La collection *Orizzonti*

101. — Michèle Audin. *Souvenirs de Sofia Kovalevskaya*
102. — Maurice Kleman. *Chronologie d'un physicien*
103. — Rémi Goblot. *L'infini en mathématiques*
104. — Michel Garcia. *Mathématiques à travers les siècles (I). Géométrie et arithmétique de l'Antiquité à nos jours*

MICHEL GARCIA

MATHÉMATIQUES À TRAVERS LES SIÈCLES

Tome I

Géométrie et arithmétique de l'Antiquité à nos jours

Calvage & Mounet

Ingénieur retraité de l'aviation civile, Michel Garcia est à l'origine de la section « Mathématiques » de l'Université ouverte Paris Diderot (U.O.), où il a assuré depuis 1999 un cours hebdomadaire sur une période de vingt ans. Érudit en mathématiques et en physique, Michel Garcia est également polyglotte et s'intéresse aux questions linguistiques, à l'histoire des langues et aux littératures comparées.

garcia.michel-dr@orange.fr

Mathematics Subject Classification (2010) :

01Axx History of mathematics and mathematicians
01A16 History of mathematics in Ancient Egypt
01A17 History of mathematics in Ancient Babylon
01A20 History of mathematics in Ancient Greece and Rome
01A25 History of mathematics in China
01A30 History of mathematics in the Golden Age of Islam
01A32 History of mathematics in India
01A35 History of mathematics in late antiquity and medieval Europe
01A40 History of mathematics in the 15th and 16th centuries
01A45 History of mathematics in the 17th century
01A50 History of mathematics in the 18th century
01A55 History of mathematics in the 19th century

ISBN 978-2-916352-91-6

♾ Imprimé sur papier permanent

© Calvage & Mounet, Paris, 2021

Je dédie ce livre à la mémoire de mon père
et à ma fille Corinne.

J’aimerais aussi rendre hommage à Michel de Vries,
regretté collègue, aviateur et ami, homme de grande culture
scientifique et littéraire, à la curiosité infatigable,
qui a émis un jour lointain l’idée saugrenue
que je devrais regarder de plus près les mathématiques.

In girum imus nocte ecce et consumimur igni.

این قافله عمر عجب میگذرد
(Omar Khayyam)

Кто избы себе не строил, тот земле не заслужил.
(Marina Tsvetaieva)

Sommaire du tome I

Sommaire		**i**
1	**Introduction**	**1**
2	**Essai de panorama historico-philosophique**	**7**
3	**Les théorèmes de Pythagore et de Thalès**	**19**
4	**La géométrie grecque**	**45**
5	**La théorie grecque des nombres**	**105**
6	**Infini et irrationnels dans les mathématiques grecques**	**143**
7	**Théorie des nombres et géométrie en Asie**	**189**
8	**Astronomie - Géographie - Trigonométrie**	**219**
9	**Polynômes et équations algébriques**	**307**
10	**De l’arithmétique à la théorie des nombres**	**417**
11	**Géométrie analytique**	**499**
12	**Géométrie projective**	**573**
A	**Preuves sans mots (ou presque)**	**655**
B	**Solides platoniciens, polyèdres et polygones sphériques**	**663**
C	**Constructions géométriques et les trois problèmes grecs**	**675**

