





# MATHÉMATIQUES EN DEVENIR

*Mathématiques en devenir*

101. — Jacques Faraut. *Analyse sur les groupes de Lie. Une introduction.*
103. — Jean Saint Raymond. *Topologie, calcul différentiel et variable complexe.*
106. — Wolfgang Bertram. *Calcul différentiel topologique élémentaire*
108. — Frédéric Testard. *Analyse mathématique. La maîtrise de l'implicite.*  
(Une nouvelle édition est en préparation.)
110. — Bernard Candelpergher. *Théorie des probabilités. Une introduction élémentaire*
114. — Alain Debreil. *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes*
115. — François Rouvière. *Initiation à la géométrie de Riemann*
116. — Nikolai Nikolski. *Matrices et opérateurs de Toeplitz*
118. — Martine et Hervé Queffelec. *Analyse complexe et applications*
119. — Alain Debreil, Jean-Denis Eiden, Rached Mneimné et Tuong Huy NGuyen. *Formes quadratiques et géométrie*
120. — Christian Leruste. *Topologie algébrique – Une introduction, et au-delà.*  
(Épuisé)
121. — Grégory Berhuy. *Algèbre : le grand combat.* Troisième édition
123. — Charles-Michel Marle. *Géométrie symplectique et géométrie de Poisson*
- 125 et 126. — Laurent Le Floch, Frédéric Testard. *Probabilités 1 et 2 – Le hasard est la nécessité.*
127. — David Chiron. *Chemins d'analyse (1) - Espace de Schwartz, distributions Tempérées et transformation de Fourier.*
129. — Yves Coudène. *La géométrie élémentaire d'Euclide à aujourd'hui*
130. — Ibrahim Assem. *Introduction au langage catégorique*
131. — Ahmed Lesfari. *Courbes algébriques complexes et/ou Surfaces de Riemann compactes*
132. — Patrice Tauvel. *Algèbre linéaire. Échappée décisive dans un territoire splendide*
133. — Bernard Randé. *Introduction aux espaces de Hilbert*
135. — Aref Jeribi. *Systèmes différentiels au sens de Friedrichs et méthodes des éléments finis*
136. — Romain Dujardin. *Théorie ergodique*

Jean SAINT RAYMOND

Topologie,  
calcul différentiel  
et variable complexe

Cours et exercices

Troisième édition, revue et ciselée



Calvage & Mounet

JEAN SAINT RAYMOND est professeur honoraire à l'université Pierre-et-Marie Curie, désormais Sorbonne Université. Il est membre de l'équipe « Analyse fonctionnelle » de l'Institut mathématique de Jussieu.

jean.saint-raymond@imj-prg.fr

Mathematics Subject Classification (2020) :

- 54-00 General topology — General reference works
- 54-01 General topology — Instructional exposition
- 46-00 Functional analysis — General reference works
- 46-01 Functional analysis — Instructional exposition
- 46-C05 Hilbert and pre-Hilbert spaces : geometry and topology
- 53-A15 Affine differential geometry
- 49-01 Calculus of variations ; optimization — Instructional exposition
- 30-99 Functions of a complex variable

∞ Imprimé sur papier permanent.

ISBN 978-2-49-323037-9



© Calvage & Mounet, Paris, 2026

*à Gustave Choquet*



# Table des matières

<b>I. Les nombres réels et les nombres complexes</b>	
1. Densité des rationnels . . . . .	1
2. Racine carrée . . . . .	3
3. Nombres complexes . . . . .	4
<b>II. Topologie des espaces métrisables</b>	
1. Distances . . . . .	7
2. Ouverts . . . . .	8
3. Espaces topologiques . . . . .	10
4. Intérieur et adhérence . . . . .	12
5. Sous-espaces et produits . . . . .	13
6. Suites convergentes . . . . .	16
7. Applications continues . . . . .	19
8. Homéomorphismes . . . . .	26
9. Continuité uniforme . . . . .	28
10. Espaces métriques séparables . . . . .	28
11. Exercices . . . . .	29
<b>III. Espaces compacts</b>	
1. La propriété de Borel–Lebesgue . . . . .	33
2. Espaces métriques compacts . . . . .	37
3. Produit de compacts métrisables . . . . .	40
4. Parties compactes de la droite réelle . . . . .	41
5. Fonctions continues sur un compact . . . . .	42
6. Espaces localement compacts . . . . .	45
7. Exercices . . . . .	48

