}_6 du cube	108
4. Deux coupes spéciales du cube	109
4.1. Selon le plan médiateur d'une grande diagonale	109
4.2. Coupe du cube selon un plan tranchant. Le toit	109
5. La fleur du cube	109
6. Les sous-groupes d'indice 2 de $\mathbf{O}(3, \mathbb{F}_3)$	111
7. Exercices	113

X. Le groupe $\mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ et le groupe \mathfrak{S}_4

1. Une définition de \mathbb{H}_8 via $\mathbf{SL}(2, \mathbb{F}_3)$	115
2. Le groupe \mathfrak{S}_4 comme $\text{Aut}(\mathbb{H}_8)$	117
3. Le groupe \mathfrak{S}_4 comme $\text{Aut}(\mathbf{SL}(2, \mathbb{F}_3))$	117
4. La configuration cubique dans le treillis de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_3)$	121
5. Exercices	124

XI. Le groupe $\widetilde{\mathfrak{S}}_4$, ou groupe binaire octaédral

1. Revêtement universel $SU(2) \twoheadrightarrow SO(3)$	127
2. Le groupe binaire de \mathfrak{S}_4 ne peut se décomposer en produit semi-direct non trivial	128
3. Retrouver les automorphismes de \mathbb{H}_8	129
4. Le treillis de $\widetilde{\mathfrak{S}}_4$	129
5. Le groupe $\widetilde{\mathcal{D}}_4$ et le petit arbre de Noël	131
6. La fleur de $\widetilde{\mathfrak{S}}_4$	131
7. Exercice	132

XII. Le groupe \mathfrak{S}_4 parmi les groupes d'ordre 24

1. Caractérisation de \mathfrak{S}_4	133
2. Exercices	136

XIII. Les tables des caractères de \mathfrak{S}_4 et de ses amis

1. Représentations linéaires complexes irréductibles de dimension finie	139
1.1. Quelques prérequis	139
1.2. Comment produire des représentations irréductibles ?	140
1.3. La table des caractères	141
1.4. Orthogonalités dans la table	142
2. Construire la table de \mathfrak{S}_4	143
3. Quelques tables de caractères	145
3.1. La table de $\mathfrak{S}_4 \times C_2$	148
4. Caractères des groupes cousins	149
4.1. La table de $SL(2, \mathbb{F}_3)$	149
4.2. Un plongement $SL(2, \mathbb{F}_3) \hookrightarrow SU(2, \mathbb{C})$	150
5. Les tables des caractères de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ et de $\widetilde{\mathfrak{S}}_4$	152
5.1. Table des caractères de $GL(2, \mathbb{F}_3)$	152
5.2. Table des caractères de $\widetilde{\mathfrak{S}}_4$	153
5.3. Table du groupe binaire diédral Q_2	155
5.4. Remarque	155
6. Une référence de qualité	156
7. Exercice	156

XIV. Le groupe \mathfrak{S}_4 et la correspondance de Galois	
1. Le polynôme de degré 3	158
2. Le polynôme de degré 4	162
2.2. Résolvante de Lagrange	164
2.3. Cas où la résolvante se factorise sur \mathbb{Q}	167
XV. Présentations du groupe symétrique \mathfrak{S}_4	
1. Un morphisme de G_4 dans \mathfrak{S}_4	174
2. Le graphe de Cayley de G_4	174
3. Construction du graphe de Cayley de $\mathcal{C}(G_4, \{a, b\})$	176
4. Interprétation géométrique	179
5. Exercices	181
5.1. Une salve de petits exos	181
5.2. Exercice. Les groupes diédraux	181
5.3. Exercice. La signature des groupes symétriques et alternés	182
5.4. Exercice. Le groupe des quaternions \mathbb{H}_8	182
XVI. Les groupes de Coxeter	
1. Définitions	183
2. Le graphe de Cayley de la présentation	185
2.1. Construction du graphe de Cayley	185
3. Autre présentation de Coxeter de \mathfrak{S}_4 ?	189
XVII. Le birapport et \mathfrak{S}_4	
1. Introduction	195
2. Deux actions qui commutent	196
A. Actions de groupes	
1. Généralités	201
2. Autres considérations	207
2.1. Groupe opérant sur un autre par automorphismes	207
2.2. L'ensemble $G \backslash X$ des orbites	207
2.3. Action d'un produit $G_1 \times G_2$	207
2.4. Les théorèmes de Sylow	207
2.5. Action sur les polynômes	211

