ORIZZONTI

Orizzonti

101. — Michèle Audin. *Souvenirs sur Sofia Kovalevskaya*
102. — Maurice Kleman. *Chronologie d'un physicien*
103. — Rémi Goblot. *L'infini en mathématiques*

Rémi Goblot

L'infini en mathématiques

Préface de Christian Houzel

Calvage & Mounet

Rémi Goblot est professeur honoraire à l'université de Lille. Ancien élève de l'École normale supérieure de Cachan (ENSET, 1958-62), agrégé en 1962, il soutient sa thèse d'état en 1971 (intitulée « Sur deux classes de catégories de Grothendieck » et accessible en ligne).

remi.goblot@nordnet.fr

Autres livres de l'auteur.–

▷ *Géométrie affine et euclidienne* (Masson, 1998)

▷ *Algèbre commutative*, cours et exercices corrigés (Dunod, 2001)

▷ *Algèbre linéaire* (Ellipses, 2005)

▷ *Algèbre et géométrie* (50% cours + 50% exos) (ÉdiScience, 2005)

Mathematics Subject Classification (2010) :

03-XX Mathematical logic and foundations
  03A05 Philosophical and critical
  03D78 Computation over the reals
 03Exx Set theory
  03E25 Axiom of choice and related propositions
  03F60 Constructive and recursive analysis

51-XX Geometry
 51Nxx Analytic and descriptive geometry

97-XX Mathematics education
  97F50 Real numbers, complex numbers
  97A30 History of mathematics and mathematics education

∞ Imprimé sur papier permanent

ISBN 978-2-9163-5268-8

À François Goblot et à Jean-Jacques Goblot
À Sylvie Goblot et à Pascal Goblot

Andromaque, je pense à vous ! Ce petit fleuve,
Pauvre et triste miroir où jadis resplendit
L'immense majesté de vos douleurs de veuve,
Ce Simoïs menteur qui par vos pleurs grandit,

A fécondé soudain ma mémoire fertile,
Comme je traversais le nouveau Carrousel.

Charles Baudelaire

Préface

Dès que les mathématiques furent constituées comme science dans l'Antiquité grecque, elles furent confrontées au problème de l'infini. Il y a une infinité de nombres entiers naturels : tout entier admet un successeur et donc la suite des nombres entiers ne s'arrête jamais ; de plus, les grandeurs considérées en géométrie sont divisibles, par exemple en deux moitiés et le processus de division ainsi commencé peut être itéré sans jamais s'arrêter : on dit que les grandeurs sont divisibles à l'infini.

Le plus ancien texte mathématique grec, les Éléments d'Euclide (vers 300 avant J.-C.), fait usage de l'infini à plusieurs reprises. Le deuxième postulat du livre I demande de « *prolonger continûment un segment de droite en une droite* » : la géométrie grecque n'opère pas avec des droites infinies mais avec des segments de droite ; mais l'opération de prolongement du postulat 2 peut se répéter indéfiniment.

Les droites parallèles sont définies comme « *des droites dans un même plan qui, prolongées indéfiniment dans les deux directions ne se rencontrent pas* », mais le cinquième postulat tente de ramener cette définition, qui engage l'infini, à une propriété angulaire vérifiable dans le fini. Il s'énonce ainsi : « *si une droite qui rencontre deux droites ‹données› fait des angles internes d'un même côté moindres que deux angles droits, ces deux droites, prolongées indéfiniment se rencontrent du côté où les angles sont moindres que deux angles droits* ».

La proposition 12 du livre I est un problème de construction : « *tracer une droite perpendiculaire à une droite infinie à partir d'un point qui n'est pas sur cette droite* ». Il faut bien supposer la droite donnée infinie car on ne connaît pas a priori le pied de la perpendiculaire cherchée.

Un des résultats les plus importants des livres arithmétiques d'Euclide (livres VII à IX) est l'infinitude des nombres premiers : « *les nombres premiers sont plus nombreux que n'importe quelle multiplicité donnée de nombres premiers* » (livre IX, prop.20).

L'infini entre en jeu dans la définition assez compliquée des proportions entre grandeurs continues (livre V, déf. 5) : « *On dit que des grandeurs sont dans le même rapport, la première à la deuxième et la troisième à la quatrième, lorsque les équimultiples de la première et de la troisième, pour n'importe quelle multiplication, sont à des équimultiples de la deuxième et de la quatrième, pour n'importe quelle multiplication, ou bien en même temps supérieurs, ou bien en même temps égaux, ou bien en même temps inférieurs lorsqu'on les prend dans l'ordre correspondant* ». Dans cette définition on doit considérer « *n'importe quelle multiplication* », soit une infinité de cas, mais cela n'empêche pas Euclide de développer la théorie des proportions sur cette base. Il faut rappeler que, dans cette mathématique, le rapport de deux grandeurs n'est pas considéré comme un nombre mais seulement comme une relation entre ces grandeurs que la définition 5 s'attache à préciser ; autrement dit, les anciens Grecs n'ont jamais utilisé les nombres que nous appelons réels et auxquels Rémi Goblot consacre les chapitres 1 et 9 du présent ouvrage.

Au livre XII, Euclide utilise la théorie des proportions du livre V pour établir des déterminations infinitésimales qui proviennent des recherches d'Eudoxe : l'aire d'un cercle est proportionnelle au carré de son rayon ; le volume d'une pyramide de hauteur fixée est proportionnel à l'aire de sa base ; le volume d'un cône est le tiers du volume du cylindre qui a même base et même hauteur ; le volume d'un cône ou d'un cylindre de hauteur donnée est proportionnel à l'aire de sa base ; le volume d'une sphère est proportionnel au cube de son diamètre. Tous ces résultats sont obtenus en établissant que l'hypothèse d'un rapport plus grand ou plus petit que celui énoncé conduirait à une contradiction.