<b>IV. Espaces complets</b>	
1. Suites de Cauchy . . . . .	53
2. Complétude . . . . .	54
3. Compacité et complétude . . . . .	57
4. Prolongement d'une application uniformément continue . . . . .	58
5. Points fixes des contractions . . . . .	59
6. Le théorème de Baire . . . . .	60
7. Exercices . . . . .	62
<b>V. Espaces connexes</b>	
1. Connexité . . . . .	67
2. Compacts connexes . . . . .	69
3. Espaces connexes par arcs . . . . .	72
4. Espaces localement connexes . . . . .	73
5. Exercices . . . . .	74
<b>VI. Espaces de fonctions continues</b>	
1. Ensembles compacts de fonctions continues . . . . .	81
2. Ensembles denses de fonctions continues . . . . .	84
3. Exercices . . . . .	88
<b>VII. Espaces normés</b>	
1. Normes . . . . .	93
2. Espaces normés de dimension finie . . . . .	96
3. Exemples d'espaces normés . . . . .	99
4. Applications linéaires continues . . . . .	101
5. Quotient par un sous-espace fermé . . . . .	105
6. Applications bilinéaires continues . . . . .	109
7. Perturbations lipschitziennes de l'identité . . . . .	111
8. Le théorème de Hahn–Banach . . . . .	113
9. Le théorème de Banach–Steinhaus . . . . .	117
10. Exercices . . . . .	118
<b>VIII. Espaces de Hilbert</b>	
1. Produit scalaire . . . . .	131
2. Projection orthogonale . . . . .	135
3. Adjoint d'un opérateur . . . . .	139
4. Compacité faible . . . . .	141
5. Exercices . . . . .	144

## IX. Fonctions dérivables

1. Fonctions réelles dérivables . . . . .	151
2. Opérations sur les fonctions dérivables . . . . .	152
3. Extremums . . . . .	154
4. Le théorème des accroissements finis . . . . .	155
5. Fonctions dérivables à valeurs dans un espace de Banach . . . . .	156
6. Inégalité des accroissements finis . . . . .	158
7. Primitives . . . . .	160
8. La formule de Taylor . . . . .	163
9. Exercices . . . . .	166

## X. Fonctions différentiables

1. Notations de Landau . . . . .	169
2. Différentiabilité . . . . .	171
3. Opérations sur les fonctions différentiables . . . . .	175
4. Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ . . . . .	177
5. Le théorème des accroissements finis . . . . .	178
6. Limites de fonctions différentiables . . . . .	182
7. Fonctions à valeurs dans un espace de dimension finie . . . . .	184
8. Fonctions différentiables sur un produit . . . . .	185
9. Inversion . . . . .	188
10. Fonctions définies sur un espace de dimension finie . . . . .	189
11. Matrice jacobienne . . . . .	191
12. Exercices . . . . .	192

## XI. Différentielles du second ordre

1. Différentielle seconde . . . . .	197
2. Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ . . . . .	198
3. Dérivées partielles secondes . . . . .	199
4. Le théorème de symétrie de Schwarz . . . . .	200
5. Formule de Taylor . . . . .	204
6. Fonctions convexes . . . . .	206
7. Exercices . . . . .	209

## XII. Fonctions implicites et inversion locale

1. Difféomorphismes . . . . .	213
2. Second ordre . . . . .	216
3. Fonctions implicites . . . . .	217
4. Exercices . . . . .	220

<b>XIII. Théorèmes du rang constant</b>	
1. Rang de la différentielle . . . . .	225
2. Cas du rang maximum . . . . .	226
3. Le cas général . . . . .	229
4. Exercices . . . . .	233
<b>XIV. Optimisation</b>	
1. Extremums sur un ouvert . . . . .	237
2. Extremums liés . . . . .	240
3. Conditions du second ordre . . . . .	243
4. Calcul des variations . . . . .	250
5. Exercices . . . . .	253
<b>XV. Fonctions holomorphes</b>	
1. Formes différentielles . . . . .	259
2. Intégrales curvilignes . . . . .	260
3. Formes différentielles fermées . . . . .	263
4. Ouverts simplement connexes . . . . .	267
5. Séries entières . . . . .	268
6. Fonctions holomorphes . . . . .	271
7. Exponentielle . . . . .	273
8. Indice d'un lacet . . . . .	275
9. Holomorphie et analyticité . . . . .	277
10. Inégalités de Cauchy . . . . .	280
11. Limites de fonctions holomorphes . . . . .	281
12. Logarithme d'une fonction . . . . .	283
13. Exercices . . . . .	284
<b>XVI. Le théorème des résidus</b>	
1. Singularités isolées . . . . .	291
2. Fonctions méromorphes . . . . .	294
3. Le théorème des résidus . . . . .	295
4. Calculs d'intégrales . . . . .	297
5. Dérivée logarithmique . . . . .	301
6. La formule de Jensen . . . . .	304
7. Exercices . . . . .	305
<b>XVII. Convergence des fonctions holomorphes</b>	
1. Topologie de la convergence compacte . . . . .	315
2. Le théorème de Montel . . . . .	318
3. Séries de fonctions méromorphes . . . . .	319
4. Produits infinis de fonctions holomorphes . . . . .	321
5. Exercices . . . . .	326