B. Suites exactes, scindages et produit semi-directs. La suite exacte courte de Klein	
1. Compléments d'un sous-groupe distingué	214
1.1. Quelques prérequis	214
2. Quelques exercices	215
3. Scindages et compléments	216
4. Produit semi-direct externe	217
5. Quelques produits semi-directs externes	220
5.1. L'holomorphe de $C_2 \times C_2$ est \mathfrak{S}_4	220
5.2. Les produits semi-directs externes $(C_2 \times C_2) \rtimes K$, avec $ K = 6$	220
6. Produit semi-direct avec la diagonale	221
6.1. Le produit $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$	221
6.2. Le produit $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$: suite et fin	222
7. La suite exacte courte de Klein	223
C. La signature	
1. Préliminaires	225
2. Le Vandermonde général	225
3. Définir autrement la signature	226
3.1. Une autre approche de la signature	227
4. Zolotarev	228
5. Jeu du taquin	229
6. Exercices	231
D. Le groupe diédral \mathcal{D}_4	
1. Les éléments de \mathcal{D}_4	236
2. Les sous-groupes de \mathcal{D}_4	236
3. Le treillis des sous-groupes de \mathcal{D}_4	237
4. Le groupe \mathcal{D}_4 comme produit semi-direct	238
5. Comment détecte-t-on un \mathcal{D}_4 ?	239
6. Un \mathcal{D}_4 bien embusqué	239
7. L'hexagone régulier ou le treillis de \mathcal{D}_6	241
8. Exercices	242

E. Rotations du plan et de l'espace	
1. Mesure des angles dans le plan	243
2. Paramétrages des rotations de l'espace	244
3. Composer deux rotations dans l'espace	245
4. Quatre suites exactes pour la route	247
F. Générateurs et relations	
1. Le groupe libre à n générateurs	249
2. Présentation standard de \mathfrak{S}_4	254
3. Le groupe des tresses B_4	254
Bibliographie	257
Notations	259
Index	261

Avant-propos

Il a fallu des millénaires avant que des choses aussi enfantines et omniprésentes que les groupes de symétries de certaines figures géométriques, les formes topologiques de certaines autres, le nombre zéro, les ensembles, trouvent admission dans le sanctuaire [des mathématiques] !

Alexandre Grothendieck

L'idée de groupe a germé avec Lagrange et Abel à travers la manipulation des permutations des zéros d'un polynôme. Évariste Galois a pu en tirer les premiers résultats non triviaux avec la simplicité du groupe alterné \mathfrak{A}_5 et (par conséquent) la non-résolubilité de l'équation générale du cinquième degré par radicaux.

C'est dire combien l'idée de permutations et de groupe est importante, et cela est abstraitement encore mieux souligné par le fait (dû à Cayley) que tout groupe se réalise comme sous-groupe d'un groupe symétrique.

Aussi, l'idée incarnant les groupes de permutations ou de transformations en algèbre et en géométrie classique est devenue centrale. On peut expliquer l'omniprésence des groupes en géométrie de par le fait qu'ils sont la formalisation de l'idée de *symétrie*, et de *transformations* qui préservent un système. Cela a été cristallisé encore mieux par le programme d'Erlangen de Félix Klein.

S'il s'agissait d'exprimer d'emblée et en deux mots ce qu'est le présent livre, on pourrait dire que c'est tout simplement *une petite introduction mathématique à l'idée de symétrie*.

Pourquoi le groupe \mathfrak{S}_4 ?

Il existe quinze classes d'isomorphie de groupes à vingt-quatre éléments et un peu moins de cinquante milliards telles classes pour les groupes d'ordre $2^{10} = 1024$. Chacun de ces groupes mériterait a priori que l'on s'y intéresse. Pourquoi s'intéresser donc à \mathfrak{S}_4 ?

Ce groupe, au cœur du programme d'algèbre en L3 et en M1, a en tout premier lieu une vertu pédagogique absolue. Son ubiquité est telle qu'il offre par ci et par là un éclairage particulièrement pertinent sur plus d'un chapitre aussi bien en algèbre qu'en géométrie. Qu'il soit intimement lié à la géométrie du tétraèdre régulier ou à celle du cube, ou participant avec quelques-uns de ses sous-groupes dans l'apprentissage délicat de la notion de produit semi-direct, ou dans l'étude de géométries finies comme dans le cas des plans affines sur \mathbb{F}_2 ou \mathbb{F}_3 , tout cela ne fait que nous le rendre plus amical, voire familier.

