MATHÉMATIQUES EN DEVENIR

*Mathématiques en devenir*

**101.** — Jacques Faraut. *Analyse sur les groupes de Lie. Une introduction.*

**103.** — Jean Saint Raymond. *Topologie, calcul différentiel et variable complexe.*

106. — Wolfgang Bertram. *Calcul différentiel topologique élémentaire*

108. — Frédéric Testard. *Analyse mathématique. La maîtrise de l'implicite.* (Une nouvelle édition est en préparation.)

110. — Bernard Candelpergher. *Théorie des probabilités. Une introduction élémentaire*

**114.** — Alain Debreil. *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes*

**115.** — François Rouvière. *Initiation à la géométrie de Riemann*

116. — Nikolaï Nikolski. *Matrices et opérateurs de Toeplitz*

**118.** — Martine et Hervé Queffélec. *Analyse complexe et applications*

**119.** — Alain Debreil, Jean-Denis Eiden, Rached Mneimné et Tuong Huy NGuyen. *Formes quadratiques et géométrie*

120. — Christian Leruste. *Topologie algébrique – Une introduction, et au-delà.* (Épuisé)

**121.** — Grégory Berhuy. *Algèbre : le grand combat.* Troisième édition

**123.** — Charles-Michel Marle. *Géométrie symplectique et géométrie de Poisson*

125 et 126. — Laurent Le Floch, Frédéric Testard. *Probabilités* 1 *et* 2 *– Le hasard* est *la nécessité.*

127. — David Chiron. *Chemins d'analyse* (1) - *Espace de Schwartz, distributions Tempérées et transformation de Fourier.*

129. — Yves Coudène. *La géométrie élémentaire d'Euclide à aujourd'hui*

130. — Ibrahim Assem. *Introduction au langage catégorique*

131. — Ahmed Lesfari. *Courbes algébriques complexes et/ou Surfaces de Riemann compactes*

132. — Patrice Tauvel. *Algèbre linéaire. Échappée décisive dans un territoire splendide*

133. — Bernard Randé. *Introduction aux espaces de Hilbert*

135. — Aref Jeribi. *Systèmes différentiels au sens de Friedrichs et méthodes des éléments finis*

136. — Romain Dujardin. *Théorie ergodique*

Jean SAINT RAYMOND

# Topologie,<br>calcul différentiel<br>et variable complexe

Cours et exercices

Troisième édition, revue et ciselée

Calvage & Mounet

Jean Saint Raymond est professeur honoraire à l'université Pierre-et-Marie Curie, désormais Sorbonne Université. Il est membre de l'équipe « Analyse fonctionnelle » de l'Institut mathématique de Jussieu.

jean.saint-raymond@imj-prg.fr

Mathematics Subject Classification (2020) :

| | |
|---|---|
| 54-00 | General topology — General reference works |
| 54-01 | General topology — Instructional exposition |
| 46-00 | Functional analysis — General reference works |
| 46-01 | Functional analysis — Instructional exposition |
| 46-C05 | Hilbert and pre-Hilbert spaces : geometry and topology |
| 53-A15 | Affine differential geometry |
| 49-01 | Calculus of variations ; optimization — Instructional exposition |
| 30-99 | Functions of a complex variable |

ISBN 978-2-49-323037-9

9 782493 230379

∞ Imprimé sur papier permanent.

à *Gustave Choquet*

# Table des matières

# Avant-propos

Le présent ouvrage reprend le contenu de cours donnés par l'auteur à l'Université Paris 6 dans le cadre de la Licence entre les années 1996 et 2006, en développant les cours polycopiés distribués aux étudiants. Il est principalement destiné aux étudiants de Troisième année de Licence, mais devrait être utile aux candidats à l'Agrégation et au CAPES.

Bien que le contenu des cours ait varié d'une année à l'autre, l'ensemble ne couvre pas tout le programme d'Analyse de la Licence, et ce livre n'a pas la prétention d'être exhaustif. Si l'on considère par exemple la partie consacrée au Calcul différentiel, on constatera que les équations différentielles n'y sont pas abordées, à l'exception d'une petite incursion en Appendice. Cela est dû principalement au fait que le découpage des programmes de Licence sépare, un peu artificiellement, l'étude des rudiments du calcul différentiel de celle des équations différentielles, et que je n'ai pas été amené à faire ce dernier enseignement. Par suite, le Calcul des variations, qui est un champ d'application privilégié du calcul différentiel en dimension infinie, est seulement légèrement évoqué puisque les problèmes qui s'y posent conduisent de façon systématique à la résolution d'équations différentielles.

