NANO

Nano

101. — Benoît Kloeckner. *Un bref aperçu de la géométrie projective*

102. — Michel Balazard. *Le théorème des nombres premiers*

103. — Bruno Kahn. *Fonctions zêta et L de variétés et de motifs*

104. — Patrick Dehornoy. *Le calcul des tresses*

105. — Alain Debreil et Rached Mneimné. *Le groupe symétrique et ses métamorphoses*

106. — Roger Mansuy. *Introduction aux graphes aléatoires (et à la méthode probabiliste)*

107. — Jean-Denis Eiden, *Espaces vectoriels euclidiens, avec une ouverture vers les espaces préhilbertiens réels*

Jean-Denis Eiden

Espaces vectoriels euclidiens

Avec une ouverture vers les espaces préhilbertiens réels

Calvage & Mounet

Jean-Denis Eiden, ancien élève de l'ÉNS de Saint-Cloud, est professeur de MP* au lycée Fabert de Metz ; on lui doit, chez le même éditeur, Géométrie analytique classique, Le jardin d'Eiden (livre d'exercices), Formes quadratiques : une introduction et au-delà (en collaboration avec Alain Debreil, Rached Mneimné et Tuong-Huy Nguyen), ainsi que Crédits : méfiez-vous ! (Ellipses, en collaboration avec Jean-Marie Arnaudiès).

Mathematics Subject Classification (2020) :

11-XX Number theory
  11H-XX Geometry of numbers
    11H55 Quadratic forms (reduction theory, extreme forms, etc.)

15-XX Linear and multilinear algebra ; matrix theory
  15A-XX Basic linear algebra
    15A21 Canonical forms, reductions, classification
    15A63 Quadratic and bilinear forms, inner products
  15B-XX Special matrices
    15B10 Orthogonal matrices

20-XX Group theory and generalizations
  20C-XX Representation theory of groups
    20C30 Representations of finite symmetric groups

46-XX Functional analysis
  46B-XX Normed linear spaces and Banach spaces ; Banach lattices
    46B20 Geometry and structure of normed linear spaces
  46C-XX Inner product spaces and their generalizations, Hilbert spaces
    46C05 Hilbert and pre-Hilbert spaces : geometry and topology

47-XX Operator theory
  47L-XX Linear spaces and algebras of operators
    47L25 Operator spaces (= matricially normed spaces)

ISBN 978-2-916352-84-8

9 782916 352848

∞ Imprimé sur papier permanent

Mais vous, ô mathématiques concises, par l'enchaînement rigoureux de vos propositions tenaces et la constance de vos lois de fer, vous faites luire, aux yeux éblouis, un reflet puissant de cette vérité suprême dont on remarque l'empreinte dans l'ordre de l'univers.

Lautréamont

Table des matières

Euclidien : du grec eu*, qui signifie* bien*,*
et klidein*, qui signifie* clider.
Un espace qui ne clide pas bien sera dit dysclidien*, ce qui n'attire que le mépris.*
PROF. CYCLOPÈDE

Chapitre 0

Prérequis

Il n'existe (sans doute) pas d'ordre naturel pour l'exposition d'un cours de Mathématiques et, de ce fait, s'est très vite posée la question de savoir quelle quantité de prérequis se révélerait nécessaire dans ce petit livre.

Lorsque l'on traite d'espaces préhilbertiens, il est naturel de supposer acquise une bonne dose d'Algèbre linéaire, et c'est ce que nous ferons [1], mais on peut s'interroger sur les prérequis attendus en Analyse, et tout particulièrement en Topologie. S'il est vrai que les notions préhilbertiennes enrichissent la Topologie en proposant des exemples d'espaces vectoriels normés et que, à ce titre, on devrait connaître les premières avant d'aborder les secondes, il n'en demeure pas moins que, reconventionnellement, la Topologie fournit nombre de variantes à des démonstrations que l'on pourrait, en première analyse, estimer purement algébriques.

En effet, dès qu'une notion algébrique utilise la classification des polynômes irréductibles réels, elle requiert *ipso facto* des ingrédients inévitables d'Analyse ; pour le moins, la plus algébrique des démonstrations du caractère algébriquement clos de **C** se sert du théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions réelles définies sur un intervalle réel. Or, cette preuve est elle-même de l'Analyse parce que la construction de **R** *est* de l'Analyse ; on ne s'en rend compte qu'en l'effectuant, ce qui n'est certes plus le souci principal des programmes actuels des premières années d'études scientifiques.

Au surplus, lorsque nous commencerons à envisager des espaces de dimension infinie munis de produits scalaires, nous les appellerons *préhilbertiens*, nous constaterons rapidement que la Topologie sera devenue un outil incontournable, du fait que certaines propriétés, tout algébriques qu'elles

1. Au reste, nous voyons mal comment, dans un cours, que ce soit à l'Université ou en classe prépa, les chapitres d'Algèbre bilinéaire pourraient précéder ceux d'Algèbre linéaire, quoique la multilinéarité ait inévitablement droit à son strapontin lors de l'introduction des déterminants.

paraissent, sont en réalité l'apanage des espaces de Banach. Une bonne illustration de cela est à constater (avec dépit ?) dans l'exercice **III-3.3**.

Si nous donnons un exemple d'espace vectoriel préhilbertien non complet, ce n'est pas par souci d'érudition (enfin, pas seulement), mais c'est parce que ce défaut de complétude qui explique un défaut d'apparence algébrique, savoir l'absence possible d'un endomorphisme adjoint « en dimension infinie ». D'une certaine manière, l'adjoint existe bel et bien, mais dans un espace plus gros.

On ne trouvera donc pas de développements particuliers en Algèbre linéaire : le lecteur sera censé être familier avec les notions vectorielles (espaces vectoriels, applications linéaires), avec le calcul matriciel et avec les bases de la théorie de la réduction des endomorphismes. Nous pensons que nous appesantir là-dessus reviendrait à dénaturer le présent opuscule.

En revanche, il nous a semblé utile de ne pas faire l'impasse sur les notions d'Algèbre bilinéaire qui, plus que les autres, sous-tendent et englobent les propriétés des produits scalaires. Un chapitre entier leur sera consacré, en plus de quelques exercices et nous formulons le vœu que cela donnera au lecteur l'envie d'en approfondir la théorie, en consultant prioritairement [2], et dans une deuxième étape [4].

De la Topologie, nous retiendrons surtout l'importante notion de *compacité* qui nous apporte pieds et poings liés des objets réalisant des extrema de fonctions continues réelles, quoique la *connexité* ait aussi son mot à dire. Il n'est pas nécessaire de détailler cela outre mesure ; l'annexe finale y pourvoit, à titre de *nécessaire de survie*, sans démonstration. On remarquera que, en fin de compte, nous n'aurons rien fait de plus que de généraliser les notions classiques des parties de $\mathbf{R}$, des suites de réels et des applications continues d'une partie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Enfin, un peu de Calcul différentiel se rencontrera inévitablement de ci, de là ; on pourra le laisser de côté en première lecture.

Terminons sur un constat. Même si les problèmes de distances et d'angles [2], ont joué un grand rôle historique dans la cristallisation de l'idée de produit scalaire et d'espace euclidien en général, nous avons délibérément limité à quelques allusions et à deux ou trois exercices notre regard sur la Géométrie ; les quelques fervents de la géométrie du triangle et des autres objets archaïques analogues, honorables personnalités devenues il est vrai bien rares, sont invités à aller voir plutôt [5] et [2].

2. Qui relèvent bien entendu de l'introduction d'un produit scalaire sur l'espace vectoriel attaché à un espace affine réel.