Avant Euclide, Aristote avait introduit, pour les besoins de sa Physique et de sa Métaphysique, la distinction capitale entre le mode d'être en acte et le mode d'être en puissance ; il avait clairement énoncé que les mathématiciens pouvaient utiliser l'infini, mais seulement l'infini en puissance ou potentiel, c'est-à-dire l'indéfini (comme la suite des entiers ou celle des divisions successives d'une grandeur continue). Pendant très longtemps, la pratique des mathématiciens est restée conforme à cet interdit et l'infini actuel s'est introduit d'abord subrepticement avec le calcul sur les nombres décimaux illimités dès le XVIIe siècle ; R. Goblot expose ce calcul dans le chapitre 1 de son ouvrage. Sur le modèle de ces nombres, on a ensuite considéré des expressions algébriques infinies, en particulier les séries de puissances d'une variable. Le même XVIIe siècle a vu apparaître une forme d'actualisation de l'infini dans l'introduction des points à l'infini du plan par G. Desargues en vue d'unifier la théorie des sections coniques (ellipse, parabole, hyperbole) ; selon Desargues, ces courbes ne diffèrent que par leur comportement à l'infini. R. Goblot explique la construction du plan projectif ainsi obtenu dans son chapitre 2.

Par ailleurs, les fondateurs du calcul différentiel et intégral ont introduit des quantités *infiniment petites* dont le statut n'était pas bien précisé et variait selon les auteurs ; corrélativement, des quantités infiniment grandes étaient inévitables comme inverses des quantités infiniment petites. Au XVIIIe siècle, les tentatives pour donner des définitions précises de telles quantités étaient encore très peu satisfaisantes et finalement, dans ses *Leçons*, Cauchy (1821) définit les infiniment petits comme des suites qui tendent vers 0 . Mais le calcul sur les suites convergentes n'a pas les bonnes propriétés du calcul sur les nombres : deux suites ne sont pas nécessairement comparables ; il existe des couples de suites non nulles dont le produit est nul. La solution de cette difficulté a été découverte par A. Robinson avec l'*analyse non standard* (1966), que R. Goblot expose dans son chapitre 10.

La transgression radicale de l'infini actuel a été effectuée par G. Cantor à la fin du XIXe siècle lorsqu'il a introduit les ensembles infinis et les nombres transfinis (ordinaux et cardinaux). Ce processus d'*actualisation* de l'infini est le sujet principal du livre de R. Goblot. La distinction aristotélicienne entre acte et puissance est expliquée au chapitre 3, dans lequel les cardinaux transfinis de l'ensemble des entiers et de l'ensemble des nombres réels sont abordés ; le second cardinal est strictement supérieur au premier ce qui va à l'encontre de l'idée ancienne selon laquelle un infini ne peut pas dépasser un autre infini, l'infini ayant quelque chose d'absolu. La théorie naïve des ensembles fait l'objet des chapitres 4 à 7 ; le chapitre 5 (principe de récurrence) et le chapitre 7 (axiome du choix) expliquent comment on peut atteindre des résultats portant sur des ensembles infinis par des raisonnements fondés.

Au cours de ces développements de la théorie naïve des ensembles, R. Goblot fait bien sentir l'incapacité d'une description informelle à atteindre une rigueur satisfaisante. Cela le conduit naturellement à exposer une théorie des nombres réels au chapitre 9 et une théorie axiomatique des ensembles au chapitre 10. On voit, au cours de ces exposés, que les théories axiomatiques ont toujours quelque chose d'incomplet et qu'elles ne permettent pas d'épuiser la richesse de la réalité mathématique.

Car R. Goblot revendique avec force une position *platonicienne*, selon laquelle il y a une réalité mathématique que l'on explore à l'aide de l'outil mathématique. Cette position agacera sans doute plus d'un lecteur, mais je ne pense pas que l'on puisse pratiquer les mathématiques sans la partager au moins partiellement. Si le réel se reconnaît à ce qu'il résiste, comme un mur dans lequel on se cogne, personne ne peut nier que les objets considérés par les mathématiciens résistent ; on ne décide pas arbitrairement si un nombre donné est premier ou est une somme de deux carrés. Au cours de l'histoire, les objets mathématiques ont pu changer de statut, mais le nouveau statut, acquis dans une théorie plus élaborée, se révèle comme connaissance plus approfondie d'un objet qui était déjà là, imparfaitement connu.

On aura compris que le livre de R. Goblot traite d'un sujet fondamental et qu'il apporte des développements pénétrants et riches. Mais, pour l'essentiel, il reste élémentaire et accessible aux non mathématiciens ; seul le chapitre 10 contient des parties plus techniques. Cet ouvrage devrait permettre de renouer avec la tradition de la philosophie des mathématiques, un peu en sommeil actuellement ; car, il est clair que la philosophie des mathématiques ne peut se faire sainement que de l'intérieur des mathématiques et non pas à partir de discours vagues et superficiels empruntés à la philosophie analytique.

Christian Houzel

Table des matières

Introduction

Le projet est de s'adresser à un large public : toute personne intéressée par les questions philosophiques et interpellée par l'apparent ésotérisme des mathématiques. L'ambition est de permettre au lecteur d'entrer réellement dans les mathématiques. Il s'agit donc d'un livre, non de vulgarisation, mais bien d'initiation, agrémenté de commentaires « philosophiques ».

Un tel projet peut sembler irréaliste tant est important l'effort proposé au lecteur étranger à la pratique mathématique. Mais il existe un autre public susceptible d'être intéressé : celui des étudiants et des enseignants en mathématiques. Il peut être l'occasion d'un autre regard sur leur discipline.