Une autre « omission » délibérée concerne l'axiome du Choix et le théorème de Zorn. Il était sûrement possible d'y consacrer un appendice supplémentaire, mais j'ai préféré éviter les considérations de Théorie des ensembles qui s'attachent à l'indépendance de cet axiome par rapport aux autres axiomes usuels, et ne pas insister sur l'axiome du Choix dénombrable dépendant, que l'on utilise souvent ici, et sans lequel on ne peut faire que peu de choses en Mathématiques. Le prix à payer est que l'on ne peut donner ici de démonstration de la compacité des produits quelconques d'espaces compacts, ce qui est de peu d'importance puisque l'on se focalise plutôt sur les espaces métrisables, ni surtout du théorème de Hahn–Banach dans les espaces normés non séparables, ce qui conduit à une restriction troublante dans les hypothèses.

Chacun des chapitres se termine par une liste d'exercices. Pour certains d'entre eux des indications de solutions plus ou moins détaillées, allant d'une suggestion de méthode à une rédaction complète, ont été insérées à la fin du livre ; pour les autres, dont l'énoncé est très détaillé, ces indications auraient probablement été inutiles. On trouvera également, en fin d'ouvrage, une liste de problèmes qui ont été donnés en examen, et qui couvrent en général un spectre plus large que les exercices de fin de chapitre. *Les corrigés de ces problèmes ont été ajoutés à la présente édition.*

J'ai également ajouté en fin d'ouvrage un appendice consacré à la notion d'ensemble dénombrable, souvent utilisée ici mais peu évoquée dans les premières années d'université, ainsi que plusieurs appendices consacrés à des théorèmes d'un niveau un peu trop élevé pour être insérés dans les chapitres, mais accessibles avec les notions étudiées dans ce livre, et dont l'intérêt est évident, comme les théorèmes de point fixe de Brouwer et de Schauder.

Les notations utilisées dans ce cours sont pour la plupart assez courantes. En particulier, il est assez usuel, même si ce n'est pas complètement général, de noter $f'(x)$ la différentielle en $x$ de la fonction $f$, et encore plus courant, lorsque $g$ est une fonction dérivable d'une variable réelle, de noter $g'(x)$ la dérivée en $x$ de $g$. Néanmoins, l'expérience montre que l'utilisation simultanée de ces deux notations induit un grand risque de confusion, puisque deux objets de nature différente peuvent alors être notés de la même façon. J'ai donc utilisé cette notation $g'$ tant pour la dérivée de la fonction de variable réelle $g$ que pour la différentielle de la fonction $g$, à l'exception des endroits, de fait assez rares, où pouvait s'introduire une ambiguïté. Dans ces cas, j'ai préféré noter $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ la dérivée par rapport à $x$ de la fonction $g$ de la variable réelle $x$, ce qui introduit une certaine incohérence des notations, et réserver la notation $f'(x)$ à la différentielle de $f$. J'ai employé aussi, sans conviction particulière, la notation $\nabla_x f(x, y)$ pour désigner une différentielle partielle de $f$, aux rares endroits où cette notion est utilisée, pour éviter la confusion avec une dérivée partielle. Pour ce qui est du chapitre sur les espaces hilbertiens, il semble que certains définissent maintenant le produit scalaire hermitien comme semi-linéaire par rapport à sa première variable, et linéaire par rapport à la seconde. J'ai préféré suivre ici les ouvrages de référence (Bourbaki, Dunford–Schwartz, Rudin, ...) et conserver la définition VIII-1.1.

Je tiens à remercier Hervé Queffélec, mais aussi René Cori, pour leur lecture attentionnée de l'ouvrage et pour leurs remarques critiques. Ma gratitude va aussi à tous ceux qui m'ont fait part de leurs remarques sur les précédentes éditions de cet ouvrage. Ils m'ont aidé à rectifier quelques erreurs de détail et à améliorer la présentation. Malgré cela, il est vraisemblable que tout n'est pas encore parfait, et je suis preneur de toute observation visant à améliorer ce texte. Une liste bibliographique a été insérée, en fin d'ouvrage, à la demande de l'éditeur.

Pour conclure, j'espère que cet ouvrage manifeste la profonde unité qui lie les différentes notions qui y sont étudiées, et qu'il reflète le bonheur que j'ai eu à les enseigner.

Jean Saint Raymond

Note de l'éditeur.– La présente édition s'enrichit de la résolution d'un nombre considérable d'exercices, soit 83 sur 177.