D Rotations, projections et homographies **699**

E Arpenteurs et bâtisseurs d’autrefois **707**

Bibliographie **733**

Index des concepts **753**

Index des noms **769**

Table des matières **777**

Sommaire des tomes suivants

13 Les débuts du calcul intégral et différentiel

14 Naissance et premiers développements de l'analyse moderne

15 Apparition de l'algèbre abstraite et des structures

16 Extensions du concept de nombre

17 Combinatoire et dénombrement

18 De l'analyse et de la géométrie à la théorie des ensembles et à la topologie

19 Théorie des probabilités

20 L'émergence d'autres géométries

21 Entre géométrie, algèbre et analyse

22 Un gros brin de statistiques

23 Analyse fonctionnelle

24 Mélanges

25 Conclusion logique

F Aperçu d'analyse non standard

G Aperçu d'analyse constructive

H Musique

Chapitre 1

Introduction

Ce livre est le lointain avatar d’un support de cours d’environ cent cinquante pages, rédigé en vue du cours d’histoire des mathématiques de l’année 2011–2012, que j’ai assuré à l’Université Ouverte (U. O.) de Paris–Diderot. À la demande des stagiaires de l’U. O., j’ai remis l’histoire des mathématiques au programme depuis la rentrée 2015 et le support de cours est progressivement devenu le livre que vous tenez entre vos mains, livre qui, de ce fait, présente une certaine inhomogénéité. Le contenu du cours de 2011–2012 constitue en effet l’ossature des chapitres 2 à 7, 9, 11 à 13, 15 et 16, et il a simplement été remanié et complété tant bien que mal ; ces chapitres gardent donc des traces de rafistolage et sont moins approfondis [1] ; les chapitres 8, 10, 14 et 17 à 25, en revanche, ont été bâtis directement dans l’optique d’un traité plus complet et sont, sinon exhaustifs, plus solidement structurés. Quelques-uns des compléments aux chapitres de la première strate sont toutefois récents et écrits dans le même esprit que les chapitres nouveaux, par exemple, ceux sur la théorie de Galois et les fonctions elliptiques (chap. 9), le calcul barycentrique (chap. 11), le calcul vectoriel (chap. 15). Les annexes relatives aux « problèmes grecs », aux solides platoniciens, aux rotations et projections, à l’analyse non standard, remontent elles aussi au substrat de 2011 ; celles sur l’analyse constructive, sur les « trucs » des arpenteurs, architectes… et sur la musique, sont nouvelles.

1. Les principales victimes en sont les mathématiques mésopotamiennes, égyptiennes, chinoises, indiennes, etc., qui méritent de plus amples développements. Outre les ouvrages cités en bibliographie sous les intitulés correspondants, on conseillera aussi le 2e titre d’Olivier Keller mentionné en section II 4) de ladite bibliographie.

Ce livre a pour seul objectif de donner envie de s'intéresser à l'histoire de la discipline et de ne plus absorber la « formule de Machin » (voir le complément sur π du chap. 4), le « théorème de Truc » ou « l'inégalité de Bidule » (je n'ai pas d'informations biographiques sur ces deux personnages)… sans avoir la moindre idée de qui il ou elle était, de l'époque où il ou elle vivait et de ce qui a pu le ou la guider vers tel résultat. Une telle démarche entraîne nécessairement quelques considérations d'ordre philosophique et épistémologique éparses, mais je ne prétends nullement offrir un tableau unifié de la philosophie de l'histoire des mathématiques (ou de toute discipline scientifique) ; je ne prétends non plus donner une vision rigide de l'état de la question aujourd'hui, car les spécialistes, dont je n'ai pas les compétences, rencontrent régulièrement des informations nouvelles (textes, lettres…) susceptibles de remettre en question telle attribution de résultat à X ou Y, telle datation, etc.

Le but du livre n'est donc pas prioritairement technique (même s'il contient une forte dose de mathématiques parfois ardues), et j'ai délibérément écarté un exposé linéaire, préférant suivre l'appel des analogies ou connexions diverses entre sujets, qui s'expriment souvent intemporellement. Ce choix entraîne des incursions dans le futur ou dans le passé à plusieurs reprises, mais en principe, chaque chapitre conserve tout de même une certaine unité et une progression globale. Quant à l'ordre des chapitres entre eux, il est grandement subjectif, résultant à la fois de l'histoire de la rédaction évoquée plus haut et de l'influence de toutes sortes d'inspirations que je n'ai pas cherché à canaliser *a priori*. Si l'Antiquité est tout de même traitée plutôt au début et les développements récents vers la fin, je n'irai pas jusqu'à affirmer que l'ordre inverse m'eût rebuté !