Aucune connaissance particulière n'est requise, si ce n'est les mathématiques enseignées dans les cycles primaire et secondaire, quelques rares fois, en terminale scientifique. Mais en dépit de tous nos efforts pour aplanir les difficultés, il est certain que sa lecture demande un travail important. Pourquoi proposer un tel travail au lecteur ? Pourquoi peut-il être intéressant pour un philosophe[1] d'entrer réellement dans le monde mathématique ? Pourquoi donc proposer un tel livre ?

On dit parfois que l'Universel est le domaine de la philosophie et la Raison son outil. Jusqu'au XVIIIe siècle, la philosophie apparaît comme *« science omni-englobante, la science de la totalité de l'étant. Les sciences au pluriel, celles qui sont à fonder et celles qui sont déjà au travail, ne seraient que des rameaux dépendant de la seule et unique philosophie »* (Husserl, *La crise des sciences européennes*). Il y a peu, le matérialisme dialectique marxiste avait encore cette prétention. Mais cette époque est révolue. La philosophie apparaît maintenant plus comme questionnement que comme source de certitudes.

N'en reste-t-il pas que le philosophe a vocation à s'occuper de tout ? à commenter l'activité humaine ? Inversement, les spécialistes de tel ou tel domaine n'ont-ils pas besoin d'un commentaire, à la fois extérieur et compétent ? N'est-ce pas le rôle des philosophes ? Se pose ici le problème : comment se faire une idée, pas trop inexacte, d'un domaine de la pensée sans y faire immersion ? Une information est-elle possible sans pénétrer à l'intérieur ? Nous doutons qu'une vulgarisation honnête évitant toute immersion soit suffisante. Elle n'exclut en tout cas pas un éventuel projet d'entrer réellement dans la matière. C'est une première raison de proposer ce livre.

Les mathématiques ont la réputation d'une discipline aride, rébarbative, mais rigoureuse et ont parfois suscité l'envie des philosophes par leur apparente capacité à « établir des vérités certaines au moyen de démonstrations incontestables ». Le style de rédaction de l'*Éthique* de Spinoza, mimant leurs processus démonstratifs, illustre cette affirmation. La logique formalisée en syllogismes est une tentative de systématisation du raisonnement pour parvenir à des certitudes. On a parfois l'impression d'une suite stérile de truismes comme dans le syllogisme :

1. Tous les hommes sont mortels,
2. Socrate est un homme,
3. donc Socrate est mortel.

Partant de prémisses, une démonstration mathématique est réputée être une suite d'assertions, chacune se déduisant de façon **évidente** d'assertions antérieures. La conclusion à laquelle on parvient ne serait-elle qu'une autre formulation (ou un affaiblissement) des prémisses initiales ? Comment une suite de truismes peut-elle être d'un quelconque intérêt ? Cela explique que

[1]Il ne s'agit pas seulement des philosophes « professionnels ». Tout un chacun n'a-t-il pas vocation philosophique ?

beaucoup de personnes s'étonnent de ce que l'on fasse encore de la recherche en mathématiques[2]. Cet étonnement n'est nullement absurde. Ces personnes croient que les mathématiques ne sont qu'une collection de procédures schématiques dont le seul intérêt est de permettre une économie de pensée en évitant de répéter indéfiniment les mêmes processus de mécanique intellectuelle. C'est un peu ce qu'exprime Mme de Staël dans son livre : *De l'Allemagne*, lorsqu'elle traite des universités. Les mathématiques y sont décrites comme un mécanisme purement automatique :

Pascal, ce grand géomètre, a reconnu lui-même les défauts inséparables des esprits formés d'abord par les mathématiques : cette étude, dans le premier âge, n'exerce que le mécanisme de l'intelligence ; les enfants que l'on occupe de si bonne heure à calculer perdent toute sève de l'imagination et n'acquièrent point à la place de justesse d'esprit transcendante : car l'arithmétique et l'algèbre se bornent à nous apprendre de mille manières des propositions toujours identiques... Les mathématiques rendent particulièrement appliqué ; mais elles n'habituent pas à rassembler, apprécier, concentrer ; l'attention qu'elles exigent est pour ainsi dire en ligne droite ; l'esprit humain agit en mathématiques comme un ressort qui suit une direction toujours la même.

La rançon de cette rigueur serait donc une certaine stérilité. N'est-il pas paradoxal que, par un cheminement purement logique, on puisse aboutir à une conclusion qui soit un réel enrichissement de l'hypothèse ? Kant a insisté sur cet aspect étonnant en distinguant[3] :

– les **raisonnements analytiques** qui se réduisent à isoler dans les prémisses certains points particuliers pour les mettre en lumière,
– les **raisonnements synthétiques** qui, à partir des prémisses, apportent des connaissances réellement nouvelles sur le problème étudié.

C'est un fait que la fécondité des mathématiques a un côté fascinant et mystérieux qui participe de l'attrait qu'elles exercent. Comment l'expliquer ? Comment une suite d'assertions évidentes peut-elle produire un résultat nouveau ? Une conception « platonicienne » apporte une réponse (en annulant la question) : une démonstration ne produit rien, si ce n'est la connaissance du résultat découvert (mais pas le résultat lui-même). De même, la traversée de l'Atlantique par Christophe Colomb en 1492 n'a pas produit l'Amérique elle-même, mais seulement la connaissance en Europe de l'existence de ce continent. Il n'y aurait pas de création (si ce n'est celle du « grand horloger » à laquelle l'homme participe en élaborant des outils pour la mettre au jour et des langages propres à en rendre compte), mais seulement des découvertes de « choses » mathématiques existant par elles-mêmes préalablement.