<b>XVIII. Le principe du maximum</b>	
1. Principe du maximum dans un ouvert borné . . . . .	329
2. Le lemme de Schwarz . . . . .	329
3. La méthode de Phragmen–Lindelöf . . . . .	331
4. Exercices . . . . .	332
<b>XIX. Représentation conforme</b>	
1. Équivalence conforme . . . . .	335
2. Représentation conforme des ouverts simplement connexes . . .	337
3. Exemples de représentations conformes . . . . .	339
4. Exercices . . . . .	341
<b>A. Ensembles dénombrables</b>	
1. L'ensemble des entiers . . . . .	343
2. Dénombrabilité . . . . .	344
<b>B. Le théorème de l'application ouverte</b>	
1. Le théorème de l'application ouverte . . . . .	347
2. Le théorème du graphe fermé . . . . .	349
<b>C. Connexité dans la sphère de Riemann</b>	
1. Compacts connexes de $S^2$ . . . . .	351
<b>D. Théorèmes de point fixe</b>	
1. Points fixes et rétractions . . . . .	355
2. Champs de vecteurs sur les sphères . . . . .	357
3. Le théorème de Brouwer . . . . .	360
4. Le théorème de Schauder . . . . .	361
<b>E. Quelques problèmes</b>	
1. Polygones d'aire maximale . . . . .	367
2. Densité des fractions rationnelles . . . . .	369
3. Familles sommables de fonctions holomorphes . . . . .	371
4. Racine carrée d'un opérateur hermitien positif . . . . .	372
5. Interpolation complexe (Riesz–Thorin) . . . . .	374
6. Racine carrée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ . . . . .	376
7. Valeurs propres d'un opérateur compact . . . . .	379
8. Un difféomorphisme de $\ell^2$ sur lui-même privé d'un point . . . .	381
9. Une classe de normes $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . . . . .	382

<b>F. Indications de solutions</b>	
Exercices du chapitre II . . . . .	385
Exercices du chapitre III . . . . .	387
Exercices du chapitre IV . . . . .	388
Exercices du chapitre V . . . . .	391
Exercices du chapitre VI . . . . .	393
Exercices du chapitre VII . . . . .	394
Exercices du chapitre VIII . . . . .	395
Exercices du chapitre IX . . . . .	398
Exercices du chapitre X . . . . .	401
Exercices du chapitre XI . . . . .	405
Exercices du chapitre XII . . . . .	407
Exercices du chapitre XIII . . . . .	410
Exercices du chapitre XIV . . . . .	411
Exercices du chapitre XV . . . . .	416
Exercices du chapitre XVI . . . . .	420
Exercices du chapitre XVII . . . . .	423
Exercices du chapitre XVIII . . . . .	426
Exercices du chapitre XIX . . . . .	427
<b>G. Corrigé des problèmes</b>	
1. Polygones d'aire maximale . . . . .	429
2. Densité des fractions rationnelles . . . . .	433
3. Familles sommables de fonctions holomorphes . . . . .	436
4. Racine carrée d'un opérateur hermitien positif . . . . .	438
5. Interpolation complexe (Riesz–Thorin) . . . . .	440
6. Racine carrée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ . . . . .	444
7. Valeurs propres d'un opérateur compact . . . . .	449
8. Un difféomorphisme de $\ell^2$ sur lui-même privé d'un point . . . . .	451
9. Une classe de normes $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . . . . .	455
<b>Bibliographie</b>	<b>459</b>
<b>Notations</b>	<b>463</b>
<b>Index</b>	<b>465</b>

# Avant-propos

Le présent ouvrage reprend le contenu de cours donnés par l'auteur à l'Université Paris 6 dans le cadre de la Licence entre les années 1996 et 2006, en développant les cours photocopiés distribués aux étudiants. Il est principalement destiné aux étudiants de Troisième année de Licence, mais devrait être utile aux candidats à l'Agrégation et au CAPES.

Bien que le contenu des cours ait varié d'une année à l'autre, l'ensemble ne couvre pas tout le programme d'Analyse de la Licence, et ce livre n'a pas la prétention d'être exhaustif. Si l'on considère par exemple la partie consacrée au Calcul différentiel, on constatera que les équations différentielles n'y sont pas abordées, à l'exception d'une petite incursion en Appendice. Cela est dû principalement au fait que le découpage des programmes de Licence sépare, un peu artificiellement, l'étude des rudiments du calcul différentiel de celle des équations différentielles, et que je n'ai pas été amené à faire ce dernier enseignement. Par suite, le Calcul des variations, qui est un champ d'application privilégié du calcul différentiel en dimension infinie, est seulement légèrement évoqué puisque les problèmes qui s'y posent conduisent de façon systématique à la résolution d'équations différentielles.

