

Classification de modules et représentations de groupes finis

Anna Cadoret

ISBN 978-2-493230-02-7



Anna Cadoret

Classification de modules
et représentations de
groupes finis

www.calvage-et-mounet.fr

Le sujet

Classer les objets mathématiques modulo certaines relations d'équivalence par des invariants faciles à manipuler est au coeur de la discipline mathématique. Un étudiant de première année d'université aura appris par exemple qu'à r -équivalence près, une matrice carrée de taille n à coefficients dans un corps est uniquement déterminée par son rang, et qu'il n'y a donc que $n+1$ classes de r -équivalence. Que se passe-t-il si l'on cherche plutôt à déterminer les matrices à conjugaison près ou si l'on remplace le corps par l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers ? Le théorème de structure des modules de type fini sur les anneaux principaux apporte une réponse fulgurante à ces questions. Beaucoup plus généralement et dans toutes les branches des mathématiques, nombre de problèmes fondamentaux se reformulent en termes de modules sur certains anneaux — pas forcément commutatifs et parfois munis de structures additionnelles — et se réduisent in fine à classer ces modules. Ce phénomène illustre le fait que les modules sur les anneaux sont le prototype de ce que l'on appelle une catégorie abélienne, et que le point de vue unificateur de la théorie des catégories irrigue maintenant toutes les mathématiques. Même dans le cadre de l'algèbre classique, le problème de la classification des modules sur les anneaux reste largement ouvert et nécessite en général pour être traité de développer des outils très élaborés, notamment d'algèbre homologique. Dans deux cas fondamentaux cependant, à savoir les modules de type fini sur les anneaux principaux et les modules sur les algèbres semisimples, ce problème est entièrement compris et accessible par des techniques élémentaires. L'objectif de ce livre est d'exposer en détail ces deux résultats de classification et d'en donner des applications frappantes à des théories standard (réduction des endomorphismes et représentations linéaires des groupes finis), généralement exposées de façon plus laborieuse dans les premières années du cursus universitaire.

Le texte

Ce livre est issu d'un cours donné en troisième année du parcours mathématique à l'École Polytechnique. Il introduit le problème de la classification des modules sur les anneaux et traite en détail deux cas fondamentaux : l'étude des modules de type fini sur les anneaux principaux, illustrée notamment par ses applications à la réduction des endomorphismes, et l'étude des modules sur les algèbres semi-simples, illustrée par ses applications à la théorie des représentations linéaires des groupes finis. Le cours contient également un chapitre passant en revue les principaux résultats de base de la théorie des groupes finis et utilise un peu de vocabulaire catégoriel (explicité en appendice) afin de familiariser le lecteur avec ce langage désormais incontournable des mathématiques modernes. Il contient les preuves détaillées de quelques très beaux résultats de théorie des groupes finis : théorème de Schur-Zassenhaus, théorème de Burnside, classification des représentations linéaires des groupes symétriques et des groupes linéaires sur les corps finis.

Le cours est accompagné de nombreux exercices — corrigés en appendice —, qui alternent avec les développements théoriques en suivant la dynamique du cours tel qu'il était enseigné à l'École Polytechnique.

L'auteure

Ancienne élève de l'École normale supérieure de Cachan, membre junior de l'Institut universitaire de France, l'auteure est actuellement professeure à Sorbonne Université et effectue sa recherche au sein de l'Institut de Mathématique Jussieu - Paris Rive Gauche.

Le public

Sommaire

- 1. Modules sur un anneau : Définitions et exemples; Opérations sur les modules (constructions universelles) ; Conditions de finitude ; Atomisation 1 : modules indécomposables, Krull-Schmidt et modules de type fini sur les anneaux principaux; Atomisation 2 : modules simples et Jordan-Hölder
- 2. Groupes finis - compléments : Groupe symétrique; p -groupes et Sylow; extensions et Schur-Zassenhaus
- 3. Représentations linéaires des groupes finis : anneaux semisimples; théorie des caractères; représentations du groupe symétrique; théorème de Burnside; modules induits, représentations des groupes linéaires sur les corps finis.

Ce livre s'adresse à un public d'étudiants en mathématiques à partir du niveau L3-M1. Il présente une approche conceptuelle, rarement exposée à ce niveau en dépit de sa puissance. Il séduira particulièrement les étudiants ayant une prédilection pour l'algèbre.

Argumentaire

Livre assez court, accompagné de nombreux exercices corrigés, écrit dans le but d'être accessible dès le niveau universitaire L3-M1, ainsi qu'aux élèves des écoles d'ingénieurs.

La concurrence

Ce livre n'a pas vraiment d'analogue en français, du moins destiné à un public d'étudiants. On trouve cependant un traitement de la théorie de la réduction via la classification des modules de type fini sur les anneaux principaux dans [Bourbaki, Algèbre - Chap. VII] et un traitement exhaustif de la théorie des algèbres et modules semisimples dans [Bourbaki, Algèbre - Chap. VIII]. Le chapitre 2 du très bel ouvrage de Serre [Représentations Linéaires des groupes finis, Herman] contient une introduction concise à la théorie des représentations linéaires selon le point de vue des algèbres semisimples exposé ici et a été une source d'inspiration majeure pour la construction de ce cours.

Rayon librairie

Mathématiques, rayon universitaire

Caractéristiques de l'ouvrage

Collection : Nano

ISBN : 978-2-493230-02-7

Format : 10 x 20 cm

Nbre pages : 224 pages, broché, noir et blanc

Prix : 23 €