Un de nos objectifs est de donner une idée du caractère ouvert du monde mathématique, de convaincre le lecteur que ce n'est pas un domaine borné de la pensée. C'est une deuxième raison de proposer ce livre.

La citation de Husserl donnée plus haut donne de la philosophie l'image d'un univers « un » divisé en régions (les rameaux). On peut l'interpréter comme étant l'univers platonicien des idées, des concepts, des objets de pensée. Nous partageons cette conception et considérons le monde de la pensée comme doté d'objectivité. Un des aspects nobles du projet humain est d'y faire la lumière. En plus de l'aspect événementiel et de la description des conditions de vie, l'histoire humaine est aussi l'histoire de l'exploration de cet univers platonicien. Cette exploration a commencé il y a des centaines de milliers d'années, avec l'apparition des hominiens et s'est faite à tâtons jusqu'à la systématisation de la rationalité de la pensée en Grèce il y a 2500 ans. Il nous paraît tout à fait remarquable que cette démarche exploratrice fondée sur la raison n'en dissipe pas totalement le mystère, mystère résiduel où réside sa beauté[4].

Dans cette optique, le monde mathématique constitue une région tout à fait spéciale de l'univers platonicien. Sa particularité est que c'est la région où l'on peut faire la lumière la plus complète. Les Grecs sont les premiers à en avoir constaté l'unité et dessiné la frontière, il y a maintenant 2500 ans. La nature des raisonnements philosophiques a conduit à une pluralité de systèmes. On serait donc tenté d'utiliser le pluriel : les philosophies et non la philosophie.

[2]C'est ainsi que Claude Allègre, armé de ses certitudes, a prophétisé leur mort prochaine, le travail des mathématiciens pouvant, à ses yeux, être bientôt fait par des machines.

[3]Cette distinction, dont la pertinence logique est problématique, a le mérite de reconnaître la fécondité de la raison raisonnante.

[4]On a trop souvent une conception réductrice de la raison. Présenter les rationalistes comme de tristes « trissotins » est une caricature. Mystère et beauté ne sont pas synonymes d'obscurité et d'ésotérisme. C'est ainsi que commenter (en utilisant sa raison) un poème de Baudelaire peut éclairer et augmenter la jouissance esthétique, par exemple en établissant une connivence entre le poète et le lecteur.

En revanche, les mathématiques constitueraient un seul domaine et l'emploi du pluriel ne réfère-t-il pas aux différentes régions qui le constituent ? C'est alors le singulier qu'il faudrait alors utiliser : la mathématique, comme on l'a fait dans les années 30. Pour nous plier à l'usage actuel, nous continuerons à utiliser le pluriel : les mathématiques.

Dans la démarche exploratrice de l'univers platonicien, la région mathématique offre un unique exemple de clarté presque totale[5]. Il en résulte pour le mathématicien une situation de confort intellectuel où le flou est banni. C'est à une telle situation de confort intellectuel qu'il s'agit de parvenir lorsque l'on entreprend de faire la lumière sur une question. Il est bien sûr illusoire de vouloir exporter cette clarté telle quelle aux autres domaines de la pensée[6]. Voici donc une troisième raison de proposer ce livre : donner un aperçu de cet « idéal de pensée claire ».

La position que nous développons peut se résumer schématiquement ainsi :

– les êtres mathématiques sont dotés d'une objectivité ; ce ne sont pas des créations de l'esprit humain, mais des résultats de découvertes ; en ce sens, ils existent dans un monde platonicien abstrait ;
– les langages[7] pour rendre compte des objets mathématiques découverts (souvent imparfaitement et de façon partielle) sont élaborés par l'esprit humain.

Cette position philosophique[8] est évidemment contestable, mais ce parti-pris affiché est l'un des « fils rouges » pouvant guider le lecteur.

Pour reprendre une terminologie de J.-M. Salanskis (*Philosophie des Mathématiques*), l'univers platonicien est constitué de « choses » (nombres, formes, accord musicaux, notions de bien et de mal, etc.). C'est par intuition et tâtonnement que l'exploration des choses mathématiques a commencé. C'est encore bien souvent le cas actuellement pour les nouveaux domaines abordés. Selon nous, le rôle de l'intuition (surtout lors des premières rencontres) conforte cette conception platonicienne : l'intuition et l'exploration tâtonnante ne portent-t-elles pas sur ce qui est étranger (mais existe bel et bien) et dont on tente de se faire une idée lors d'un premier contact ? Cette première exploration empirique permet souvent d'obtenir de très nombreuses informations.

Il faut ensuite vérifier la validité des résultats obtenus, les énoncer clairement, les comprendre, les classer et les insérer dans le corpus des connaissances classiques. Jusqu'à la fin du XIXe siècle, la recherche mathématique s'est faite sur un mode « naïf », ce qui n'exclut pas la rigueur, en s'appuyant sur la raison, c'est-à-dire la logique élémentaire. Mais les notions premières (par exemple la notion de nombre entier) étaient admises, considérées comme allant de soi et faisant donc partie de notre entendement. C'est à la fin du XIXe siècle qu'est apparue la crise des

[5] La lumière porte en particulier sur ce qu'on pourrait interpréter comme des limites de la démarche mathématique, par exemple les théorèmes de Gödel (qui fascinent tant les philosophes et qu'ils invoquent parfois abusivement).

[6] Le pamphlet de Sokal et Bricmont, *Impostures intellectuelles*, dénonce un usage abusif, souvent dénué de toute signification, des concepts mathématiques dans d'autres disciplines. Cet emploi abusif illustre notre affirmation sur la fascination qu'exerce les mathématiques sur certains penseurs.

[7] La terminologie mathématique n'est pas seulement affaire de convention. Elle a souvent une fonction pédagogique.