Ni trop simple, ni hautement compliqué, ce groupe à vingt-quatre éléments offre un cadre remarquable pour apprendre les actions de groupes, et donc les théorèmes de Sylow ou les propriétés du birapport, mais aussi les subtilités autour des groupes $SL(2, \mathbb{F}_3)$ ou $GL(2, \mathbb{F}_3)$ et, en particulier, les automorphismes du groupe quaternionique \mathbb{H}_8 .

Pour résumer à ce stade notre opinion, nous dirions que de même que l'on apprend dès le primaire la table de multiplication, choix pédagogique jamais remis en question avant le siècle dernier, nous pensons qu'il correspond en propédeutique à ce choix trois ou quatre exigences, dont une est (ou devrait être) la maîtrise du groupe \mathfrak{S}_4 . Autrement dit, *tout apprenti mathématicien devrait connaître \mathfrak{S}_4 comme un enfant de neuf ans doit connaître sa table de multiplication*, c'est-à-dire à fond.

On peut, il est vrai, découvrir par exemple certaines propriétés du groupe symétrique \mathfrak{S}_4 en commençant par le birapport ou par la géométrie du cube ou par l'étude sous l'angle de la théorie de Galois des équations du quatrième degré, etc. Nous ne suivrons pas cette voie, mais nous nous servirons plutôt de notre connaissance approfondie de \mathfrak{S}_4 pour mieux maîtriser les situations où il intervient.

Prérequis

La définition d'un groupe, d'homomorphisme (et en particulier d'automorphisme), de sous-groupes, d'espace-quotient G/H , de théorème de Lagrange, d'ordre d'un élément, de groupe cyclique, sous-groupe distingué, groupe-quotient.

Les premières notions sur les actions de groupes, d'orbite et de stabilisateurs, d'éléments conjugués, centralisateurs. Sous-groupes conjugués, normalisateurs. Une annexe est d'ailleurs consacrée à ces prérequis.

Corps finis, groupe linéaire, déterminant. . .

Nous pourrions légitimement exiger du lecteur de connaître les cinq groupes d'ordre 8, que sont C_8 , $\mathbb{C}_4 \times C_2$, $C_2 \times C_2 \times C_2$, le groupe diédral \mathcal{D}_4 et le groupe quaternionique \mathbb{H}_8 . Les deux derniers de ces groupes, lesquels sont non commutatifs, sont néanmoins introduits et étudiés soigneusement dans le livre.

Une bonne connaissance préalable des cinq groupes d'ordre 12, que sont $C_{12} \simeq C_3 \times C_4$, $C_6 \times C_2 \simeq C_2 \times C_2 \times C_3$, $\mathcal{D}_6 \simeq \mathfrak{S}_3 \times C_2$, le groupe alterné \mathfrak{A}_4 et enfin le groupe $\widetilde{\mathfrak{S}}_3$ des sextinions, facilitera la tâche du lecteur¹.

On rappellera au fur et à mesure les autres notions que nous serons amenés à utiliser ou invoquer.

Plan du fascicule

Le livre est constitué de dix-sept chapitres courts et de six appendices. Le lecteur est invité à consulter dès à présent la table des matières.

On commence dans un premier chapitre par examiner rapidement les différentes façons de représenter une permutation et de mettre en évidence les avantages et les inconvénients comparés de ces représentations.

On fait connaissance au chapitre suivant avec les différentes permutations de \mathfrak{S}_4 , comment elles se composent entre elles et on les

1. Qui est invité de toute façon à acquérir le précieux livre [9].

classera suivant leurs ordres. Les exercices de ce chapitre doivent être considérés comme faisant partie intégrante du texte.

On commence au chapitre d'après à dresser le treillis des trente sous-groupes de \mathfrak{S}_4 . On insérera entre les parties quelques exercices intéressants ou utiles pour la suite. Une attention particulière doit être apportée au sous-groupe de Klein \mathfrak{V}_4 . On verra alors en exercice comment le groupe \mathfrak{S}_4 s'identifie au groupe affine $GA(2, \mathbb{F}_2)$.

Le chapitre IV est consacré à bien mettre en place le cadre affine euclidien en dimension 3, et en particulier l'examen dans ce cadre des classes de conjugaison des sous-groupes finis d'isométries du groupe de la géométrie en présence. Ce chapitre qui semble a priori déborder du cadre étroit de notre ouvrage est néanmoins crucial pour bien maîtriser les questions subtiles de géométrie où le groupe \mathfrak{S}_4 se trouve parfois impliqué.