Une autre « omission » délibérée concerne l'axiome du Choix et le théorème de Zorn. Il était sûrement possible d'y consacrer un appendice supplémentaire, mais j'ai préféré éviter les considérations de Théorie des ensembles qui s'attachent à l'indépendance de cet axiome par rapport aux autres axiomes usuels, et ne pas insister sur l'axiome du Choix dénombrable dépendant, que l'on utilise souvent ici, et sans lequel on ne peut faire que peu de choses en Mathématiques. Le prix à payer est que l'on ne peut donner ici de démonstration de la compacité des produits quelconques d'espaces compacts, ce qui est de peu d'importance puisque l'on se focalise plutôt sur les espaces métrisables, ni surtout du théorème de Hahn–Banach dans les espaces normés non séparables, ce qui conduit à une restriction troublante dans les hypothèses.

Chacun des chapitres se termine par une liste d'exercices. Pour certains d'entre eux des indications de solutions plus ou moins détaillées, allant

d'une suggestion de méthode à une rédaction complète, ont été insérées à la fin du livre ; pour les autres, dont l'énoncé est très détaillé, ces indications auraient probablement été inutiles. On trouvera également, en fin d'ouvrage, une liste de problèmes qui ont été donnés en examen, et qui couvrent en général un spectre plus large que les exercices de fin de chapitre. *Les corrigés de ces problèmes ont été ajoutés à la présente édition.*

J'ai également ajouté en fin d'ouvrage un appendice consacré à la notion d'ensemble dénombrable, souvent utilisée ici mais peu évoquée dans les premières années d'université, ainsi que plusieurs appendices consacrés à des théorèmes d'un niveau un peu trop élevé pour être insérés dans les chapitres, mais accessibles avec les notions étudiées dans ce livre, et dont l'intérêt est évident, comme les théorèmes de point fixe de Brouwer et de Schauder.

Les notations utilisées dans ce cours sont pour la plupart assez courantes. En particulier, il est assez usuel, même si ce n'est pas complètement général, de noter  $f'(x)$  la différentielle en  $x$  de la fonction  $f$ , et encore plus courant, lorsque  $g$  est une fonction dérivable d'une variable réelle, de noter  $g'(x)$  la dérivée en  $x$  de  $g$ . Néanmoins, l'expérience montre que l'utilisation simultanée de ces deux notations induit un grand risque de confusion, puisque deux objets de nature différente peuvent alors être notés de la même façon. J'ai donc utilisé cette notation  $g'$  tant pour la dérivée de la fonction de variable réelle  $g$  que pour la différentielle de la fonction  $g$ , à l'exception des endroits, de fait assez rares, où pouvait s'introduire une ambiguïté. Dans ces cas, j'ai préféré noter  $\frac{dg}{dx}$  la dérivée par rapport à  $x$  de la fonction  $g$  de la variable réelle  $x$ , ce qui introduit une certaine incohérence des notations, et réserver la notation  $f'(x)$  à la différentielle de  $f$ . J'ai employé aussi, sans conviction particulière, la notation  $\nabla_x f(x, y)$  pour désigner une différentielle partielle de  $f$ , aux rares endroits où cette notion est utilisée, pour éviter la confusion avec une dérivée partielle. Pour ce qui est du chapitre sur les espaces hilbertiens, il semble que certains définissent maintenant le produit scalaire hermitien comme semi-linéaire par rapport à sa première variable, et linéaire par rapport à la seconde. J'ai préféré suivre ici les ouvrages de référence (Bourbaki, Dunford–Schwartz, Rudin, . . .) et conserver la définition VIII-1.1.

Je tiens à remercier Hervé Queffélec, mais aussi René Cori, pour leur lecture attentionnée de l'ouvrage et pour leurs remarques critiques. Ma gratitude va aussi à tous ceux qui m'ont fait part de leurs remarques sur les précédentes éditions de cet ouvrage. Ils m'ont aidé à rectifier quelques erreurs de détail et à améliorer la présentation. Malgré cela, il est vraisemblable que tout n'est pas encore parfait, et je suis preneur de toute observation visant à améliorer ce texte. Une liste bibliographique a été insérée, en fin d'ouvrage, à la demande de l'éditeur.

Pour conclure, j'espère que cet ouvrage manifeste la profonde unité qui lie les différentes notions qui y sont étudiées, et qu'il reflète le bonheur que j'ai eu à les enseigner.

JEAN SAINT RAYMOND

Note de l'éditeur.— La présente édition s'enrichit de la résolution d'un nombre considérable d'exercices, soit 83 sur 177.