Pour les disciplines issues de la perception du monde environnant par des processus de schématisation et d'abstraction (géométrie, topologie), le vocabulaire a une connotation fortement imagée : droite, point, tangent, contact, limite, continuité, voisinage, ouvert, fermé, adhérence, accumulation, etc. Le danger est alors de ne pas accorder suffisamment d'attention aux définitions mathématiques précises pour s'en tenir aux sensations que ces mots évoquent. Il en est de même du vocabulaire des probabilistes (probabilité, espérance mathématique, etc.).

Pour ce qui est des nombres et de l'algèbre, les entiers rencontrés dès la petite enfance sont bien ceux des mathématiques, d'où leur nom d'**entiers naturels** : « que l'on trouve dans la nature » ! En revanche, les nouveaux nombres introduits par la suite présentent un caractère d'étrangeté qu'indique souvent leur dénomination : nombres négatifs, irrationnels, transcendants, complexes, imaginaires. Cette terminologie a peut-être l'inconvénient d'effrayer ou de susciter de fumeux fantasmes lors des premières rencontres. Par la suite, c'est rarement que le vocabulaire de l'algèbre a une connotation imagée.

Il n'empêche que, dans la plupart des cas, le vocabulaire utilisé a pour fonction de « parler à l'intuition ».

[8] Comme l'écrit C. Houzel dans sa préface, la plupart des mathématiciens sont platoniciens, certains implicitement, d'autres s'assumant comme tels. Les mathématiciens **classiques** (majoritaires) travaillent dans le cadre formalisable de la **théorie des ensembles** au sens classique du terme, que nous développerons peu à peu dans le livre. Il existe d'autres courants, actuellement minoritaires (mais cette situation n'est peut-être pas intangible), en particulier les analystes **non standard** et les **constructivistes** (ou **intuitionnistes**). Nous tenterons à la fin du chapitre 10 de donner une idée un peu précise de leurs conceptions (paragraphe 10.3.4 pour les non-standard et section 10.4 pour les constructivistes).

fondements, crise due pour une grande part à l'ambiguïté du langage courant. C'est alors que la nécessité d'un formalisme plus rigoureux s'est faite sentir.

À plusieurs reprises, nous avons tenté d'illustrer ce processus de découverte tâtonnante, puis de mise au point formelle, en particulier pour deux domaines :

1. Pour l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels. Aux sections 1.3, 1.4 et 1.5 du chapitre 1, nous introduisons les nombres réels par les développements décimaux infinis et explorons empiriquement les règles qui les gouvernent. Pour cela, nous nous aidons de deux boussoles :
   - nos connaissances sur les nombres à développement décimal fini (les nombres décimaux), introduits à l'école primaire en classe de CM1,
   - nos conceptions sur ce qu'est une droite (par exemple, entre deux point distincts d'une droite, il existe toujours d'autres points).

   Cette exploration naïve se poursuit à la section 3.2 du chapitre 3 pour découvrir un premier exemple de cardinal non dénombrable, puis aux sections 9.1 et 9.2 du chapitre 9 où la notion de limite d'une suite est dégagée. La lumière se fait ainsi peu à peu sur l'objet mathématique fondamental et compliqué qu'est le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. C'est armés de la connaissance ainsi accumulée que nous pourrons enfin donner des descriptions formelles de $\mathbf{R}$ aux sections 9.3, 9.4 et 9.5 et préciser son statut dans la catégorie des ensembles.
2. Pour la théorie des ensembles. Elle est d'abord abordée de manière naïve, y compris à la section 10.1 du chapitre 10. C'est ainsi qu'a procédé Cantor. Ce n'est qu'aux sections 10.2 et 10.3 que la démarche axiomatique est examinée. Le livre *Théorie des ensembles* de J.-L Krivine nous a servi de référence. Son chapitre 1 commence ainsi : *Nous avons tous une idée intuitive de ce qu'est un ensemble, et c'est sur cette intuition que nous nous appuyons pour trouver les axiomes de la théorie des ensembles.* Selon lui, les axiomes sont donc *trouvés* (et ne sont donc pas des créations de l'esprit humain).

Les concepts mathématiques étant ainsi obtenus, il reste à trouver les règles qui les gouvernent, c'est-à-dire à démontrer des théorèmes à leur propos. Nous constaterons que l'ampleur des résultats obtenus par une approche naïve est considérable. Schématiquement, on peut distinguer plusieurs phases dans la résolution d'une question.

- Dans la démarche exploratrice tâtonnante pour la résolution d'un problème, la formulation claire d'une conjecture[9] est une première étape importante : il s'agit d'abord de parvenir à bien poser la question.
- C'est ensuite par d'autres tâtonnements que l'on tente de découvrir des voies d'accès. Cette phase n'est pas totalement distincte de la précédente car, ce qui a motivé la formulation de la conjecture, c'est souvent une intuition du chemin pour y parvenir.
- La démarche suivante consiste à rédiger une démonstration. C'est l'épreuve de vérité : la voie d'accès que l'on a cru discerner existe-t-elle réellement ou n'est-ce qu'un mirage ? L'achèvement d'une démonstration « en forme » est donc une étape essentielle dans cette recherche de « pensée claire ». Il faut ensuite épurer la démonstration en éliminant tous les passages inutiles.
- Pour être tout à fait satisfait, il reste à évaluer le résultat obtenu. Comment s'insère-t-il dans le paysage mathématique ? Donner plusieurs démonstrations d'un même résultat n'est pas toujours un luxe superflu. On découvre parfois des proximités inattendues.