On étudiera au chapitre V le tétraèdre régulier, et l'on y repèrera les 2-Sylow de \mathfrak{S}_4 . Le chapitre VI est voué à l'étude des déplacements du cube, en attendant le chapitre VIII pour prendre en compte les antidéplacements qui le conservent et le chapitre IX qui fera le point sur ces questions géométriques à travers l'examen nécessaire du groupe $\mathfrak{S}_4 \times C_2$ de toutes les isométries du cube.

Le chapitre VII est un tête-à-tête assez court entre cube et tétraèdre régulier.

Les trois chapitres suivants plairont aux amateurs des groupes finis. Le premier d'entre eux est consacré au groupe $GL(2, \mathbb{F}_3)$ et à l'isomorphie

$$PGL(2, \mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4.$$

On déduira de cette étude le groupe des automorphismes de \mathbb{H}_8 . Le chapitre qui suit est voué à l'étude du groupe binaire octaédral (ou cubique), extension de \mathfrak{S}_4 par C_2 et vivant au dessus d'icelui dans le groupe spécial unitaire $SU(2)$, revêtement universel du groupe $SO(3, \mathbb{R})$. Quant au dernier de ces trois, il examine la grande famille de tous les groupes d'ordre 24 et met en lumière comment s'y distingue \mathfrak{S}_4 , le plus brillant d'entre eux.

Le chapitre XIII concerne la théorie des représentations linéaires complexes irréductibles. On y trouve plusieurs tables de caractères, celle de \mathfrak{S}_4 bien sûr, mais également celles de plusieurs de ses confrères ou amis.

La correspondance de Galois est étudiée au chapitre XIV, tout comme la résolubilité des équations du troisième et quatrième degrés.

Les deux chapitres qui suivent concernent les présentations. On y fait les rappels nécessaires pour une bonne maîtrise de cette notion délicate, mais aussi des groupes de Coxeter.

Enfin, le birapport est étudié au dernier chapitre. Nous renvoyons le lecteur à la table des matières pour le contenu des six appendices, qui peuvent être lus à part, le lecteur débutant ayant intérêt à y aller en priorité.

Un vœu

Les auteurs aimeraient que d'autres collègues suivent leur exemple en singularisant un objet mathématique particulier et s'emploient dès lors à chercher ses occurrences un peu partout dans le champ mathématique. Par exemple, un petit ouvrage comme le présent sur les espaces projectifs $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Un autre sur la distribution de Dirac, ou sur la fonction de Riemann $R(x) = \sum_n \frac{\sin n^2 \pi x}{n^2}$, le corps à un élément, l'hyperbole équilatère, le fibré cotangent, les matrices nilpotentes, le théorème des résidus, etc. Ou tant d'autres livres du même style. . .

Histoire de ce livre

Elle reste évidemment à écrire ! Cependant, il est à penser d'ores et déjà, et en toute modestie, que ce livre survivra à ses auteurs. S'il leur a donné beaucoup de moments de partage et de plaisir, il est en partie le fruit d'une vieille familiarité avec les objets qui y figurent. Il a demandé aussi à l'un et l'autre l'apprentissage approfondi de plusieurs notions qu'ils avaient cru longtemps bien acquises, mais que les besoins du présent livre leur ont montré tout naturellement qu'elles ne l'étaient pas entièrement. Il va sans dire que le choix de la matière qui devait en principe se confiner à \mathfrak{S}_4 et

ses avatars, s'est élargi, au goût et au caprice des auteurs, sur certains territoires quelques peu périphériques, notamment vers des groupes finis pas vraiment apparentés (mais pourtant instructifs) et aussi vers quelques lieux en géométries affine et affine euclidienne.

Le livre écrit dans un temps record est loin d'épuiser le sujet, et ferme les yeux délibérément sur certains aspects qui auraient exigé des auteurs un investissement que leurs obligations ne permettaient pas. Les auteurs demandent de ce fait aux lecteurs pour qui ces aspects sont trop frappants par leur absence d'être bien indulgents, et à tous les autres de croire qu'ils ont donné en la circonstance du meilleur d'eux-mêmes.

Un grand merci enfin à Abderrazak Bouaziz et à Philippe Caldero pour l'intérêt qu'ils ont témoigné pour ce travail.

Île de France, décembre 2019