

Théorie des ensembles comme fondement des mathématiques, volume 2

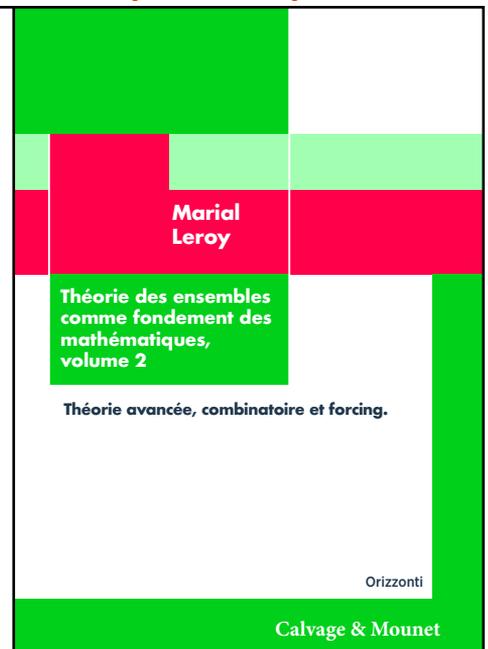
Théorie avancée, combinatoire et forcing

Martial Leroy

ISBN 978-2-493230-27-0



www.calvage-et-mounet.fr



Le sujet

Ce second volume s'intéresse à des énoncés indémontrables à partir de ZFC, incluant à la fois des hypothèses plus fortes et des énoncés indépendants comme l'hypothèse du continu. Il utilise des outils sémantiques, essentiellement les théorèmes de complétude et d'incomplétude de Gödel. On explore l'univers constructible de Gödel, puis on découvre la méthode du forcing de Cohen, qui permet de mettre en oeuvre des preuves d'indépendance. Ce volume se termine par d'autres utilisations du forcing : forcing produit, théorème d'Easton, forcing itéré, consistance de l'axiome de Martin, forcing propre, l'axiome PFA et d'autres axiomes de forcing.

Mots clés

Complétude ; compacité ; Löwenheim-Skolem ; second ordre ; récursivité ; incomplétude de Gödel ; ZFC ; cardinaux inaccessibles ; complexité ; collapse de Mostowski ; axiome du choix, hypothèse du continu ; Ramsey ; principe diamant, forcing de Cohen ; forcing itéré, forcing propre, PFA

Le public

Les étudiants de Master et les agrégatifs, les ingénieurs et autres physiciens. Les étudiants brillants de L3. Les scientifiques, au sens large du terme, à la recherche d'une introduction actualisée à ce sujet.

L'argumentaire

Après une étude détaillée des principaux théorèmes de logique (complétude, compacité, Löwenheim-Skolem, indécidabilité et incomplétude), le livre amène progressivement le lecteur à la compréhension de la combinatoire infinie et du forcing de Cohen, jusqu'aux résultats d'indépendance les plus classiques : axiome du choix, hypothèse du continu, axiome de Martin etc. L'étude fine des modèles de ZFC prépare également le lecteur au volume 3, qui sera consacré à la théorie descriptive et aux grands cardinaux.

La concurrence

En français, on dispose actuellement de trois ouvrages traitant de théorie des ensembles.

- 1) Jean-Louis Krivine : Théorie des ensembles, Cassini, 1998.
- 2) Patrick Dehornoy : La théorie des ensembles – Introduction à une théorie de l'infini et des grands cardinaux, Calvage & Mounet, 2017.
- 3) Etienne Bonheur : Éléments de mathématiques pour le XXIe siècle. Paysages mathématiques, en trois volumes, 2019, 2019, 2022.

L'auteur

Martial LEROY, ancien élève de l'ÉNS Cachan, professeur agrégé de mathématiques, titulaire d'un DEA d'analyse fonctionnelle et théorie descriptive des ensembles (1990) et du M2 LMFI, Logique Mathématiques et Fondements de l'Informatique (2004). Passionné depuis toujours de théorie des ensembles.

Sommaire

Partie C : Logique avancée – Modèles de ZFC – Modèles intérieurs

Chapitre 14 : Théorèmes de complétude et de compacité
Calcul propositionnel, calcul des prédicats du premier ordre, ultrapuissances, théorème de Los, quelques bases de théorie des modèles, théorèmes de Löwenheim-Skolem, logiques d'ordre supérieur.

Chapitre 15 : Les théorèmes d'incomplétude de Gödel
Fonctions récursives primitives, fonctions récursives, complexité des formules, machines à registres, ensembles récursivement énumérables, arithmétisation de la syntaxe, résultats d'indécidabilité et d'incomplétude.

Chapitre 16 : Les modèles de ZFC
Description générale, modèles standard, transitifs, lien avec la hiérarchie cumulative, premières preuves d'indépendance, cardinaux fortement inaccessibles.

Chapitre 17 : Notions techniques
Complexité des formules, absolutité, lemme d'effondrement de Mostowski.

Chapitre 18 : L'univers des ensembles constructibles de Gödel
Construction de la classe L, axiome de constructibilité, consistance de l'axiome du choix avec ZF, consistance de l'hypothèse généralisée du continu avec ZFC, constructibilité relative.

Partie D : Combinatoire et forcing – Applications diverses

Chapitre 19 : Quelques principes combinatoires
Théorèmes de Ramsey, caractéristiques cardinales du continu, axiome de Martin, quelques conséquences, principe diamant.

Chapitre 20 : La machinerie du forcing
Motivations, axiomatique du forcing, définition de la relation de forcing, constructions d'extensions génériques, applications du forcing à des preuves d'indépendance. Approche du forcing par les algèbres de Boole.

Chapitre 21 : Forcing itéré – Consistance de l'axiome de Martin
Chapitre 22 : Forcing propre – Les axiomes de forcing
Rappels et compléments sur le forcing, notion de forcing propre, axiome de forcing propre PFA, les autres axiomes de forcing.

Rayon librairie

Mathématiques

Caractéristiques de l'ouvrage

Collection : Orizzonti

ISBN : 978-2-493230-27-0

Format : 15.5 x 24 x 3.5 cm

Nbre pages : 800, broché, noir et blanc

Prix : 49 €