La « pensée claire » n'est donc que l'aboutissement de cette démarche exploratrice. Elle en est la récompense. Pour la découverte des objets mathématiques, la première phase tâtonnante n'est pas sans provoquer un certain inconfort, une impression de flou et d'imprécision, surtout au début. Si le lecteur est tenace, la manipulation de ces objets imparfaitement définis devrait le familiariser peu à peu. Ce malaise, atténué, pourrait alors faire office d'aiguillon et de motivation pour entreprendre une remise en ordre par une description formelle et parvenir ainsi à une situation plus confortable intellectuellement.

Il en résulte une difficulté supplémentaire car ce livre n'est pas homogène : il cherche à donner un aperçu à l'aide d'exemples sur chacun de ces aspects très différents de la pensée mathématique.

[9] Le mot « conjecture », couramment employé par les mathématiciens, ne suppose-t-il pas implicitement une conception platonicienne : une conjecture n'est-elle pas une supposition portant sur une réalité extérieure mal connue ?

Beaucoup des affirmations et commentaires « philosophiques extra-mathématiques » qui accompagnent ce texte sont évidemment contestables[10]. Ils ont deux fonctions :

– principalement, une fonction pédagogique : mieux expliquer l'apparition et le rôle des concepts mathématiques par des comparaisons avec d'autres domaines de la pensée ou de la vie,
– secondairement, indiquer comment les choses nous apparaissent et comment nous les ressentons.

Comme nous l'avons indiqué, notre approche commence « à tâtons », de façon non formelle et naïve. Nous nous appuierons sur les « connaissances a priori » du lecteur : intuitions et notions communes, en général enseignées au collège ou au lycée, qu'il s'agit de préciser et d'approfondir. Ce faisant, nous pointerons des questions philosophiques lorsqu'elles se présenteront : les règles du raisonnement logique sont-elles un « donné de la nature » ? le langage courant[11] est-il adapté aux mathématiques ?... Cette approche tâtonnante peut générer une impression de flou et de confusion, ce qui est admis ne pouvant pas toujours être clairement énoncé. C'est cet inconfort intellectuel qui motivera la mise au point axiomatique ultérieure.

Les conceptions platoniciennes ne sont pas partagées par tous les scientifiques, en particulier par les utilisateurs des mathématiques. Pour eux, les mathématiques sont d'abord un outil, un langage adapté à leurs besoins, permettant la formulation de conjectures et de résultats scientifiques, le calcul étant de plus un puissant moyen d'investigation. Il faut reconnaître que les mathématiques sont aussi cela et qu'il est certainement réducteur de rester focalisé sur ce dilemme création-découverte. Nous verrons qu'à l'intérieur même des mathématiques, ce double aspect existe, par exemple entre les mathématiques numériques (arithmétique, algèbre, analyse, ...) d'une part et la géométrie (élémentaire, algébrique, différentielle,...)[12] d'autre part.

Le sujet abordé : **l'infini en mathématiques**, a été choisi pour sa connotation philosophique et la faible quantité de connaissances préalables qu'il requiert. L'infini se présente à nous sous forme potentielle, c'est-à-dire par l'absence de barrière empêchant d'aller plus loin. Voici deux exemples situés dans deux contextes différents : numérique et géométrique.

– Chacun a pu constater combien l'infinitude des nombres entiers fascine l'esprit humain, en particulier les enfants lorsqu'ils découvrent qu'il n'existe pas de plus grand nombre : on peut toujours ajouter 1 !
– La géométrie plane de l'enseignement secondaire donne lieu à des figures tracées sur une feuille de papier, mais imaginées dans un plan illimité. Lorsque l'on regarde vers le ciel sans qu'aucun obstacle n'interrompe notre regard, que voit-on ? un point du ciel ? qu'est-ce qu'un point du ciel ?..

Une question philosophique posée par Aristote nous suivra tout au long du livre : peut-on « actualiser l'infini » ? Autrement dit, peut-on envisager des entités infinies (ensembles ayant une infinité d'éléments, points infiniment éloignés, nombres à développement décimal infiniment long, raisonnements par récurrence supposant implicitement des démonstrations infiniment longues, raccourcis évitant des phrases comportant une infinité de mots, etc.) ? Nous verrons que sauter le pas en décidant d'« actualiser l'infini » prend des tournures différentes dans les contextes numérique et géométrique. Il ne s'agit pas d'une démarche unique, faite une fois pour toutes,

[10] Par exemple, la conception « platonicienne » que nous affichons, parfois, un peu trop ostensiblement. C'est avec surprise que nous avons constaté combien elle heurtait certains esprits.

[11] Les Grecs, il y a 2500 ans, ont fortement marqué la spécificité de l'activité mathématique à l'intérieur du champ de la pensée. Mais l'usage du seul langage courant a perduré jusqu'à la crise des fondements, à la fin du XIXe siècle. Cette crise a pu être surmontée par l'introduction de démarches axiomatiques et de langages formels, proprement mathématiques, dans le premier tiers du XXe siècle. Ces langages permettent d'atteindre l'idéal de « pensée claire ». Il en existe plusieurs. Ils sont d'un emploi souvent très lourd et leur rôle est surtout théorique. Nous les évoquerons aux chapitres 4, 7 et 10. Les mathématiciens continuent de penser dans le langage courant (fortement enrichi de terminologie mathématique et de symboles calculatoires). Dans la communauté des mathématiciens classiques, un résultat est réputé démontré si l'on est parvenu à la conviction que sa transcription (y compris pour l'énoncé du résultat obtenu) est théoriquement possible en langage formel. Cette transcription est souvent trop lourde pour être menée à terme. On peut reprocher le caractère invérifiable (dans la pratique) de ce critère. Force est de constater qu'il n'a suscité aucune divergence entre mathématiciens (classiques). Les divergences ne portent pas sur la validité des résultats obtenus dont il faut donc reconnaître le caractère universel et objectif. Il n'existe que des différences d'appréciation sur l'intérêt de telle recherche ou de tel résultat et des différences de sensibilité quant à leur manière de sentir leur discipline.