Quelques exemples de démonstrations originales sont fournis (ainsi du texte d'Euler sur le calcul des variations), à la fois pour donner une idée de ce que pouvait être un discours mathématique non encore soumis à la rigueur de présentation moderne, et pour expliquer ce qui m'a pratiquement contraint à les aménager la plupart du temps, afin de rester accessible à toute personne ayant de bonnes connaissances du niveau des classes préparatoires (ou de l'ancienne propédeutique) en géométrie élémentaire et en analyse. Les notions plus modernes d'algèbre, de topologie… sont fournies au fur et à mesure des besoins et même des « rappels » de niveaux plus basiques parsèment le texte. En ce qui concerne les notations et le symbolisme, des exemples originaux, là encore, ont été proposés, afin de faire toucher du doigt combien notre symbolisme moderne nous facilite la vie, mais dans la majorité des cas, une légère modernisation a été nécessaire, à la fois pour ne pas rendre la composition technique de cet ouvrage inutilement compliquée, et pour éviter de trop nombreuses déprimes dans le lectorat (des villes ou des champs, peu importe) !

Une mise en garde s'impose à ce stade : le symbolisme mathématique, quasi universellement employé aujourd'hui aussi bien dans les mathématiques en elles-mêmes que dans le langage des sciences physiques et sociales, est le fruit d'une longue évolution. Premier point, chaque discipline scientifique, en premier lieu les mathématiques, est également le résultat d'une longue progression conceptuelle ; deuxième point, ce développement conceptuel est lui-même tissé de multiples influences croisées entre civilisations différentes, donc entre modes de pensée différents, et présente de ce fait des disparités régionales, voire des sauts temporels, troisième point.

Tout cela fait que nous avons un biais naturel à « recréer » les mathématiques grecques, par exemple, ou bien égyptiennes, indiennes, chinoises, etc., à partir de ce que **nous** considérons comme les mathématiques, à les exprimer dans le langage symbolique que **nous** connaissons et à les penser selon le moule de **notre** arsenal conceptuel. Se libérer de ces carcans demande un effort et s'en libérer totalement est illusoire, à la fois parce que c'est quasiment impossible et parce que cela n'aurait guère de sens de prétendre se plonger dans les mathématiques grecques ou autres en oubliant les nôtres. Il y a donc un compromis assez difficile à trouver et celui que j'ai adopté n'est probablement pas le meilleur du point de vue des spécialistes, mais je répète que mon seul but était de donner à qui lira ce livre le désir de s'intéresser de plus près à l'histoire des mathématiques et à leurs connexions avec d'autres champs de la connaissance ou de l'action.

Une recherche de ces interférences diverses nous montrera que des concepts aussi « élémentaires » au premier abord que ceux de nombre, de grandeur, d'unité, de décompte, de calcul, de mesure, etc., sont un mixte de substrat expérimental et d'élaboration rationnelle largement guidée par des présupposés philosophiques, et que les influences entre ces différents pans de l'expérience humaine sont rarement à sens unique. On verra alors comment le découpage même des mathématiques en sous-disciplines, arithmétique, géométrie, algèbre… et la définition de ces dernières sont aussi le produit de cadres idéologiques historiques, l'arithmétique n'étant pas la même pour le platonicien, pour le néoplatonicien ou pour l'aristotélicien, la géométrie étant différente pour le kantien et pour le relativiste, etc. On verra aussi combien le fait que les mathématiques ne sont pas désincarnées, mais faites par des êtres humains, peut brouiller les cartes, entraînant par exemple, en raison de la querelle de priorité entre leibniziens et newtoniens, un décalage de plusieurs décennies entre la Grande Bretagne et le continent dans le développement de l'analyse. Une discussion approfondie de ce type de questions se trouve dans des ouvrages comme celui de Jacob Klein sur la pensée mathématique grecque et les origines de l'algèbre, cité

en Bib.2.2.a dans la bibliographie, lecture fortement conseillée pour compenser l'exposé nécessairement simplifié qu'on trouvera ici, et pour appréhender dans toute sa complexité la signification d'expressions apparemment banales comme « algèbre géométrique » ou « géométrie analytique », pour n'en citer que deux.

Pour en revenir à des considérations plus terre à terre, une pensée émue pour celles et ceux qui sont souvent contraints de travailler seul(e)s dans leur coin, m'a engagé à fournir une solution détaillée de tous les exercices. Ces derniers ont souvent été fabriqués spontanément lors de la rédaction des chapitres, comme s'imposant d'eux-mêmes, et j'ai plus d'une fois eu l'angoisse de réaliser que je « séchais » un bon moment sur leur résolution (si je tenais le qui me les a balancés), aussi demandé-je une certaine indulgence.