[12] Le lien entre mathématiques numériques et géométriques n'est pas toujours de ce type. Il est courant que la géométrie se mette au service de l'arithmétique ou que les deux interviennent de concert.

mais de démarches multiples entreprises dans des environnements divers. La situation d'infini potentiel n'en est souvent que décalée et réapparaît sous d'autres formes : elle ne peut être éliminée.

Pour que ces considérations ne restent pas un vain bavardage, il nous a semblé nécessaire d'entrer vraiment dans le sujet. Il s'agit donc d'un livre d'initiation. Pour rendre sa lecture moins ardue, ce livre comporte trois parties :

1. La première, constituée des sept premiers chapitres, a pour objet de donner une idée à peu près exacte de certaines notions de théorie des ensembles, de démarches mathématiques et de questions philosophiques sous-jacentes, en allégeant le plus possible les aspects techniques et les notations.

   La progression de ces sept chapitres obéit à une logique, chacun se référant aux chapitres antérieurs. À mesure que l'on avance, la difficulté va plutôt en augmentant, le style prend une allure de plus en plus « mathématique » au sens classique du terme, le texte se découpe de plus en plus en énoncés, théorèmes, définitions, propositions, les démonstrations deviennent de plus en plus nombreuses. Mais comme nous l'avons indiqué, notre démarche revêtira toujours un double aspect :

   – une forme naïve et tâtonnante : par exemple, lors de la rencontre d'un nouveau concept ou d'un nouvel énoncé ; les comparaisons avec des situations de la vie courantes et les appels à l'intuition seront alors souvent utilisés,
   – une « mise en forme » nous rapprochant un peu plus de notre idéal de « pensée claire » (énoncé plus « formel » d'une définition ou démonstration respectant un rituel liturgique).

   Espérons que les lecteurs de bonne volonté ne se laisseront pas rebuter[13]. Ils pourront ainsi se familiariser avec les façons (les tics !) des enseignants en mathématiques.

2. La deuxième apporte plusieurs notions supplémentaires, en particulier des démonstrations et du vocabulaire ; elle entre plus dans la technique et le formalisme. Elle est regroupée dans les chapitres 8, 9 et 10, dont les plus consistants sont le chapitre 9 portant sur l'ensemble des nombres réels et surtout le chapitre 10 sur la théorie des ensembles. Ce dernier occupe une place particulière,

   – par son ampleur : près du quart du total,
   – par le sujet traité : la problématique des fondements, une description de l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel,
   – une exploration des mathématiques non standard (10.3) et constructiviste (10.4).

   Comme pour le reste du livre, à côté du cheminement logique, nous avons développé des interprétations intuitives autant qu'il nous a été possible. Ce chapitre 10 ne peut tout à fait être considéré comme un chapitre de vulgarisation. Certains mathématiciens professionnels, **non spécialistes de théorie des ensembles**, seront peut-être intéressés d'y trouver un aperçu, très daté et très incomplet, que peut-être certains d'entre eux ignorent.

   Une grande partie des mathématiques peut s'exprimer en termes ensemblistes. Cette constatation a suscité dans les années 60 un enthousiasme souvent exagéré et a donné lieu à un enseignement de la théorie des ensembles sur un mode intuitif, d'abord dans l'enseignement universitaire. Les 7 premiers chapitres donnent une version plutôt ample de cet enseignement. Cette introduction de notions ensemblistes s'est étendue ensuite aux enseignements secondaire et même primaire sous la dénomination de « mathématiques modernes ». Cet épisode semble aujourd'hui bien oublié.

   Cependant, durant ces 100 dernières années, la logique et la théorie des ensembles se sont développées comme disciplines autonomes de façon très importante. Ce n'est pas du tout l'objet de ce livre que de donner un aperçu, même modeste, de ces développements. Les spécialistes de logique et théorie des ensembles, de même que les étudiants engagés dans cette voie, le trouveraient certainement daté, sommaire, limité au b-a-ba, bref, dénué d'intérêt. Pour dissiper tout malentendu, nous précisons ici que ce livre ne s'adresse aucunement à eux. Les lecteurs qui seraient intéressés sont invités à consulter les livres spécialisés, par exemple ceux de J.-L. Krivine, R. Cori et D. Lascar, P. Dehornoy cités en bibliographie.

[13]La longueur de ce livre peut avoir un effet intimidant tout à fait contraire à nos intentions. Que le lecteur sache que cette première partie (162 pages) a sa cohérence interne et donne une idée déjà assez précise et ample de la notion d'infini.

3. Le livre se termine par deux annexes (A et B) qui complètent cette introduction.
   – La première, intitulée *Résumé des problématiques*, est de style plus « philosophique ». Elle peut accompagner (voire précéder) la lecture du livre pour acquérir une vue d'ensemble au fur et à mesure de l'avancée.
   – La seconde, intitulée *Premier contact*, est le texte d'une intervention dans le cadre de *Cité-philo*[14] en novembre 2011. Comme l'indique le titre, elle peut servir de porte d'entrée. Son objet est de donner une première idée du sujet traité.

   Ces annexes sont l'occasion de redites : une même rubrique peut être évoquée dans chacune des deux annexes et dans le corps principal. Elles contribuent à l'allongement du livre. Espérons que le service qui en est attendu compensera cet inconvénient.