D'une manière générale, tout en essayant de ne pas raconter trop de bêtises, et malgré quelques passages un peu « hard », j'ai outrageusement conçu cette entreprise comme une sorte de jeu, seule façon, d'ailleurs, d'en venir à bout sans être bon pour la douche froide et la camisole.

J'ai sans doute été encouragé dans cette voie par mon ami mathématicien et éditeur Rached Mneimné, qui a manifesté de l'intérêt pour les premiers pas de 2011 et m'a incité à transformer l'essai, et qui lui-même apprécie l'humour et la fantaisie, tant que cela reste compatible avec un minimum de sérieux (j'espère ne pas vous causer de nuits blanches par les tentatives de discerner où se fait le partage !).

Malgré ces encouragements, ledit essai serait sans doute resté dans les tiroirs (un essai, plusieurs tiroirs ? problème de combinatoire ? ou de science occulte ?), étant donnée mon incompétence, assumée, en matière informatique, si une équipe d'aventuriers, parmi mes stagiaires de l'U. O., n'avait déclaré tout à trac, un beau jour (était-ce un beau jour pour eux ?) de 2012 ou 2013 : « pas de problème, votre texte, on vous le tape », sans mesurer dans quelle galère ils s'embarquaient !

Je dois ainsi remercier, outre mon éditeur cité plus haut, Jean Chabanne, Alain Fillieule et Gérard Ribière, premiers architectes malgré eux d'une construction qu'ils ont eu longtemps l'angoisse de voir s'éterniser comme la *Sagrada Familia*, rejoints rapidement par Jean-Louis Merchadou.

Et pourtant, une telle force de frappe ne suffit pas, si personne ne vient aider dans les relectures l'auteur, qui parfois finit par ne plus s'y reconnaître lui-même ! Une mention spéciale, donc, à ma relectrice de choc, Renée Bense, épaulée brièvement par un volontaire de passage dans le cours 2017–2018, Didier Boutrolle.

Comme il est d'usage en ces circonstances, je déclare solennellement que s'il reste des bourdes dans ce livre (et il en reste forcément), elles sont l'œuvre des Trolls ou de génies extra-terrestres facétieux et encore non identifiés (ah bon ?! ce n'est pas ça que vous vous attendiez à lire ?).

Note bibliographique

Le texte est complété par une bibliographie qui comprend deux sections principales : la première liste les ouvrages qui, peu ou prou, ont été mis à contribution pour la rédaction de ce livre, et envers les auteur(e)s desquels je reconnais donc implicitement une dette morale, bien qu'étant maintenant dans l'incapacité de distinguer précisément à qui je dois quoi ; la deuxième section regroupe les ouvrages qui ont inspiré le présent livre de manière plus distante, mais dont la consultation est aussi vivement recommandée. Ces deux sections mentionnent quelques titres dont le contenu a une teinte plus philosophique, voire littéraire, que mathématique : en effet, non seulement certaines disciplines, telle la logique, flirtent autant avec la philosophie qu'avec les mathématiques, mais l'histoire d'une branche de la connaissance, quelle qu'elle soit, ne peut s'abstraire ni de l'histoire générale de la pensée, des arts et de la culture, ni de celle de la société et des institutions, bref, de l'histoire tout court.

La lecture de textes originaux des grand(e)s mathématicien(ne)s du passé (voire du présent) est indispensable à une approche tant soit peu systématique et à une compréhension en profondeur de l'histoire des mathématiques, or nous sommes de nos jours dans une situation nettement plus confortable que nos prédécesseurs, grâce à la mise en ligne d'un nombre de plus en plus grand de ces textes, livres ou articles de revues. La bibliographie ne répète donc pas les titres soulignés tout au long des chapitres, que votre moteur de recherche favori saura infailliblement pister. Signalons toutefois qu'un nombre non négligeable de ces textes originaux sont disponibles sur le marché sous forme de livres ou de recueils d'articles, que certains moteurs de recherche (pas de pub !) se feront aussi un plaisir de dénicher pour vous. Seules quelques indications parcimonieuses, sur ce point, seront donc fournies dans la bibliographie.