À propos des démonstrations, signalons une difficulté :

– Une démonstration a très souvent l'apparence d'un rituel « liturgique » : il faut que rien ne manque et donc tous les arguments logiquement nécessaires doivent être présents, même s'il s'agit de truismes. C'est un tic de certains enseignants parmi les plus consciencieux que de n'épargner aucun détail. Il en résulte un aspect fastidieux qui peut décourager et empêcher une vue d'ensemble.
– D'autre part, si le résultat démontré n'est pas trivial, il y a un « nœud de la démonstration » : l'argument essentiel, qu'il a été difficile de trouver pour transformer une conjecture en résultat. L'abondance de détails, logiquement indispensables, mais souvent quasi-évidents, peut avoir pour effet de masquer ce nœud essentiel, souvent insuffisamment mis en lumière.

Les démonstrations les plus difficiles ont été reportées aux chapitres 8, 9 et 10. Il n'est donc pas toujours facile dans une rédaction de distinguer ce qui est essentiel et difficile de ce qui n'est qu'une suite de truismes s'enchaînant automatiquement, sans compter que ce qui est évident pour les uns ne l'est pas nécessairement pour d'autres. Quatre stratégies peuvent être envisagées relativement aux démonstrations :

1. les « sauter » en première lecture,
2. les lire attentivement et les comprendre,
3. tenter de les établir par soi-même,
4. combiner dans des proportions à définir les trois premières attitudes.

Pour aider le lecteur dans la mise en œuvre d'une telle stratégie, les textes démonstratifs, en petit caractères, nettement séparés du texte principal, sont introduits et conclus par des signalisations :

– *Preuve* et *Fin de preuve*, en caractères italiques, si le contenu mathématique est modeste : simples vérifications ou constatations, calculs faciles, applications directes de résultats immédiatement antérieurs, etc. (par exemple, les raisonnements « analytiques » selon la terminologie de Kant),
– **Preuve** et **Fin de preuve**, en caractères gras, si le contenu mathématique n'est pas négligeable : calculs un peu compliqués, utilisation de plusieurs résultats, introduction d'auxiliaires, etc. (les raisonnements « synthétiques » selon Kant) ou s'il s'agit d'un résultat central pour la suite.

D'autre part, pour éviter de trop nombreuses digressions dans le cœur du texte, nous avons beaucoup utilisé les notes en bas de page. Mais ce ne sont pas toujours des détails accessoires qui s'y trouvent relégués et certains points importants y figurent.

Malgré nos efforts, ce livre est très imparfait. Il n'est même pas assuré que le projet qu'il vise à réaliser, au moins partiellement, soit pertinent. À notre sens, il constitue bien, parmi beaucoup d'autres, une entrée effective dans le monde mathématique, mais sans doute pas la plus raisonnable. Par le sujet abordé, il ne donne pas une idée exacte de l'activité mathématique, ni de ses derniers développements.

Pour terminer, nous livrons à la réflexion des éventuels lecteurs ce passage du à K. Popper (*La connaissance objective*, ch.III, *Une épistémologie sans sujet connaissant*) : *Une des principales raisons qui font adopter l'approche subjective erronée de la connaissance, c'est le sentiment qu'un livre n'est rien sans un lecteur : ce n'est que s'il est compris qu'il devient véritablement un livre ; sinon ce n'est que du papier recouvert de taches noires. Cette conception est à bien des égards*

[14] *Cité-philo* est le nom donné à une manifestation lilloise de philosophie se déroulant chaque année tout au long du mois de novembre.

erronée... Un livre contient de la connaissance objective, vraie ou fausse, utile ou inutile ; et que quelqu'un le lise jamais et saisisse véritablement son contenu, c'est presque accidentel... C'est cette possibilité ou potentialité d'être compris, ou mal compris ou mal interprété, qui fait d'une chose un livre. Et cette potentialité ou disposition peut exister sans être jamais actualisée ou réalisée.

Je remercie très chaleureusement Bernard Callenaere et Maurice Chamontin, qui m'ont accompagné pour l'ensemble de ce travail et ont formulé d'utiles et nombreuses remarques. Un grand merci à Daniel Perrin, qui en a relu une partie importante avec une exigeante bienveillance. Je suis très reconnaissant à Jean Delcourt, qui a relu mon travail avec une grande méticulosité et m'a conduit à de nombreuses modifications d'ampleurs diverses, tant sur la forme que sur le fond, m'amenant très souvent à préciser des points importants. Je remercie Nicolas Boulanguez et Yves Péraire, qui m'ont initié aux mathématiques non standard, Henri Lombardi pour m'avoir accompagné dans ma découverte du constructivisme. Merci à Jean-Paul Delahaye, qui m'a indiqué plusieurs intéressantes références. Merci à Carlos Sacré, toujours disponible pour me faire profiter de ses précieuses connaissances des logiciels Latex. Merci aux éditions Calvage et Mounet (et tout particulièrement à Alberto Arabia, Alain Debreil et Rached Mneimné), qui m'ont accueilli avec bienveillance et ont bien voulu assurer la publication de ce travail. Je remercie l'équipe de *Cité-philo*, spécialement Valerio Vassallo pour m'avoir offert l'opportunité d'une intervention dans le cadre de cette grande manifestation lilloise de philosophie se déroulant tout le mois de novembre de chaque année.

Je voudrais enfin exprimer ma grande reconnaissance à Christian Houzel, qui a relu méticuleusement ce travail tout au long de l'année 2013, m'amenant à remanier de nombreux passages. Ce très instructif échange m'a conduit à préciser et enrichir bien des conceptions (lien entre géométrie et mathématiques numériques, distinction entre réalité mathématique et outil mathématique, nombreuses précisions historiques,...). Il a poursuivi en 2017 cette aide déterminante pour la section 10.4 du chapitre 10 lors de ma découverte du constructivisme. J'attire l'attention du lecteur sur l'importance de sa préface à laquelle je me suis souvent référé dans le corps du livre.